Розділ 9
Тригонометричні рівняння

Найпростішими *тригонометричними* рівняннями називаються рівняння типу:

$Sinx = a, \quad Cosx = a, \quad tgx = a, \quad ctgx = a.$

Рівняння $Sinx = a$ має розв'язки при $|a| \le 1.$

Формула коренів його $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z.$

Окремі випадки: 1). $Sinx = 1, \ \mathrm{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in Z.$

2). $Sinx = -1, \ \mathrm{x} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in Z.$

3). $Sinx = 0, \ \mathrm{x} = k\pi, \ k \in Z.$

Рівняння $Cosx = a$ має розв'язки при $|a| \le 1,$ які визначаються за формулою

$x = \pm \arccos a + 2k\pi,$ де $k \in Z.$

Окремі випадки: 1). $Cosx = 1, \ \mathrm{x} = 2k\pi, \ k \in Z.$

2). $Cosx = -1, \ \mathrm{x} = \pi + 2k\pi, \ k \in Z.$

3). $Cosx = 0, \ \mathrm{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in Z.$

Рівняння $tg = a$ має розв'язки при всіх $a \in R, \quad x = arctga + \pi n, \quad \pi \in Z.$

Розв'язування будь-якого тригонометричного рівняння шляхом перетворень зводиться до найпростішого, яке розв'язується за загальною формулою, або формулою окремого випадку.

Покажемо це на прикладах.

1). $Sin\frac{2\pi}{x+2} = -1.$

Розв'язання:

$\frac{2\pi}{x+2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in Z. \ \ x + 2 = \frac{2\pi}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi};$

$x = \frac{2\pi \cdot 2}{-\pi + 4k\pi} = \frac{4\pi}{4k\pi - \pi} = \frac{4\pi}{\pi(4k-1)} = \frac{4}{4k-1}.$

Відповідь: $\frac{4}{4k-1}.$

Дано: $(1 + tgx)\cdot(1 + tgy) = 2.$ Знайти $x + y.$

Розв'язання:

О.Д.З.: $Cosx \ne 0, \quad Cosy \ne 0.$

$1 + tgy + tgx + tgx \cdot tgy = 2;$

$tgx + tgy = 2 - 1 - tgx \cdot tgy;$

$tgx + tgy = 1 - tgx \cdot tgy \,|: (1 - tgx \cdot tgy);$

$\frac{tgx + tgy}{1 - tgx \cdot tgy} = 1; \quad tg(x + y) = 1; \quad x + y = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in Z.$

Відповідь: $x+y=\frac{\pi}{4}+n\pi, \quad n\in Z.$

2). $Sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{3x}{4}\right)=\frac{1}{2}.$

Розв'язання:

Враховуючи непарність функції $y=Sinx,$ маємо $-Sin\left(\frac{3x}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2};$

$\frac{3x}{4}-\frac{2\pi}{3}=(-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+n\pi, \ n\in Z.$

$\frac{3x}{4}-\frac{2\pi}{3}=(-1)^n\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)+n\pi; \quad \frac{3x}{4}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}+\pi n\Big|\cdot\frac{4}{3}; \quad x=(-1)^{n+1}\cdot\frac{9\pi}{9}+\frac{8\pi}{9}+\frac{4\pi n}{3}.$

Відповідь: $(-1)^{n+1}\cdot\frac{9\pi}{9}+\frac{8\pi}{9}+\frac{4\pi n}{3}, \ n\in Z.$

3). $Cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}.$

Розв'язання:

Понизимо степінь лівої частини рівняння:

$\frac{1+Cos2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2}=\frac{1}{2}\Big|\cdot 2; \quad 1+Cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1, \quad Cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1-1; \quad Cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0.$

$\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad x=k\pi, \quad k\in Z.$

Відповідь: $k\pi.$

4). $tg(2\arccos\cdot 3x)=-1.$

Розв'язання:

$2\arccos\cdot 3=-\frac{\pi}{4}+k\pi; \quad \arccos\cdot 3x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, \quad k\in Z.$

$0\le \arccos\cdot 2x\le\pi, \quad 0\le\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\le\pi\Big|+\frac{\pi}{8}; \quad \frac{\pi}{8}\le\frac{k\pi}{2}\le\frac{9\pi}{8}\Big|\cdot\frac{2}{\pi}; \quad \frac{1}{4}\le k\le\frac{9}{4}, \quad K=\{1;\ 2\}.$

Якщо $k=1,$ то $\arccos\cdot 3x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}, \quad \arccos\cdot 3x=\frac{3\pi}{8}, \quad 3x=Cos\frac{3\pi}{8}, \quad x_1=\frac{1}{3}Cos\frac{3\pi}{8};$

Якщо $k=2,$ то $\arccos\cdot 3x=-\frac{\pi}{8}+\pi, \quad \arccos\cdot 3x=\frac{7}{8}\pi, \quad x_2=\frac{1}{3}Cos\frac{7\pi}{8}.$

Відповідь: $\frac{1}{3}Cos\cdot 3\pi/6; \ \frac{1}{3}Cos\cdot 7\pi/8.$

5). $Cos\left(2\pi\cdot Cos\frac{3\pi x}{2}\right)=-1.$

Розв'язання:

$2\pi\cdot Cos\frac{3\pi x}{2}=\pi+2k\pi\Big|:2\pi.$

$Cos\frac{3\pi x}{2}=\frac{1}{2}+k, \quad k\in t.$ Це рівняння має розв'язки при умові $\left(\frac{1}{2}+k\right)\le 1.$

Остання нерівність рівносильна такій подвійній нерівності:

$-1 \le \frac{1}{2} + k \le 1 \Big| -\frac{1}{2}. \quad -\frac{3}{2} \le k \le \frac{1}{2}; \quad k = \{-1;\ 0\}.$

При $k = -1$ маємо: $Cos\frac{3x}{2} = \frac{1}{2} - 1; \quad Cos\frac{3x}{2} = -\frac{1}{2}; \quad \frac{3\pi x}{2} = \frac{2\pi}{3}; \quad x = \frac{2\pi}{3}; \quad \frac{3\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{2}{3\pi} = \frac{4}{9}?$

При $k = 0, \quad Cos\frac{3\pi x}{2} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}; \quad \frac{3\pi x}{2} = \frac{\pi}{3};$ і $x = \frac{\pi}{3} : \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2}{3\pi} = \frac{2}{9}.$

Відповідь: $\frac{4}{9}; \frac{2}{9}.$

Ми показали зразки розв'язування майже найпростіших тригонометричних рівнянь. Хоча в принципі, кожне трохи складніше тригонометричне рівняння можна розв’язати декількома способами, все-таки для полегшення вибору способу розв'язування доцільно їх типізувати.

Рівняння які зводяться до квадратних

$\sin^2 x + six + 6 = 0.$

Розв’язання:

Позначимо $\sin x = t; \ |t| \le 1; \ t^2 + 3t + 6 = 0.$

$D = 9 - 4 \cdot 6 = 9 - 24 = -15 < 0; \ t \in \varnothing, \quad x \in \varnothing.$

Відповідь: $\varnothing.$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$

Розв'язання:

$\sin x = t, \ |t| \le 1, \ 2t^2 + t - 1 = 0. \quad D = 1 + 8 = 9 = 3^2. \quad t_1 = \frac{-1-3}{4} = -1; \quad t_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2};$

$\sin x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z. \ \sin x = \frac{1}{2}; \quad x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z.$

Відповідь: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z.$

$3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0.$

Розв’язання:

$\sin x = t, \ |t| \le 1, \ 3t^2 - 5t - 2 = 0. \ D = 25 + 24 = 49 = 7^2. \quad t_1 = \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3}; \ t_2 = \frac{5+4}{6} = 2;$ не задовольняє умову $|t| \le 1. \ \sin x = -\frac{1}{3}, \quad x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{3} + \pi n,$ $n \in Z.$

Відповідь: $(-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, \ n \in Z.$

$\cos^2 x - \sin x - 1 = 0.$

Розв’язання:

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x; \quad 1 - \sin^2 x - \sin x - 1 = 0, \quad -\sin^2 x - \sin x = 0,$

$$-\sin x(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x + 1 = 0, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \ n \in Z, \\ \sin x = -1, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \ n \in Z, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\pi n, \ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$

$tg^3x + 2tg^2x + 3tgx = 0.$

Розв’язання:

$tgx \cdot \left(tg^2x + 2tgx + 3\right) = 0.$ Нехай $tgx = y.$ $y \cdot \left(y^2 + 2y + 3\right) = 0.$

$\left[\begin{array}{l} y = 0, \\ y^2 + 2y + 3 = 0. \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y = 0, \\ D < 0, \ y \in \varnothing K. \end{array}\right.$ $tgx = 0, \ x = \pi n, \ n \in Z.$

Відповідь: $\pi n, \ n \in Z.$

$ctg^2x + 3tgx + 5 = 0.$

Розв’язання:

Нехай $ctgx = t.$ $t^2 + 3t + 5 = 0, \ D = 9 - 20 < 0, \ t \in \varnothing$ в $K.$

Відповідь: $\varnothing.$

$4\sin^2 x - \sqrt{2} \cdot \cos^3 x = 0.$

Розв’язання:

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \quad 4\left(1 - \cos^2 x\right) - \sqrt{2}\cos^3 x = 0, \quad -\sqrt{2}\cos^3 x - 4\cos^2 x + 4 = 0 \Big| : \left(-\sqrt{2}\right),$

$\cos^3 x - 2\sqrt{2}\cos^2 x - 2\sqrt{2} = 0.$ Цікавим є розв'язування цього рівняння:

$\cos^3 x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sqrt{2}\cos^2 x + 2\cos x - 2\cos x - 2\sqrt{2} = 0.$ Згрупуємо по два члени і з кожної групи винесемо спільний множник за дужки:

$\left(\cos^3 x + \sqrt{2}\cos^2 x\right) + \left(\sqrt{2}\cos^2 x + 2\cos x\right) - \left(2\cos x + 2\sqrt{2}\right) = 0,$

$\cos^2\left(\cos x + \sqrt{2}\right) + 2\cos x\left(\cos x + \sqrt{2}\right) - 2\left(\cos x + \sqrt{2}\right) = 0,$

$\left(\cos x + \sqrt{2}\right)\left(\cos^2 x + \sqrt{2}\cos x - 2\right) = 0.$

$\left[\begin{array}{l} \cos x + \sqrt{2} = 0, \\ \cos^2 x + \sqrt{2}\cos x - 2 = 0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \cos x = -\sqrt{2}, \qquad x \in \varnothing \text{ бо не виконується уумова} \left|\cos x\right| \le 1. \\ D = 2 + 8 = 10, \qquad \cos x = \dfrac{-\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2}, \ x \in \varnothing. \end{array}\right.$

$\cos x = \dfrac{-\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2}; \quad x = \pm \arccos\dfrac{-\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$

Відповідь: $\pm \arccos\dfrac{-\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2} + 2\pi n, \ n \in Z.$

$\sin 2x - 2\cos 2x - 3tgx + 2 = 0.$

Розв’язання:

Використаємо універсальну підстановку, що дасть змогу звести дане рівняння до квадратного.

$\sin 2x = \dfrac{2tgx}{1 + tg^2x}; \quad \cos 2x \dfrac{1 - tg^2x}{1 + tg^2x}; \quad \dfrac{2tgx}{1 + tg^2x} - 2 \cdot \dfrac{1 - tg^2x}{1 + tg^2x} - 3tgx + 2 = 0.$ Нехай $tgx = y,$

тоді $\dfrac{2y}{1 + y^2} - 2 \cdot \dfrac{1 - y^2}{1 + y^2} - 3y + 2 = 0; \quad \dfrac{2y - 2 + 2y^2 - 3y - 3y^3 + 2 + 2y^2}{1 + y^2} = 0;$

$-3y^3 + 4y^2 - y = 0 \Big| \cdot (-1); \ 3y^3 - 4y^2 + y = 0; \quad y \cdot \left(3y^2 - 4y + 1\right) = 0;$

$\left[\begin{array}{l} y=0, \\ 3y^2-4y+1=0. \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y=0, \\ D=16-12=4,\ y_2=\dfrac{4+2}{6}=1;\ y_3=\dfrac{4-2}{6}=\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} tgx=0, \\ tgx=1, \\ tgx=\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\pi n,\ n\in Z, \\ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z, \\ x=arctg\left(\dfrac{1}{3}\right)+\pi n,\ n\in Z. \end{array}\right.$

Відповідь: $\pi n,\ \dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ arctg\left(\dfrac{1}{3}\right)+\pi n.$

Рівняння, однорідні відносно $Sinx$ і $Cosx$

$2\sin 5x+5\sin 5x-7\cos 5x=0.$

Розв’язання:

$7\sin 5x-7\cos 5x=0|:7\cos 5x;\quad tg5x-1=0;\quad tg5x=1;\quad 5x=arctg1+\pi n;\quad 5x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n;$

$x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{\pi n}{5};\ n\in Z.$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{\pi n}{5};\quad n\in Z.$

Рівняння вигляду $a_0\cdot\sin^n x+a_1\cdot\sin^{n-1}x+...+a_{n-1}\cdot\cos^{n-1}x+a_n\cos^n x=0.$

Де $n\in N,\ a_0,\ a_1,...a_n$ – числа, називаються однорідними відносно $Sinx;\ Cosx.$

$15\sin^2 x+15\sin x\cdot\cos x-10\cos^2 x=10.$

Розв’язання:

$10=10\cdot 1=10\cdot\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=10\sin^2 x+10\cos^2 x.$

$15\sin^2 x+15\sin x\cdot\cos x-10\cos^2 x-10\sin^2 x-10\cos^2 x=0,$

$5\sin^2 x+15\sin x\cdot\cos x-20\cos^2 x=0|:5\cos^2 x.$

$tg^2x+3tgx-4=0$ $\quad\left[\begin{array}{l} tgx=-4, \\ tgx=1. \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=arctg(-4)+\pi n,\ n\in Z, \\ x=arctg1+\pi n,\ n\in Z. \end{array}\right.$

$x=-arctg4+\pi n,\ n\in Z.\quad x=\dfrac{\pi}{n}+\pi n,\ n\in Z.$

Відповідь: $arctg4+\pi n,\ \dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$

$3\sin x+4\cos^2\dfrac{x}{2}=2\sin x+10\cos^2\dfrac{x}{2}-2.$

Розв’язання:

$3\sin x+4\cos^2\dfrac{x}{2}-2\sin x-10\cos^2\dfrac{x}{2}+2=0.$

$\sin x+6\cos^2\dfrac{x}{2}+2=0;\quad \sin x=\sin 2\left(\dfrac{x}{2}\right)=2\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}.$

$2=2\cdot 1=2\left(\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}\right)=2\cos^2\dfrac{x}{2}+2\sin^2\dfrac{x}{2};$

$2\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}-6\cdot\cos^2\dfrac{x}{2}+2\cos^2\dfrac{x}{2}+2\sin^2\dfrac{x}{2}=0;$

$$2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}-4\cos^2\frac{x}{2}=0\Big|:2\cos^2\frac{4}{2};$$

$$tg^2\frac{x}{2}+tgx-2=0,\quad \left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=-2,\\ tg\frac{x}{2}=1.\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l} -\frac{x}{2}=arctg(-2)+\pi n,\ n\in Z.\\ \frac{x}{2}=arctg1+\pi n,\ n\in Z.\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l} x=-2arctg2+2\pi n,\ n\in Z.\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.\end{array}\right.$$

Відповідь: $-2arctg2+2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.$

$$\frac{1}{2}\sin 2x+3\cos^2 x=0.$$

Розв'язання:

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sin x\cdot\cos x+3\cos^2 x=0,\quad \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x+3\cos x=0.\end{array}\right.\quad x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z;\quad tgx+3=0,$$

$$\cos x\cdot(\sin x+3\cos x)=0$$

$$tgx=-3,\quad x=-arctg3+\pi n.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ -arctg3+\pi n,\quad n\in Z.$

Задача. Один з кутів прямокутного трикутника задовольняє умову

$$\sin^3 x+\sin x\cdot\sin 2x-3\cos^3 x=0.$$

Довести, що трикутник рівнобедрений.

Розв'язання:

$$\sin^3 x+\sin x\cdot\sin 2x-3\cos^3 x=0\Big|:\cos^3 x;\qquad tg^3x+\frac{2\sin^2 x\cdot\cos x}{\cos^3 x}-3=0;$$

$$tg^3x+2tg^2x-3=0;\quad tg^3x-tg^2x+3tg^2x-3=0;\quad (tg^3x-tg^2x)+(3tg^2x-3)=0;$$

$$tg^2x(tgx-1)+3(tg^2x-1)(tgx+1)=0;\quad (tgx-1)(tg^2x+3tgx+3)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l} tgx-1=0,\\ tg^2x+3tgx+3=0\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l} tgx=1,\\ D=9-12<0\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\\ x\in\varnothing.\end{array}\right.$$

Оскільки один з гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює $\frac{\pi}{4}$. Отже, трикутник рівнобедрений.

$$\sin^4 x\cdot\cos^2 x-2\sin^3 x\cdot\cos^3 x-\sin^2 x\cdot\cos^4 x+2\sin x\cdot\cos^5 x=0.$$

Розв'язання:

Це однорідні рівняння 6-го степеня. Винесемо спільний множник за дужки:

$$\sin x\cdot\cos^2 x\cdot\left(\sin^{\backslash 3} x-2\sin^2 x\cdot\cos x-\sin x\cdot\cos^2 x+2\cos^3 x\right)=0.$$

Розв'яжемо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x=0,\ x=\pi n,\ n\in Z.\\ \cos^2 x=0,\ \cos x=0,\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.\\ \sin^{\backslash 3} x-2\sin^2 x\cdot\cos x-\sin x\cdot\cos^2 x+2\cos^3 x=0.\end{array}\right.$$

Третє рівняння сукупності – це однорідне рівняння третього степеня. Розділимо його ліву і праву частини на $\cos^3 x$:

$$tg^3x+2tg^2x-tgx+2=0;\quad tg^2x\cdot(tgx+2)-(tgx-2)=0;\quad (tgx-2)\cdot(tg^2x-1)=0;$$

$$(tgx-2)\cdot(tgx-1)\cdot(tgx+1)=0.$$

$$\left[\begin{array}{l} tgx-2=0, \\ tgx-1=0, \\ tgx+1=0. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} tgx=2, \quad x=arctg2+\pi n,\ n\in Z. \\ tgx=1, \quad x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z. \\ tgx=-1. \quad x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\pi n,\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \mathrm{arctg}2+\pi n,\ \dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ -\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$

$\sin^2 x\cdot\cos x-3\cos^3 x=\sin x-2\cos x.$

Розв'язання:

Це рівняння легко зводиться до однорідного рівняння третього степеня. Перетворимо його праву частину:

$$\sin x-2\cos x=(\sin x-2\cos x)\cdot 1=(\sin x-2\cos x)\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)=\sin^3 x+\sin x\cdot\cos^2 x-$$
$$-2\cos x\cdot\sin^2 x-2\cos^3 x.$$

Тоді дане рівняння набуває вигляду:

$$\sin^2 x\cdot\cos x-3\cos^3 x=\sin^3 x+\sin x\cos^2 x-2\cos x\cdot\sin^2 x-2\cos^3 x,$$
$$\sin^2 x\cdot\cos x-3\cos^3 x-\sin^3 x-\sin x\cdot\cos^2 x+2\cos x\cdot\sin^2 x+2\cos^3 x=0,$$
$$3\sin^2 x\cdot\cos x-\sin x\cdot\cos^2 x-\cos^3 x-\sin^3 x=0\,\big|:(-\cos^3 x),$$
$$3tg^2x+tgx+1+tg^3x=0; \quad tg^3x-3tg^2x+tgx+1=0.$$

Вільний член рівняння 1 має дільника $1;-1$. 1 – коренем цього рівняння, бо $1-3+1+1=0$.

$$\begin{array}{rl|l} & tg^3x-3tg^2x+tgx+1 & tgx-1 \\ - & tg^3x-tg^2x & tg^2x-2tgx-1 \\ \hline - & -2tg^2x+tgx & \\ & -2tg^2x+tgx & \\ \hline - & -tgx+1 & \\ & -tgx+1 & \\ \hline & 0. & \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} tgx=1, \\ tg^2x-2tgx-1=0. \end{array}\right. \qquad x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$$

Розв'яжемо друге рівняння сукупності: $D=4+4=8.$

$$\left[\begin{array}{l} tgx=\dfrac{2-\sqrt{8}}{2}=\dfrac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}, \\ tgx=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=arctg\left(1-\sqrt{2}\right)+\pi n,\ n\in Z. \\ x=arctg\left(1+\sqrt{2}\right)+\pi n,\ n\in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{4}+\pi n, \quad arctg\left(1-\sqrt{2}\right)+\pi n, \quad arctg\left(1+\sqrt{2}\right)+\pi n, \quad n\in Z.$

Рівняння лінійні відносно $\sin x;\ \cos x.$

Рівняння вигляду $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=c,$ де $a,b:c$ –

Числа, називаються лінійними рівняннями відносно $\sin x:\ \cos x.$

Якщо хоча б один з коефіцієнтів дорівнює нулю, то рівняння до єдиного з вже розглянутих видів рівнянь. Якщо ж $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0,$ то покажемо деякі методи розв'язування цього рівняння.

$3\sin x + 2\cos x = 1.$

Розв’язання:

$$\sin x = \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2},$$

$$\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2},$$

$$1 = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}.$$

$$3 \cdot 2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} + 2\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2},$$

$$6\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 0,$$

$$-3\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 6\sin^2\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = 0 \Big| : \left(-cos^2\frac{x}{2}\right),$$

$$3tg^2\frac{x}{2} - 6tg\frac{x}{2} - 1 = 0, \quad D = 36 + 12 = 48.$$

$$tg\frac{x}{2} = \frac{6 - \sqrt{48}}{2 \cdot 3} = \frac{6 - 2\sqrt{12}}{6} = \frac{3 - \sqrt{12}}{3}; \qquad tg\frac{x}{2} = \frac{3 + \sqrt{12}}{3}.$$

$$\frac{x}{2} = arctg\frac{3 - \sqrt{12}}{3} + \pi n^3; \quad \frac{x}{2} = arctg\frac{3 + \sqrt{12}}{3} + \pi n,\ n \in Z.$$

$$x = 2arctg\frac{3 - \sqrt{12}}{3} + 2\pi n, \quad x = 2arctg\frac{3 + \sqrt{12}}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Відповідь: $2arctg\frac{3 - \sqrt{12}}{3} + 2\pi n,\ \ 2arctg\frac{3 + \sqrt{12}}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{3}.$

Розв’язання:

Розділимо обидві частини рівняння на 2: $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Замінимо $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6},\ \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}.$ Тоді $\cos\frac{\pi}{6} \cdot \sin x - \sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x - \frac{\pi}{6} = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n,\ n \in Z; \quad x - \frac{\pi}{6} = (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n,$$

$$x = \frac{\pi}{6} + (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{6} + (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

$4\cos x - 4\sin x = \sqrt{8}.$

Розв’язання:

В лівій частині рівняння винесемо за дужки $4\sqrt{2}$: $4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{8};$

$$4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)=\sqrt{8};\quad 4\sqrt{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{8};\quad \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{8}}{4\sqrt{2}};$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}};\quad \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2};\quad x=-\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$

Рівняння ліві частини яких виражені добутками тригонометричних функцій, а праві дорівнюють нулю

Чи не найбільші труднощі викликають конструювання відповідей цього типу тригонометричних рівнянь. Тут допомагає така вказівка:

1). Скористатись умовою рівності добутку нулю;

2). розв’язати сукупність утворених тригонометричних рівнянь;

3). із знайденої множини розв’язків відфільтрувати сторонні корені, тобто ті, при яких деякі із співмножників рівняння виражають зміст;

4). якщо деякі з рівнянь сукупності мають по два однакових корені, то у відповідь брати по одному з них.

Покажемо це на прикладах.

$$\sin 2x\cdot tg3x\cdot ctg\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0.$$

Розв’язання:

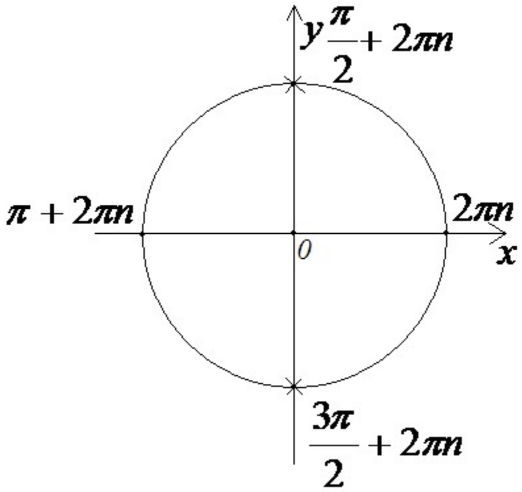
Скориставшись умовами рівності добутку нулю, дістанемо таку сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0,\\ tg3x=0,\\ ctg\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0,\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}2x=k\pi,\\ 3x=k\pi,\\ x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{2},\ n\in Z.\\ x=\frac{k\pi}{3},\ n\in Z.\\ x=\frac{5\pi}{6}+k\pi,\ n\in Z.\end{array}\right.$$

Зобразимо розв'язки кожного рівняння сукупності відповідно кутами на одиничному колі.

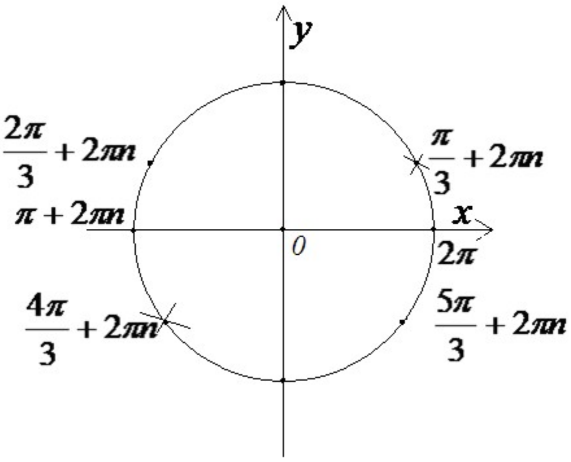
$x=\frac{k\pi}{2}$,

K	0	1	2	3	4	5	6	7
X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$2{,}5\pi$	3π	$3{,}5\pi$



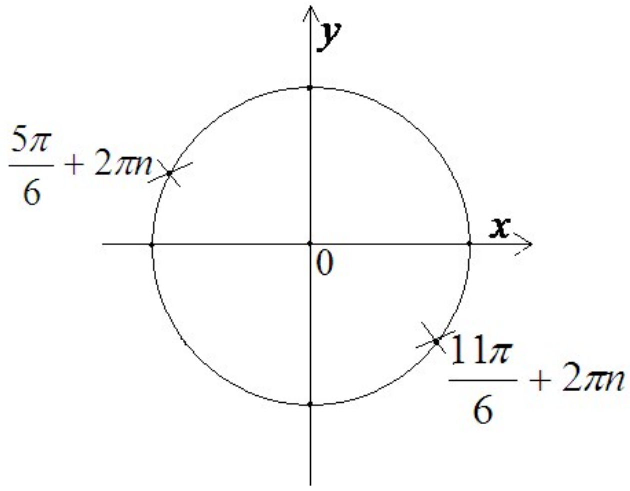
K	0	1	2	3	4	5	6	7
x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	2π	$\frac{7}{3}\pi$

$$x=\frac{K\pi}{3}$$



$$x=\frac{5\pi}{6}+K\pi$$

K	0	1	2	3	4	5	6	7
x	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{17\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{6}$	$\frac{29\pi}{6}$	$\frac{35}{6}\pi$	$\frac{41\pi}{6}$	$\frac{47}{6}\pi$



Числа $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ x=\frac{11\pi}{6}+2\pi n$ – сторонні корені, бо при них $tg3x$ не існує.

Числа $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ x=\frac{4\pi}{3}+2\pi n$ – теж сторонні корені, бо при них $ctg\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ не існує. На кожному малюнку підкреслимо ці точки. У відповідь запишемо ті точки, які залишилися на малюнках.

Відповідь: $x=m\pi,\ x=\frac{2\pi}{3}+m\pi,\ m\in Z.$

$\cos 3x-\cos 7x=0.$

Розв'язання:

$2\sin\frac{3x+7x}{2}\cdot\sin\frac{7x-3x}{2}=0,$

$2\sin 5x\cdot\sin 2x=0,$

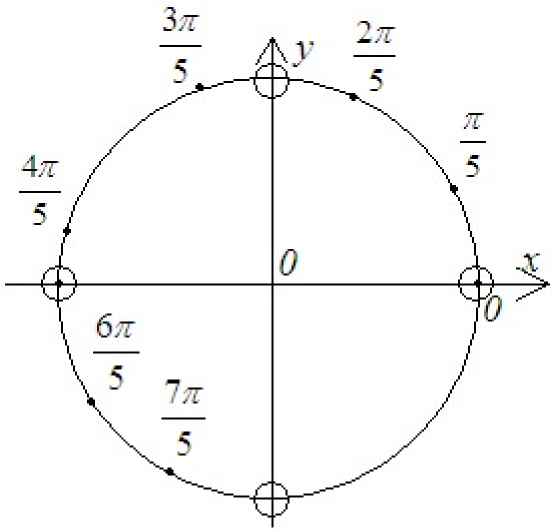
$\left[\begin{array}{l}\sin 5x=0,\\ \sin 2x=0.\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}5x=k\pi,\\ 2x=k\pi.\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{5},\\ x=\frac{k\pi}{2}.\end{array}\right.$

$x=\frac{k\pi}{5}$

K	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
X	*0*	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	π	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{5}$

$x=\frac{k\pi}{2}$

K	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
X	*0*	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$3{,}5\pi$



Значення $x = \pi n$ належать обом множинам розв'язків. Тому ми ці значення вилучаємо з однієї з них, наприклад, з множини $x = \frac{k\pi}{2}$. Тоді шукані розв'язки мають вигляд: ($x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. після фільтрації). $x = \frac{m\pi}{5}$; $x = \frac{\pi}{2} + m\pi,\ m \in Z.$

Відповідь: $x = \frac{m\pi}{5}$; $x = \frac{\pi}{2} + m\pi,\ m \in Z.$

$\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x.$

Розв'язання:

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}, \quad \cos^2 3x = \frac{1+\cos 6x}{2}, \quad \cos^2 4x = \frac{1+\cos 8x}{2},$

$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} \Big| \cdot 2;$

$1 + \cos 2x + 1 + \cos 4x = 1 + \cos 6x + 1 + \cos 8x;$

$2\cos\frac{2x+4x}{2} \cdot \cos\frac{2x-4x}{2} = 2\cos\frac{6x+8x}{2} \cdot \cos\frac{6x-8x}{2} \Big| : 2;$

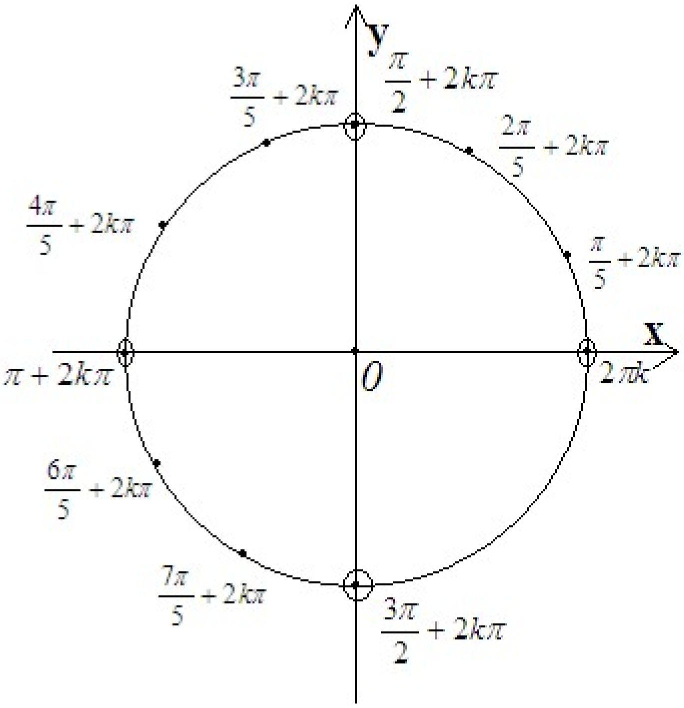
$\cos 3x \cdot \cos(-x) = \cos 17x \cdot \cos(-x);$

$\cos 3x \cdot \cos x - \cos 7x \cdot \cos x = 0;$

$\cos x \cdot (\cos 3x - \cos 7x) = 0; \quad \cos\cdot 2\sin\frac{3x+7x}{2}, \quad \sin\frac{7x-3x}{2} = 0$

$2\cos\cdot \sin 5x \cdot \sin 2x = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin 5x = 0, \\ \sin 2x = 0. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \\ 5x = \pi n, \\ 2n = \pi n \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \\ x = \frac{k\pi}{5}, \\ x = \frac{k\pi}{2}. \end{array}\right.$$



$x=\frac{k\pi}{5}+k\pi$

0	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{2}$	$\frac{15\pi}{2}$

$x=\frac{k\pi}{5}$

0	1	2	3	4	5	6	7
0	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	π	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{5}$

$x=\frac{k\pi}{2}$

0	1	2	3	4	5	6	7
0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$

Із множини $x=\frac{k\pi}{2}$ виключимо числа $2\pi n,\quad \frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad \pi+2k\pi,\quad \frac{3\pi}{2}+2\pi n.$

Відповідь: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad x=\frac{k\pi}{5},\quad k\in Z.$

$tg7x-tgx=0.$

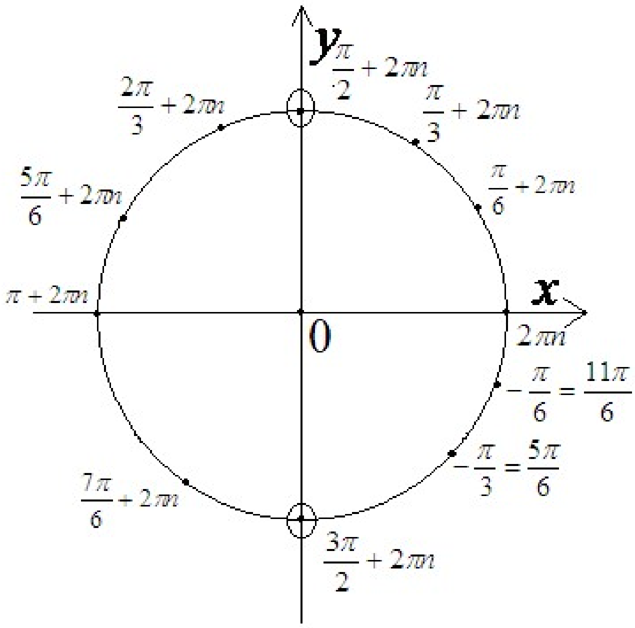
Розв’язання:

$$\frac{\sin 7x}{\cos 7x}-\frac{\sin x}{\cos x}=0,\quad \frac{\sin x\cdot\cos x-\cos 7x\cdot\sin x}{\cos 7x\cdot\cos x}=0,\quad \frac{\sin(7x-x)}{\cos 7x\cdot\cos x}=0,\quad \frac{\sin 6x}{\cos 7x\cdot\cos x}=0.$$

$$\begin{cases}\sin 6x = 0,\\ \cos 7x \neq 0,\\ \cos x \neq 0.\end{cases} \quad \begin{cases}6x = \pi n,\\ 7x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n.\end{cases} \quad \begin{cases}x = \dfrac{\pi n}{6},\\ x \neq \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{\pi}{7}n,\\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n.\end{cases}$$

$x = \dfrac{\pi n}{6}.$

0	1	2	3	4	5	6	7	n
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	x



Сторонній корінь $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ вилучимо з серії $x = \dfrac{\pi n}{6}$.

Відповідь: $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{m\pi}{2}$, $x = \pi m,\ \ n \in Z.$

$tg5x - tg4x - tgx = 0.$

Розв’язання:

З формули тангенса різниці маємо: $tg(5x - 4x) = \dfrac{tg5x - tg4x}{1 + tg5x \cdot tg4x}$.

Тоді $tg5x - tg4x = tg(5x - 4x)\cdot(1 + tg5x \cdot tg4x)$.

$tg\overbrace{(tg5x - tg4x)}^{x}\cdot(1 + tg5x \cdot tg4x) - tgx = 0,$

$tg \cdot (1 + tg5x \cdot tg4x) - tgx = 0,$

$tgx + tgx \cdot tg5x \cdot tg4x - tgx = 0,$

$tgx \cdot tg4x \cdot tg5x = 0.$

$x = \pi n.$

n	1	2	3	4	5	6	7	0
x	π	0	π	0	π	0	π	0

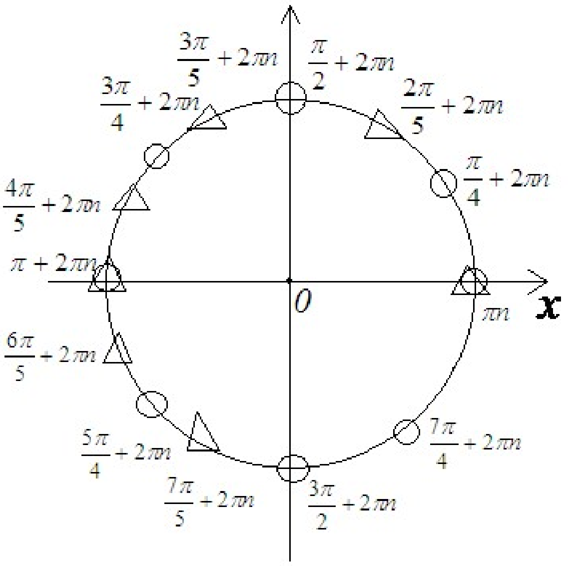
$x=\frac{\pi n}{4}$

n	1	2	3	4	5	6	7	0
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{6\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	0

$x=\frac{\pi n}{5}$

π	0	1	2	3	4	5	6	7
x	0	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	π	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{5}$

$$\left[\begin{array}{l} tgx=0, \\ tg4x=0, \\ tg5x=0. \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=\pi n, \\ 4x=\pi n, \\ 5x=\pi n. \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=\pi n, \\ x=\frac{\pi n}{4}, \\ x=\frac{\pi n}{5}. \end{array}\right.$$



Із множини розв'язків сукупності потрібно "відфільтрувати" серію $x=\pi n,$ бо вона повторюється в двох інших серіях. Із серії $x=\frac{\pi n}{4}$ вилучити теж $x=\pi n.$

Залишиться

Відповідь: $x=\frac{m\pi}{5}, \quad n\in Z.$ $x=\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}, \quad m\in Z.$

Розв'язування складніших тригонометричних рівнянь

$\cos^4 x + \cos^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{4}.$

Розв'язання:

$\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}.$

$\cos^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \left(\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = \left(\frac{1+\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{2}\right)^2 =$

$= \left(\frac{1+\sin 2x}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\sin 2x + \sin^2 2x}{4} = \frac{2 + 2\sin 2x + \cos 2x + \overbrace{\left(\sin^2 2x + \cos^2 2x\right)}^{1}}{4} = \frac{5}{4}.$

$\frac{3 + 2(\sin 2x + \cos 2x)}{4} = \frac{5}{4}\Big| \cdot 4. \quad 3 + 2(\sin 2x + \cos 2x) = 5. \quad 2(\sin 2x + \cos 2x) = 5 - 3;$

$\sin 2x + \cos 2x = 1. \quad 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 0.$

$2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0. \quad 2\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) = 0.$

$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{x}{2} = 0, \\ \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 0. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \pi n, \\ \sin\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2}\Big| : \cos\frac{x}{2}. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 2\pi n, \\ tg\frac{x}{2} = 1. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 2\pi n, \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 2\pi n, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{array}\right.$

Відповідь: $2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$3ctg3x - 4ctg4x = tg3x.$

Розв'язання:

Метод, який дуже рідко застосовується при розв'язуванні тригонометричних рівнянь. Додамо до обох частин рівняння $ctg3x$:

$3ctg3x + 4ctg4x + ctg3x = tg9x + ctg3x; \qquad 4ctg3x - 4ctg4x = tg3x + ctg3x;$

$4\cdot\left(\frac{\cos 3x}{\sin 3x} - \frac{\cos 4x}{din4x}\right) = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} + \frac{\cos 3x}{\sin 3x};$

$4\cdot\frac{\sin 4x\cdot\cos 3x - \cos 4x\cdot\sin 3x}{\sin 3x\cdot\sin 4x} = \frac{\sin^2 3x + \cos^2 3x}{\cos 3x\cdot\sin 3x}; \qquad 4\cdot\frac{\sin(4x - 3x)}{\sin 3x\cdot\sin 4x} = \frac{1}{\cos 3x\cdot\sin 3x};$

$\frac{4\sin x}{\sin 3x\cdot\sin 4x} = \frac{1}{\cos 3x\cdot\sin 3x};$

Використовуючи основну властивість пропорції маємо:

$4\sin x\cdot\cos 3x\cdot\sin 3x = \sin 3x\cdot\sin 4x\Big| : \sin 3x;$

$4\sin x\cdot\cos 3x = \sin 4x;$

В лівій частині рівняння перетворимо добуток тригонометричних функцій у суму: $4\cdot\left(\frac{1}{2}\left(\sin(x+3x) + \sin(x-3x)\right)\right) = 2\sin 4x + 2\sin(-2x) = 2\sin 4x - 2\sin 2x;$ Тоді:

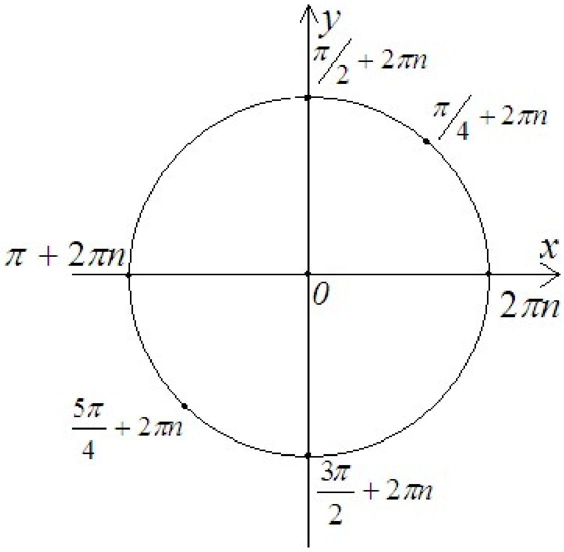
$2\sin 4x - 2\sin 2x = \sin 4x;\quad \sin 4x - 2\sin 2x = 0;\quad 2\sin 2x \cdot \cos 2x - 2\sin 2x = 0;$
$2\sin 2x \cdot (\cos 2x - 1) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0,\\ \cos 2x = 1\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}2x = \pi n,\\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\end{array}\right.$$

$x = \dfrac{\pi n}{2},$

$x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n.$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x	$\pi/4$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{13\pi}{4}$	$\frac{17\pi}{4}$	$\frac{21\pi}{4}$	$\frac{25\pi}{4}$	$\frac{29\pi}{4}$



Якщо $x = 0,$ то $ctg3x$ не існує.

Якщо $x = \dfrac{\pi}{4},$ то $ctg4x$ не існує.

Відповідь: $x \in \varnothing.$

$\sqrt{3} - \dfrac{3ctgx}{1 - 2\sqrt{\cos x}} + 2\sqrt{3\cos x} = 0.$

Розв'язання:

$\sqrt{3}\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}ctgx}{1 - 2\sqrt{\cos x}} + 2\sqrt{\cos x}\right) = 0,\quad 1 - \dfrac{\sqrt{3}ctgx}{1 - 2\sqrt{\cos x}} + 2\sqrt{\cos x} = 0 \Big| : \left(1 - 2\sqrt{\cos x}\right);$

$\left(1 + 2\sqrt{\cos x}\right) \cdot \left(1 - 2\sqrt{\cos x}\right) - \sqrt{3} \cdot ctgx = 0,\quad 1 - 4\cos x - \sqrt{3} \cdot ctgx = 0,$

$1 - 4\cos x - \sqrt{3} \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x} = 0 \Big| : \sin x;\quad \sin x - 4\cos x \cdot \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0;$

$\sin x - 2\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Big| : 2;\quad \dfrac{1}{2} \cdot \sin x - \sin 2x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 0;$

$\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)-\sin 2x=0;\quad \cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin x-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x-\sin 2x=0;$

$2\sin\frac{x-\frac{\pi}{3}-2x}{2}\cdot\cos\frac{x-\frac{\pi}{3}+2x}{2}=0;\quad 2\sin\left(-\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0;$

$-2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0\Big|:(-2);\quad \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{6}=0\right);$

$\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=0,\\ \cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}=\pi n,\\ \frac{3x}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\pi n\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\pi n-\frac{\pi}{6},\\ \frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}+\pi n\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=2\pi n-\frac{\pi}{3},\\ x=\frac{4}{9}\pi+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z.\end{array}\right.$

$\cos x>0,$ а при $x=2\pi n+\frac{10\pi}{9}$ $\cos x<0.$

Відповідь: $2k\pi-\frac{\pi}{3},\ \frac{4\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$ крім $2k\pi+\frac{10\pi}{9}.\ \ k\in Z.$

Цікаву кінцівку має розв'язування такого рівняння:

$\sin^5 x+\cos^5 x=\sec x+\cos ecx.$

Розв’язання:

$\sec x=\frac{1}{\cos x};\quad \cos ecx=\frac{1}{\sin x}.$ Тоді рівняння набуває вигляду:

$\sin^5 x+\cos^5 x-\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}=0\Big|\cdot\cos x\cdot\sin x,$ бо $\sin x\neq 0$ і $\cos x\neq 0.$

$\sin x\cdot\cos x\left(\sin^5 x+\cos^5 x\right)-\left(\sin x+\cos x\right)=0\quad (1)$

Перетворимо вираз

$\sin^5 x+\cos^5 x=\left(\sin x+\cos x\right)^5-A=\ (2)\ \left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin x+\cos x\right)^4-A=$

$=\left(\sin x+\cos x\left(\sin x+\cos x\right)^2\right)^2-A=\left(\sin x+\cos x\right)\left(1+\sin 2x\right)^2-A=\qquad (3)$

$=\left(\sin x+\cos x\right)\left(1+\sin 2x\right)^2-A=\left(\sin x+\cos x\right)\left(1+2\sin 2x+\sin^2 2x\right)=A$

З рівності (2) маємо:

$A=\left(\sin x+\cos x\right)^5-\sin^5 x-\cos^5 x=\left(\sin x+\cos x\right)^2\cdot\left(\sin x+\cos x\right)^3-\sin^5 x-\cos^5 x=$

$=\left(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x\right)\cdot\left(\sin^3 x+3\sin^2 x\cdot\cos x+3\sin x\cdot\cos^2 x+\cos^3 x\right)-$

$-\sin^5 x-\cos^5 x=\sin^5 x+3\sin^4 x\cdot\cos x+3\sin^3 x\cdot\cos^2 x+\sin^2 x\cdot\cos^3 x+2\sin^4 x\cdot\cos x+$

$+6\sin^3 x\cos^2 x+6\sin^2 x\cdot\cos^3 x+2\sin x\cdot\cos^4 x+\sin^3 x\cos^3 x+3\sin^2 x\cdot\cos^3 x+$

$+3\sin x\cos^4 x+\cos^5 x-\sin^5 x-\cos^5 x=5\sin^4 x\cdot\cos x+10\sin^3 x\cos^2 x+10\sin^2 x\cdot\cos^3 x+$

$+5\sin x\cdot\cos^4 x=\left(5\sin^4 x\cos x+5\sin x\cdot\cos^4 x\right)+\left(10\sin^3 x\cdot\cos^2 x+10\sin^2 x\cdot\cos^3 x\right)=$

$=5\sin x\cdot\cos x\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)+10\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\left(\sin x+\cos x\right)=\sin x\cdot\cos x\left(\sin x+\cos x\right)\times$

$\times\left(\sin^2 x-\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x\right)+5\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot 2\sin x\cos x\left(\sin x+\cos x\right)=5\sin x\cdot\cos x\times$

$\times\left(\sin x+\cos x\right)\cdot\left(\sin^2-\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x+2\sin x\cdot\cos x\right)=5\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\left(\sin x+\cos x\right)\times$

$\times\left(1+\frac{1}{2}\sin 2x\right)=2{,}5\sin 2x\left(\sin x+\cos x\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\sin 2x\right)=\left(\sin x+\cos x\right)\left(2{,}5\sin 2x+1{,}25\sin^2 2x\right).$

Вираз для A підставляємо в рівність (3):

$$\sin^5 x+\cos^5 x=(\sin x+\cos x)\cdot\left(1+2\sin 2x+\sin^2 2x\right)-(\sin x+\cos x)\left(2{,}5\sin 2x+1{,}25\sin^2 2x\right)=$$
$$=(\sin x+\cos x)\left(1+2\sin 2x+\sin^2 2x-2{,}5\sin 2x-1{,}25\sin^2 2x\right)=(\sin x\cos x)\times$$
$$\times\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\sin^2 2x\right).$$

Рівняння (1) набуває вигляду:

$$\sin x\cdot\cos x\cdot(\sin x+\cos x)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\sin^2 2x\right)-(\sin x+\cos x)=0;$$

$$\frac{1}{2}\sin 2x\cdot(\sin x+\cos x)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\sin^2 2x\right)-(\sin x+\cos x)=0;$$

$$(\sin x+\cos x)\cdot\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\sin^2 2x-\frac{1}{8}\sin^3 2x-1\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\,\Big|:\cos x \qquad tgx=-1; \qquad x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n\\ \dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{4}\sin^2 2x-\dfrac{1}{8}\sin^3 2x-1=0.\end{array}\right.$$

Нехай $\sin 2x=y,$ тоді $|y|\le 1.$

$$\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{8}y^3-1=0\Big|\cdot(-8)$$

$$y^3+2y^2-4y+8=0.$$

З властивостей модуля числа випливає, що $|y|\ge y$ і $|y|\ge -y.$

Розглянемо такий вираз:

$$y^3+2y^2+4y.$$

$$|y|^3+2\cdot|y|^2+4|y|\ge -y^3-2y^2+4y|\times(-1)$$

$$-|y|^3+2|y|^2+4|y|\le y^3+2y^2-4y;$$

$$y^3+2y^2-4y\ge\left(|y|^3+2|y|^2+4|y|\right);$$

$$y^3+2y^2-4y\ge -7|+8;$$

$$y^3+2y^2-4y+8\ge 1.$$

Таким чином, при $|y|\le 1 \qquad y^3+2y^2-4y+8\ne 0,$ тобто рівняння $y^3+2y^2-4y+8=0$ не має коренів не більших за одиницю.

Відповідь: $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ \ n\in Z.$

Рідкісне рівняння:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\cdot tgx\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}\cdot ctgx\right).$$

Розв’язання:

$\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\cdot tgx\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3\pi}{2}\cdot tgx\right);$ Тоді $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3\pi}{2}\cdot tgx\right)-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\cdot ctgx\right)=0;$

Перетворимо різницю тригонометричних функцій в добуток:

$$2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}\cdot tgx+3\pi\cdot ctgx}{2}\cdot\sin\frac{\frac{3\pi}{2}ctgx-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}tgx}{2}=0;$$

$$2\sin\frac{\frac{\pi-3\pi\cdot tgx+3\pi\cdot ctgx}{2}}{2}\cdot\sin\frac{\frac{3\pi\cdot tgx-\pi+3\pi\cdot tgx}{2}}{2}=0;$$

$$2\sin\frac{3\pi ctgx-3\pi\cdot tgx+\pi}{4}\cdot\sin\frac{3\pi ctgx+3\pi\cdot tgx-\pi}{4}=0;$$

Це рівняння еквівалентне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\sin\frac{3\pi ctgx-3\pi\cdot tgx+\pi}{4}=0,\\ \sin\frac{3\pi ctgx+3\pi\cdot tgx-\pi}{4}=0.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\frac{3\pi ctgx-3\pi\cdot tgx+\pi}{4}=k\pi,\\ \frac{3\pi ctgx+3\pi\cdot tgx-\pi}{4}=k\pi.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}3\pi ctgx-3\pi\cdot tgx+\pi=4k\pi,\\ 3\pi ctgx+3\pi\cdot tgx-\pi=4k\pi.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\pi(3ctgx-3tgx+1)=4k\pi|:\pi,\\ \pi(3ctgx+3tgx-1)=4k\pi|:\pi.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}3ctgx-3tgx=4k-1|:3,\\ 3ctgx+3tgx=4k+1|:3.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}ctgx-tgx=\frac{4k-1}{3},\\ ctgx+tgx=\frac{4k+1}{3}.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{4k-1}{3},\\ \frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{4k+1}{3}.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x}=\frac{4k-1}{3},\\ \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x}=\frac{4k+1}{3}.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\frac{2\cdot\cos 2x}{2\cdot\sin x\cdot\cos x}=\frac{4k-1}{3},\\ \frac{1\cdot 2}{2\cdot\sin x\cdot\cos x}=\frac{4k+1}{3}.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{2\cdot\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{4k-1}{3},\\ \frac{2}{\sin 2x}=\frac{4k+1}{3}.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\frac{\sin 2x}{2\cos 2x}=\frac{3}{4k-1}|\cdot 2,\\ \frac{\sin 2x}{2}=\frac{3}{4k+1}|\cdot 2.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}tg2x=\frac{6}{4k-1},\\ \sin 2x=\frac{6}{4k+1}.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}2x=arctg\frac{6}{4k-1}+\pi k,\\ 2x=(-1)^n\arcsin\frac{6}{4k+1}+\pi k,\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}arctg\frac{6}{4k-1}+\frac{\pi k}{2},\ n\in Z,\\ x=\frac{1}{2}\cdot(-1)^n\arcsin\frac{6}{4k+1}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.\end{array}\right.$$

Відповідь: при $n\neq\{-1;0;1\}$, $\frac{1}{2}\arcsin\frac{6}{4k-1}+\frac{\pi k}{2}$; $\frac{1}{2}(-1)^n\arcsin\frac{6}{4k-1}$, $n\in Z$.

Знайти корені рівняння на $\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$ $\quad\sin x-2\sin 2x-\sin 3x=3.$

Розв’язання:

$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x;\quad \sin 3x=4\sin^3+5\sin x;\quad \sin x-4\sin x\cdot\cos x+4\sin^2 x-3\sin x-3=0;$

$\sin x(1-4\cos x+4\sin^2 x-3)-3=0;\quad \sin x(4\sin^2 x-4\cos x-2)-3=0;$

$\sin x(4(1-\cos^2 x)-4\cos x-2)-3=0;\quad \sin x(4-4\cos^2 x-4\cos x-2)-3=0;$

$-\sin x(4\cos^2 x+4\cos x-2)-3=0|\cdot(-1);\quad \sin x(4\cos^2 x+4\cos x-2)+3=0;$

$\sin x(4\cos^2 x+4\cos x+1-1-2)+3=0;\quad \sin x((2\cos x+1)^2-3)+3=0;$

$\sin x(2\cos x+1)^2-3\sin x+3=0;\quad \sin x(2\cos x+1)^2-3(\sin x-1)=0;$

$\sin x(2\cos x+1)^2+3(1-\sin x)=0;\ (1)$

Оскільки $(2\cos x+1)^2 \geq 0$ і $(1-\sin x)\geq 0,$ то рівняння (1) має місце тоді, коли

$$\begin{cases}\sin x\cdot(2\cos x+1)^2=0,\\ 1-\sin x=0.\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ (2\cos x+1)^2=0\end{array}\right.\\ 1-\sin x=0\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\\ 2\cos x+1=0\end{array}\right.\\ \sin x=1\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\\ x=\pm\dfrac{3}{5}\pi+2k\pi\end{array}\right.\\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\end{cases}$$

Рівняння системи не мають спільних розв'язків.
Відповідь: $\varnothing$.
На $\left(0^0;\ 90^0\right)$ знайти найменший корінь рівняння $\cos^2 3x+\cos^2 5x=\cos^2 7x+\cos^2 9x.$

Розв'язання:

Понизимо степінь кожного з членів рівняння

$$\frac{1+\cos 6x}{2}+\frac{\cos 10x+1}{2}=\frac{1+\cos 14x}{2}+\frac{1+\cos 8x}{2}\Big|\cdot 2$$

$$1+\cos 6x+1+\cos 10x=1+\cos 14x+1+\cos 8x;\quad \cos 6x+\cos 10x=\cos 14x+\cos 18x;$$

Перетворимо суми косинусів в добутки:

$$2\cos\frac{6x+10x}{2}\cdot\cos\frac{6x-10x}{2}=2\cos\frac{14x+18x}{2}\cdot\cos\frac{14x-18x}{2}\Big|:2;$$

$$\cos 8x\cdot\cos(-2x)=\cos 16x\cdot\cos(-2x),$$

$$\cos 16x\cdot\cos 2x-\cos 8x\cdot\cos 2x=0,$$

$$\cos 2x(\cos 16x-\cos 8x)=0,\quad \cos 2x\cdot 2\cdot\sin\frac{16x+8x}{2}\cdot\sin\frac{16x-8x}{2}=0,$$

$$2\cos 2x\cdot\sin 4x\cdot\sin 12x=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0,\\ \sin 4x=0,\\ \sin 12x=0\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\\ 4x=\pi n,\\ 12x=\pi n\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{90^0}{2}+\dfrac{180^0 n}{2},\\ x=\dfrac{180^0 n}{4},\quad n\in Z\\ x=\dfrac{180^0 n}{12}.\end{array}\right.$$

За умовою $\left[\begin{array}{l}0^0<45^0+90^0 n<90^0\Big|-45^0,\\ 0^0<45^0 n<90^0,\\ 0^0<15^0 n<90^0\Big|:15,\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}90n<45\\ n<2\\ n<6\end{array}\right.$

Оскільки $n\in Z,$ то перша нерівність сукупності розв'язків не має. Якщо $n<2,$ то $n<6.$ При $n=1.$ $x=\dfrac{180\cdot 1}{4}=45^0;$ $x=\dfrac{180\cdot 1}{12}=15^0.$ $15^0<45^0.$

Найменший корінь даного рівняння на $\left(0^0;90^0\right)$ $x=15^0.$
Відповідь: $15^0.$
Знайти найменше x в градусах, якщо $-90^0<x<90^0$ і

$$\sin\left(180^0+x\right)\cdot\sin(90-7x)=\cos\left(180^0-3x\right)\cdot\left(360^0+5x\right).$$

Розв'язання:

Застосуємо формули зведення:

$$\sin x\cdot\cos 7x=\cos 3x\cdot\sin 5x,\quad \frac{1}{2}\cdot(\sin(x+7x)-\sin(x-7x))=\frac{1}{2}(\sin(3x+5x)-\sin(5x-3x))\Big|\cdot 2,$$

$\sin 8x + \sin 6x = \sin 8x - \sin 2x, \quad \sin 6x + \sin 2x = 0, \quad 2\sin\frac{6x+2x}{2}\cdot\cos\frac{6x-2x}{2} = 0,$

$2\sin 4x \cdot \cos 2x = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\sin 4x = 0,\\ \cos 2x = 0\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}4x = \pi n,\\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{180n}{4},\\ x = \frac{90^0}{2} + 180n\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = 45^0 \cdot n,\\ x = 45 + 180n\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}-90^0 < 45n < 90^0 \big| : 45^0,\\ -90^0 < 45^0 + 180n < 90^0 \big| - 45^0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}-2 < n < 2,\\ -135^0 < 180n < 45^0\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}-2 < n < 2,\\ -\frac{3}{4} < n < \frac{1}{4}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}n = \{-1; 0; 1\}\\ n = 0\end{array}\right. \quad \begin{array}{l}x = -45^0,\ x = 0^0,\ x = 45^0\\ x = 450 + 0 = 450.\end{array}$$

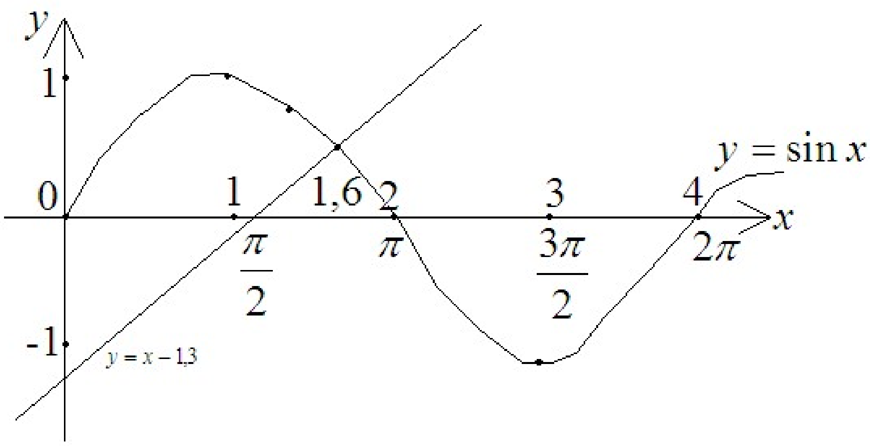
Відповідь: -45^0.

Зваблливим є розв’язання такого рівняння:

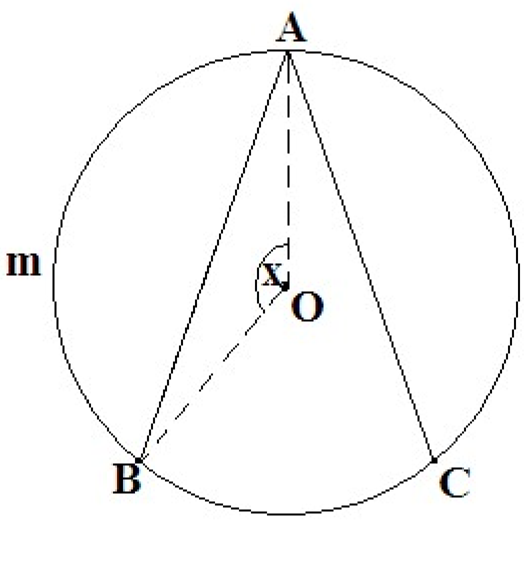
$\sin x + 1{,}3 = x.$

Розв’язання:

$\sin x = x - 1{,}3.$ В одній координатній площині побудуємо графік двох функцій $y = \sin x$ та $y = x - 1{,}3$



Такі рівняння мають немалу галузь практичного застосування, наприклад. Двома хордами, що виходять з однієї точки кола, розділити круг на три рівновеликі частини.



Розв’язання:

Нехай AB і AC – шукані хорди, а центральний кут $AOB = x$ радіан. Тоді площа сектора $AmBO = \frac{\pi R^2 x}{2\pi} = \frac{1}{2}R^2 x,$ де R – радіус кола. Площа трикутника

$AOB = \frac{1}{2}\cdot AO \cdot OB \cdot \sin < AOB,$

$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\cdot R \cdot R \cdot \sin x, \quad S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}R^2 \sin x.$

Визначимо площу сегмента

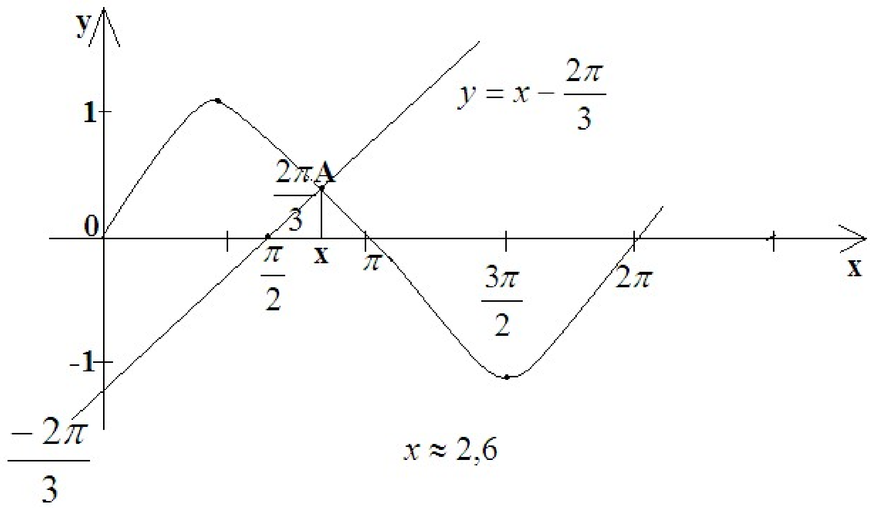
$S_{AmB} = \frac{1}{2}R^2 x - \frac{1}{2}R^2 \sin x = \frac{1}{2}R^2(x - \sin x).$

Оскільки за умовою задачі площа

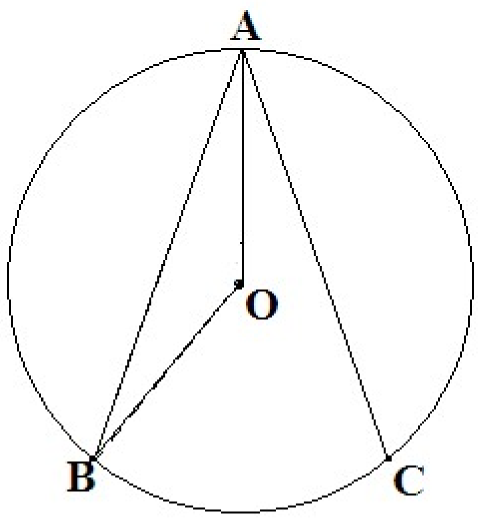
сектора становить третину площі круга, то $\frac{1}{2}R^2(x-\sin x)=\frac{1}{3}\pi R^2 \Big| : \frac{1}{2}R^2$;

$x-\frac{2}{3}\pi=\sin x.$ Це рівняння рівносильне такій системі рівнянь:

$\begin{cases} y = x-\frac{2\pi}{3}, \\ y=\sin x. \end{cases}$ Розв'язання цієї системи здобудемо графічним способом:



Виразимо за допомогою "Чотиризначних математичних таблиць" В. М. Брадіса $2{,}6\,рад \approx 149^0$.



Будуємо дане коло. Проводимо радіус OA. За допомогою транспортира будуємо центральний кут 149^0. Проведемо хорду AB. Будуємо другу хорду AC = AB.

Відповідь: Таким способом побудовані хорди розділили круг на три рівновеликі частини.

Завдання для самостійної роботи:

Розв'язати рівняння:

$\sin x = \frac{1}{2}.$ Відповідь: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

$\cos x = -\frac{1}{2}.$ Відповідь: $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

$\cos x = -\frac{1}{2}.$ Відповідь: $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

$tgx = \sqrt{3}.$ Відповідь: $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

$ctgx = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$ Відповідь: $\frac{2}{3}\pi + \pi n,\ n \in Z.$

$\sqrt{2}\sin x - 1 = 0.$ Відповідь: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

$2\cos x + \sqrt{3} = 0.$ Відповідь: $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$3\sin x - 4 = 0.$ Відповідь: $\varnothing.$

$3tgx + 1 = 0.$ Відповідь: $arctg\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n,\ n \in Z.$

$3ctgx + 2 = 0.$ Відповідь: $arctg\left(-\frac{2}{3}\right) + \pi n,\ n \in Z.$

$\sin(3x - 1) = \frac{1}{5}.$ Відповідь: $x = \frac{1}{3}(-1)^n \arcsin\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}.$

$\cos\left(x^2 - 2\right) = \frac{1}{2}.$ Відповідь: $x = \pm\sqrt{2 \pm \frac{\pi}{3} \pm 2\pi n},\ n \in Z.$

$2\sin x - 3\cos x = 0.$ Відповідь: $x = arctg\frac{3}{x} + \pi n,\ n \in Z.$

$2\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0.$ Відповідь: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ -arctg + \pi n,\ n \in Z.$

$2\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 4.$ Відповідь: $arctg\frac{1+\sqrt{5}}{4} + \pi n,\ arctg\frac{1-\sqrt{5}}{4} + \pi n.$

$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}\sin^2 2x.$ Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}.$

$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}.$ Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

$3\sin x + 4\cos x = 5.$ Відповідь: $-\arcsin\frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$2 \cdot (\sin x + \cos x) + \sin 2x = -1.$ Відповідь: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

$\cos 2x + 4\sin^4 x = 8\cos^6 x.$ Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

$2\cos^2 4x + \sin 10x = 1.$ Відповідь: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{9}\ \ n \in Z.$

$\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^4 3x + \cos^2 4x.$ Відповідь: $\frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}\ (n \neq 5l + 2),$ n $\in Z.$

$\sin x + ctg\frac{x}{2} = 2.$ Відповідь: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = \sin x - \frac{1}{\sin x} + \frac{7}{4}.$ Відповідь: $(-1)^{n+1} \arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

$\sin\left(\frac{3\pi}{5} + x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{2}\right).$ Відповідь: $\pi n,\ \frac{\pi}{5} - \frac{x}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

$4\cos^2 x + 4\sin x - 1 = 0.$ Відповідь: $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

$\sqrt{3}\cos^2 3x + \sin 6x - \sqrt{3}\sin^2 3x = 0.$ Відповідь: $-\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{6},\ n \in Z.$

$\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = 0.$ Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

$1 - \cos x - 2\sin\frac{x}{2} = 0.$ Відповідь: $2\pi n;\ \pi + 4\pi n,\ n \in Z.$

$2\sin x \cdot \cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0.$ Відповідь: $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ \ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in Z.$

$\frac{\cos 3x}{\sin 2x} = \frac{\cos 5x}{\sin 2x}.$ Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

$\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x.$ Відповідь: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ 2\pi n,\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$\cos 3x + \sin 5x = 0.$ Відповідь: $\frac{3\pi}{4} + \pi n,\ \frac{3}{16}\pi + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z.$

$\sin x \cdot \cos 5x = \sin 9x \cdot \cos 3x.$ Відповідь: $\frac{\pi n}{8},\ n \in Z.$

$\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 3.$ Відповідь: $\varnothing.$

$\cos^2 2x + \frac{1}{4}\sin^2 4x + 1 = \sin 4x \cdot \cos 2x + \sin^2 x.$ Відповідь: $\varnothing.$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$ Відповідь: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n;\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$5\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0.$ Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ arctg\left(-\frac{2}{5}\right) + \pi n,\ n \in Z.$

$2\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x - 8\cos^2 x = -2.$ Відповідь: $arctg 2 + \pi n,\ arctg\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi n,\ n \in Z.$

$2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0.$ Відповідь: $2\pi n,\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0.$ Відповідь: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$12\cos^2 x + \sin x - 11 = 0.$ Відповідь: $(-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n,\ (-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

$6\cos^2 x + +\sin x - 2 = 0.$ Відповідь: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

$\cos 2x + \cos^2 x = 0.$ Відповідь: $\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n,\ n \in Z.$

$\sin 3x = \sin x.$ Відповідь: $\pi n,\ \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

$\sin 2x = \cos^2 x.$ Відповідь: $\dfrac{\pi}{2}(2\pi + 1),\ arctg 2 + \pi n,\ n \in Z.$

$\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = \dfrac{1}{8}.$ Відповідь: $(-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi n}{4},\ n \in Z.$

$4\sqrt{3}\cos x - 2\sin x = 5.$ Відповідь:

$2arctg\left(2 - \sqrt{3}\right) + 2\pi n,\ 2\mathrm{arctg}\dfrac{-26 + 7\sqrt{3}}{23} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$2\sin x - 2\cos x = 1 - \sqrt{3}.$ Відповідь: $(-1)^n \arcsin\dfrac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

$(1 + \cos 4x) \cdot \sin 2x = \cos^2 2x$ на $(180^\circ; 225^\circ).$ Відповідь: $195^\circ.$

$\dfrac{\sin^2 x - 4\sin^2 x}{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4} + 1 = 2tg^2 x$ на $(90^\circ; 180^\circ).$ Відповідь: $135^\circ.$

$\sin 2x = \cos^4 \dfrac{x}{2} - \sin^4 \dfrac{x}{2}$ на $(90^\circ;\ 180^\circ).$ Відповідь: $150^\circ.$

$\left(\sin^2 2x - 4\sin^2 x\right) \cdot \left(\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4\right)^{-1} = 2tg^2 x$ на $(0^\circ;\ 90^\circ).$ Відповідь: $45^\circ.$

$\sin 5x - \sin x - \cos 3x = 0$ на $(0^\circ;\ 30^\circ).$ Відповідь: $15^\circ.$

Скільки коренів має рівняння $\cos x - \cos 3x - \sin 2x = 0$ на $(0;\ \pi].$ Відповідь: 5.

$\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x \cdot \cos 2x.$ Відповідь: $\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi n}{8},\ n \in Z.$

$$3\sin^2\frac{x}{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) + 3\sin^2\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} \cdot \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \cos\frac{x}{2} = 0.$$

Відповідь: $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ n \in Z,\ k \in Z.$

$\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = x^2 - 4x + 5.$ Відповідь: $\varnothing.$

$\dfrac{2tg\frac{3}{2}x}{1 + tg^2\frac{3}{2}x} = 2x^2 - 8x + 9.$ Відповідь: $\varnothing.$

$\dfrac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = 2x^2 - 4x + 3.$ Відповідь: $\varnothing.$

$\cos x \cdot \cos(2x - 2\pi) - \cos\left(\dfrac{3}{2}\pi - 2x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = 2x^2 - 12x + 19.$ Відповідь: $\varnothing.$