Розділ 25
Інтеграл

Інтеграл - це сума первісних.

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),\;\; F(b) - F(a) -$ приріст первісної.

$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b \;\; \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ формула Ньютона-Лейбніца.

$\int_a^b f(x)dx -$ формула для обчислення площі криволінійної фігури.

<u>Табличні інтеграли</u>

$Sk \cdot dx = kx + C,\;\; k -$ число, $C -$ стала інтегрування.

$Sdx = x + c,$

$Sx^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\;\; (n \neq -1).$

$S\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$

$S\frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

$Se^x dx = e^x + C.$

$Sa^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\;\; (a > 0,\;\; a \neq 1).$

$\int \sin dx = -\cos x + C.$

$\int \cos dx = \sin x + C.$

$\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C.$

$\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C.$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C.$

$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C.$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C.$

$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Три правила знаходження інтеграла:

1. $\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx.$
2. $\int\big(f(x)+\varphi(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx.$
3. $\int f(kx)dx = \frac{1}{k}\int f(kx)dx.$

$$\int_1^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3-1^3}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

$$\int_\pi^{2\pi} \sin dx = -\cos x\Big|_\pi^{2\pi} = -\cos 2\pi - (\cos\pi) = -1 + (-1) = -2.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) - \sin(2\cdot 0)\right) = \frac{1}{2}\cdot(1-0) = \frac{1}{2}.$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = -\left(ctg\frac{\pi}{3} - ctg\frac{\pi}{4}\right) = -\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right) = -\frac{\sqrt{3}-3}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = (tgx + ctgx)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(tg\frac{\pi}{3} + ctg\frac{\pi}{3}\right) - \left(tg\frac{\pi}{6} + ctg\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = 0.$$

$$\int_{-2}^{-1} \left(x^{-3} - x\right)dx = \left(\frac{x^{-3+1}}{-3+1} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{-1} = \left(\frac{(-1)^{-2}}{-2} - \frac{(-1)^{-2}}{2}\right) - \left(\frac{(-2)^{-2}}{-2} - \frac{(-2)^{-2}}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{-2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{-8} - 2\right) = -1 - \left(-2\frac{1}{8}\right) = -1 + 2\frac{1}{8} = 1\frac{1}{8} = \frac{9}{8}.$$

$$\int_1^4 \frac{x\cdot\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[10]{x^9}}dx = \int_1^4 \frac{x\cdot x^{\frac{2}{5}}dx}{x^{\frac{9}{10}}} = \int_1^4 x^{1,4-0,9}dx = \int_1^4 x^{0,5}dx = \frac{x^{1,5}}{1,5}\Big|_1^4 = \frac{4^{1,5}}{1,5} - \frac{1^{1,5}}{1,5} = \frac{2^3-1}{1,5} = \frac{7}{1,5} = \frac{70}{15} = 4\frac{10}{15} = 4\frac{2}{3}.$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{2-3x} = \ln|2-3x|\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\Big|_1^2 = -\frac{1}{3}\cdot\big(\ln|2-3\cdot 2| - \ln|2-3\cdot 1|\big) = -\frac{1}{3}(\ln 4 - \ln 1) = -\frac{1}{3}\ln 4.$$

$$\int_{-2}^{1} \left(x^2 - 2x + 3\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\Big|_{-2}^{1} = 2\frac{1}{3} + \frac{8}{3} + 10 = 15.$$

$$\int_1^3 e^{2x}dx = \frac{1}{2}\cdot e^{2x}\Big|_1^3 = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{2\cdot 3} - {}^{2\cdot 1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^6 - {}^2\right) = \frac{e^2}{2}\cdot\left(e^4 - 1\right).$$

$$\int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2x+3}\Big|_{-1}^3 = \sqrt{2x+3}\Big|_{-1}^3 = \sqrt{2\cdot 3+3} - \sqrt{2\cdot(-1)+3} = \sqrt{9} - \sqrt{1} = 3 - 1 = 2.$$

$$\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{x+3}} = 2\sqrt{x+3}\Big|_1^6 = 2\sqrt{6+3} - 2\sqrt{1+3} = 2\cdot 3 - 2\cdot 2 = 6 - 4 = 2.$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{1}{2}\cdot\left(\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\int_{1}^{2}\left(3x^4+2x^5-5\right)dx=\left(3\cdot\frac{x^5}{5}+2\cdot\frac{x^3}{3}-5x\right)\Bigg|_1^2=\left(3\cdot\frac{2^5}{5}+2\cdot\frac{2^3}{3}-5\cdot 2\right)-\left(3\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{3}-5\cdot 1\right)=$$

$$=\left(13\frac{3}{5}+5\frac{1}{3}-10\right)-\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}-5\right)=19\frac{1}{5}+5\frac{1}{3}-10-\frac{3}{5}-\frac{2}{5}+5=18\frac{3}{5}+4\frac{2}{3}-5=13\frac{3}{5}+4\frac{2}{3}=$$

$$=17\frac{9+10}{15}=18\frac{4}{15}.$$

$$\int_{4}^{9}\left(\frac{2x}{5}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)dx=\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x}\right)\Bigg|_4^9=\left(\frac{x^2}{5}+\sqrt{x}\right)\Bigg|_4^9=\left(\frac{81}{5}+3\right)-\left(\frac{16}{5}+2\right)=13+1=14.$$

$$\int_{-4}^{2}\frac{xdx}{\sqrt{2-0,5x}}=\int_{-4}^{2}\frac{x-4+4}{\sqrt{2-0,5x}}dx=\int_{-4}^{2}\frac{x-4}{\sqrt{2-0,5x}}dx+\int_{-4}^{2}\frac{4dx}{\sqrt{2-0,5x}}=$$

$$=\int_{-4}^{2}\frac{-2\cdot(2-0,5x)}{\sqrt{2-0,5x}}dx+4\int_{-4}^{2}\frac{1}{\sqrt{2-0,5x}}dx=-2\int_{-4}^{2}\frac{\left(\sqrt{2-0,5x}\right)^2}{\sqrt{2-0,5x}}dx+4\int_{-4}^{2}\frac{1}{\sqrt{2-0,5x}}dx=$$

$$=-2\int_{-4}^{2}\sqrt{2-0,5x}dx+4\cdot 2\sqrt{2-0,5x}\cdot(-2)\Big|_{-4}^{2}=-2\cdot(2-0,5x)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\cdot(-2)\Big|_{-4}^{2}-16\cdot(2-0,5x)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-4}^{2}=$$

$$=\frac{8}{3}\cdot(1-8)-16\cdot(1-2)=-\frac{56}{3}+16=-\frac{8}{3}.$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}tg^2x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}1\cdot dx=tgx\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}-x\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=tg\frac{\pi}{4}-tg\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{12}.$$

Одним із способів обчислення інтегралів є введення нової змінної.

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{dx}{\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}=$$

$$2x+\frac{\pi}{3}=t,\ \ 2\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}=t,\ \ -\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=t,$$

$t=0,$

$t=\frac{\pi}{3}$ - межі інтегрування.

$$2\cdot 0+\frac{\pi}{3}=t,\ \ 2x=t-\frac{\pi}{3}\Big|:2\ \ x=\frac{1}{2}t-\frac{\pi}{6},\ \ dx=\frac{1}{2}dt-0,\ \ dx=\frac{1}{2}dt.$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{1}{2}dt}{\cos^2 t}=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{1}{2}tgt\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\left(tg\frac{\pi}{3}-tg0\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Обчислення площ фігур за допомогою визначеного інтеграла

При обчисленні площ фігур за допомогою інтеграла доречно дотримуватися такої послідовності дій *(кроків)*:

1) з умов задачі утворити систему рівнянь і розв'язати її;
2) враховуючи умови задачі та знайдені розв'язки системи рівнянь, виконати ескізи графіків функцій, що зустрічаються в задачі.
3) за допомогою ескізу встановити, яка з функцій є зменшуваним, (та що накриває ескіз зверху), а яка є від'ємним (графік знизу);
4) визначити межі інтегрування;
5) обчислити значення інтегралу.

Задача. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ та $y = x^3$.

Розв'язання:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x^3. \end{cases}$$

$x^3 = x^2,$

$x^3 - x^2 = 0,$

$x^2(x-1) = 0,$

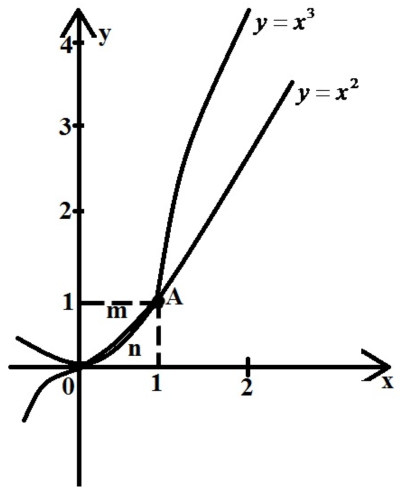
$x_1 = 0,\ \ x - 1 = 0,\ \ x_2 = 1.$

$y_1 = 0,$

$y_2 = 1.$

0 і 1 - межі інтегрування.

$(0;0)$ і $(1;1)$ - точки перетину графіків функцій.



$$S_{OmAn} = \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}\ (\text{кв.од})$$

Відповідь: $\frac{1}{12}\ (\text{кв.од})$.

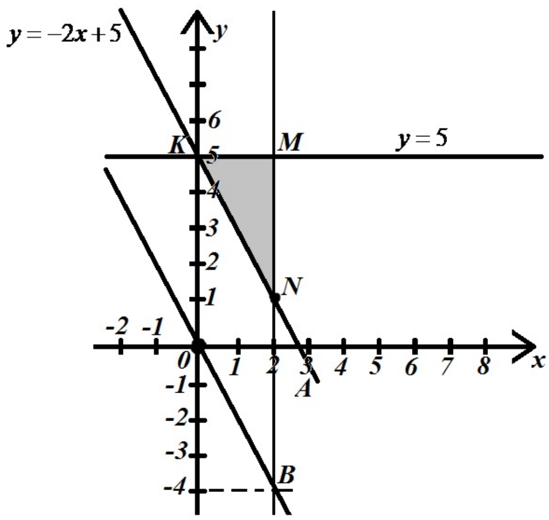
Коли фігура повністю або частково розміщена під віссю абсцис, то можна поміняти місцями межі інтегрування або покласти знак "-" перед інтегралом тому проміжку, на якому фігура знаходиться нижче осі *OX*. Обидва ці способи не позбавлені недоліків. В цій ситуації можна скористатися таким способом: здійснити паралельне перенесення фігури, площу якої необхідно

обчислити вздовж осі OY на таку відстань, щоб фігура повністю розмістилась над віссю OX.
Таке перетворення площини означає, що дані в умовах задачі функції замінюються іншими функціями, утвореними шляхом додавання до даних функцій одного й того ж числа.
Задача. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=-2x,\ \ x=2,\ \ y=0.$

Розв'язання:

$$\begin{cases} y=-2x, & -2x=0, \\ y=0, & x_1=0, \\ x=2. & x_2=2. \end{cases}$$ *0 і 2* - межі інтегрування.

$y_1=0;\ \ y_2=-2\cdot 2=-4.\ \ (0;\ 0),\ (2;\ -4)$ – розв'язки системи.



Потрібно обчислити площу трикутника *OAB*, який знаходиться під віссю *OX*. Додамо до обох функцій $y=0$ та $y=-2x$ число *5*: одержимо нові функції $y=0+5=5;\ \ y=-2x+5.$
Побудуємо графіки цих функцій і знайдемо площу трикутника *KMN,* яка дорівнює площі трикутника *OAB*. Межі інтегрування зберігаються.

$$S_{\Delta KMN}=\int_0^2 5dx-\int_0^2(-2x+5)dx=5\cdot x\Big|_0^2+2\int_0^2 xdx-5x\Big|_0^2=2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=2^2-0^2=4\ \ (\textit{кв.од})$$

Відповідь: 4 *(кв.од)*.
Задача. Обчислити площу фігури обмеженої лініями $y=3x-x^2,\ \ y=0,\ \ x=4.$

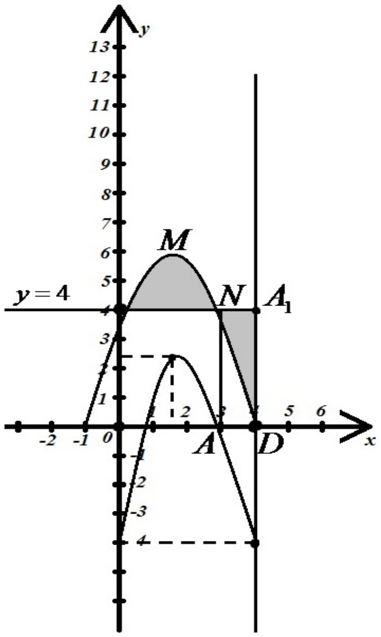
Розв'язання:

$$\begin{cases} y=3x-x^2, & 3x-x^2=0, & 3-x=0, & y_1=3\cdot 0-0^2=0, \\ y=0, & x(3-x)=0, & x_2=3, & y_2=3\cdot 3-3^2=0, \\ x=4. & x_1=0. & x_3=4. & y_3=3\cdot 4-4^2=-4. \end{cases}$$

$0\,(0;0);\ \ A\,(3;0);\ \ B\,(4;-4).$
Знайдемо координати вершини параболи:

$$m=-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{2\cdot(-1)}=1{,}5;\ \ n=y(m)=3\cdot 1{,}5-1{,}5^2=4{,}5-2{,}25=2{,}25.$$

$(1{,}5;\ 2{,}25).$ Найнижча точка фігури - $B\,(4;-4).$
Виконаємо паралельне перенесення фігури на 4 одиниці вгору.



$$S_{A_1DNMK} = S_{NMK} + S_{A_1BN_1},$$

$$S_{NMK} = \int_0^3 \left(3x - x^2 + 4\right)dx = \int_0^3 4dx = 3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^3 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 + 4x\Big|_0^3 - 4x\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot(9-0) - \frac{1}{3}\cdot(27-0) + 4\cdot(3-0) - 4\cdot(3-0) = \frac{27}{2} - 9 + 12 - 12 = 13{,}5 - 9 = 4{,}5\ (\text{кв.од})$$

$$S_{NA_1D} = \int_3^4 \left(4 - \left(3x - x^2\right)\right)dx = \int_3^4 \left(4 - 3x + x^2\right)dx = \int_3^4 4dx - \int_3^4 3xd + \int_3^4 x^2dx = 4x\Big|_3^4 - 3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_3^4 + \frac{x^3}{3}\Big|_3^4 =$$

$$= 4\cdot(4-3) - \frac{3}{2}\cdot(16-9) + \frac{1}{3}\cdot(64-27) = 4 - \frac{21}{2} + \frac{37}{3} = \frac{12+63+74}{6} = \frac{86-63}{6} = \frac{23}{6} = 3\frac{5}{6}.$$

$$S_{A_1DNMK} = 4\frac{1}{2} + 3\frac{5}{6} = 7\frac{3+5}{6} = 7\frac{8}{6} = 8\frac{2}{6} = 8\frac{1}{3}\ (\text{кв.од})$$

Відповідь: $8\frac{1}{3}$ (кв.од)

Текст доповненої задачі.

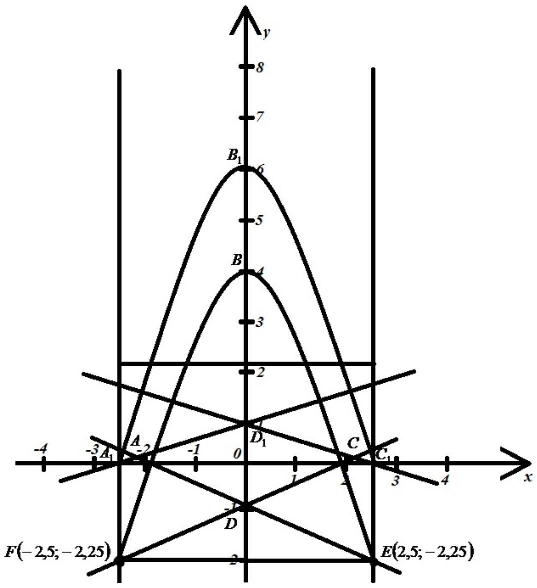
Обчислити площу фігури: $y = 4 - x^2;\ y = -\frac{1}{2}x - 1,\ \ y = \frac{1}{2}x - 1.$

Розв'язання:

Знайдемо межі інтегрування:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = -\frac{1}{2}x - 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 4 - x^2 = -\frac{1}{2}x - 1, \\ 4 - x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = 0\,\Big|\cdot 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 8 - 2x^2 + x + 2 = 0, \\ -2x^2 + x + 10 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x^2 - x - 10 = 0, \\ D = 1 + 80 = 81. \end{array}$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{81}}{4} = \frac{1-9}{4} = \frac{-8}{4} = -2. \quad x_2 = \frac{1+9}{4} = \frac{10}{4} = 2{,}5.$$



$$S_1=\int_{-2,5}^{2,5}\left(6{,}25-x^2\right)dx=\left(6{,}25x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2,5}^{2.5}=\left(15{,}625-\frac{15{,}625}{3}\right)-\left(-15{,}625-\frac{-15{,}625}{3}\right)=$$

$$=31{,}25-\frac{31{,}25}{2}=\frac{31{,}25}{2}=15{,}625\ (кв.од)$$

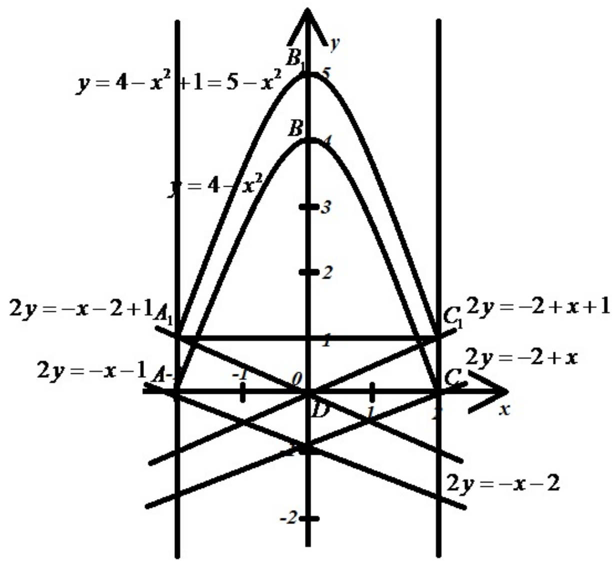
$$S_2=S_{\Delta AD_1C}=\frac{1}{2}\cdot A_1C_1\cdot OD_1=\frac{1}{2}\cdot(2{,}5+2{,}5)\cdot 1{,}25=2{,}5\cdot 1{,}25=3{,}125.$$

$$S_Ф=15{,}625-3{,}125=12{,}5\ (кв.од)$$

Обчислити площу фігури обмеженої лініями:

$x=-2,\ \ x=2,\ \ y=4-x^2,\ \ 2y=-x-2,\ \ 2y=x-2.$

Розв'язання:



Перенесемо фігуру *ABCD* на одну одиницю вгору вздовж осі *OY*. Утворилася фігура $A_1B_1C_1D_1$.

Розглядаємо площу шуканої фігури як суму площ фігур A_1B_1O та OB_1C_1

$$S_{A_1B_1O}=\int_{-2}^{0}\left(5-x^2-\left(-\frac{1}{x}-1\right)\right)dx=\int_{-2}^{0}\left(-x^2+\frac{1}{2}x+6x\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}+6x\right)\Bigg\|_{-2}^{0}=$$

$$=0-\left(-\frac{-8}{3}+1+12\right)=6\frac{1}{3}\ (кв.од)$$

$$S_{OB_1C_1}=\int_{0}^{2}\left(5-x^2-\left(-\frac{1}{x}+1\right)\right)dx=\int_{0}^{2}\left(-x^2-\frac{1}{2}x+6x\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{4}+6x\right)\Bigg\|_{0}^{2}=$$

$$=-\frac{8}{3}-1+12=-5\frac{2}{3}+12=6\frac{1}{3}\ (кв.од)$$

$$S_{Ф}=6\frac{1}{3}+6\frac{1}{3}=12\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $12\frac{2}{3}$.

Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=-x^2+4x-3,\ \ y=-x^2+6x-5,$ $y=3x-15.$

Розв'язання:

Знайдемо межі інтегрування:

$$\begin{cases} y=-x^2+6x-5, & -x^2+6x-5=-x^2+4x-3, \\ y=-x^2+4x-3. & 6x-4x=-3+5,\ 2x=2. \end{cases}$$

$\begin{matrix} x_1=1 \\ y_1=0 \end{matrix}$ точка перетину двох парабол.

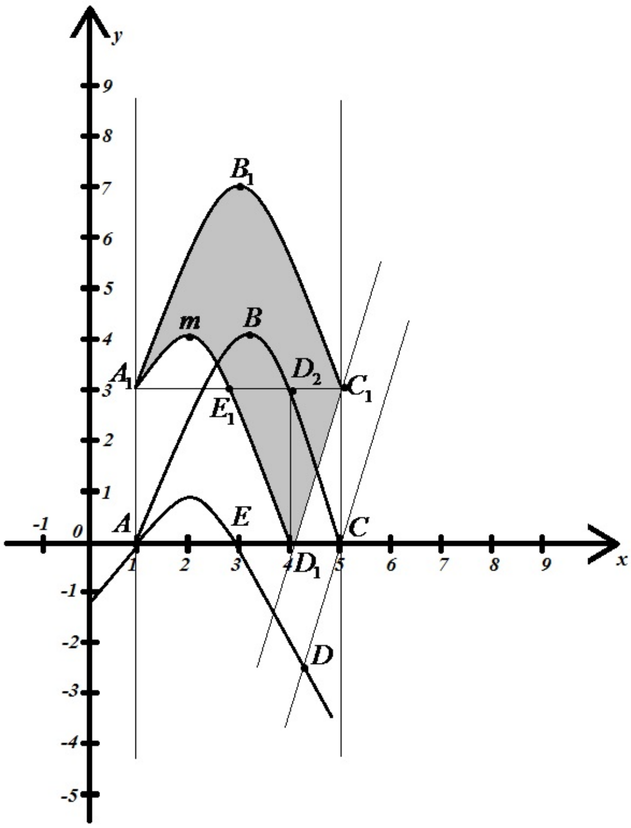
$$\begin{cases} y=-x^2+6x-5, & -x^2+6x-5=3x-15, & -x^2+6x-5-3x+15=0, \\ y=3x-15. & -x^2+3x+10=0. & x^2-3x-10=0. \end{cases}$$

$D=9+40=49,$ $\begin{matrix} x_1=\frac{3-7}{2}=-\frac{4}{2}=-2; \\ y_1=-21. \end{matrix}$ $\begin{matrix} x_2=\frac{3+7}{2}=\frac{10}{2}=5 \\ y_2=0 \end{matrix}$ точки перетину прямої з параболою $y=-x^2+6x-5.$

$$\begin{cases} y=-x^2+4x-3, & -x^2+4x-3=3x-15, \\ y=3x-15. & -x^2+x+12=0.\ \ x^2-x+12=0. \end{cases}$$

$\begin{matrix} x_1=4, & x_2=-3, \\ y_1=-3. & y_2=-25. \end{matrix}$ точки перетину прямої з параболою $y=-x^2+4x-3.$

Виконаємо ескіз.



Знайдемо координати вершини парабол:

$y=-x^2+6x-5,\quad x_0=-\frac{6}{-2}=3,\quad y_0=-9+18-5=4,\ (3;4)$

$y=-x^2+4x-3.\quad x_0=\frac{-4}{-2}=2.\quad y_0=-4+8-3=1.\ (2;1)$

Фігуру *ABCDE* перенесемо вгору вздовж осі ординат на 3 одиниці.

$-x^2+6x-5+3=-x^2+6x-2.$

$S_{A_1B_1C_1}=\int\limits_1^5\left(-x^2+6x-2-3\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}-5x\right)\Big|_1^5=-\frac{125}{3}+3\cdot25-25-\left(-\frac{1}{3}+3\cdot1-5\right)=$

$=-\frac{125}{3}+50+\frac{1}{3}-3+5=-\frac{124}{3}+52=-41\frac{1}{3}+52=10\frac{2}{3}\,(кв.од)$

$-x^2+4x-3+3=-x^2+4x.$

$S_{A_1m_1E_1}=\int\limits_1^3\left(-x^2+4x-3\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right)\Big|_1^3=-9+18-9-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)=1\frac{1}{3}\,(кв.од)$

$S_{A_1B_1C_1E_1}=10\frac{2}{3}-1\frac{1}{3}=9\frac{1}{3}(кв.од)$

$S_{ED_2D_1}=\int\limits_3^4\left(3+x^2-4x\right)dx=\left(3x+\frac{x^3}{3}-4\right)\Big|_3^4=\left(12+\frac{64}{3}-2\cdot16\right)-\left(9+9-2\cdot9\right)=1\frac{1}{3}\,(кв.од)$

$S_{D_1D_2C_1}=\int\limits_4^5\left(3-3x+15-3\right)dx=\int\limits_4^5\left(15-3x\right)dx=\left(15x-\frac{3x^2}{2}\right)\Big|_4^5=\left(75-\frac{75}{2}\right)-\left(60-24\right)=$

$=37\frac{1}{2}-36=1\frac{1}{2}\,(кв.од)$

$S_{Ф}=9\frac{1}{3}+1\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}=11\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=11\frac{4+3}{6}=12\frac{1}{6}\,(кв.од)$

Завдання для самостійної роботи:

$\int_{-1}^{1} x^4 dx.$ Відповідь: $0{,}4.$

$\int_{-2}^{2} x^3 dx.$ Відповідь: $0.$

$\int_{-\pi}^{0} \sin x dx.$ Відповідь: $-2.$

$\int_{-3}^{0} 4x^3 dx.$ Відповідь: $-81.$

$\int_{-3}^{2} (2x-3) dx.$ Відповідь: $-20.$

$\int_{-2}^{-1} (5-4x) dx.$ Відповідь: $11.$

$\int_{-1}^{2} (1-3x^2) dx.$ Відповідь: $-6.$

$\int_{4}^{9} \left(3x-\frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx.$ Відповідь: $89{,}5.$

$\int_{-1}^{1} (x+1)^2 dx.$ Відповідь: $2\frac{2}{3}.$

$\int_{0}^{2} e^{3x} dx.$ Відповідь: $\frac{1}{3}\cdot\left(e^6-1\right).$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x dx.$ Відповідь: $0.$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos\left(3x-45^{\circ}\right) dx.$ Відповідь: $\frac{\sqrt{2}-2}{6}.$

$\int_{-1}^{1} \left(x^3+2x-1\right) dx.$ Відповідь: $-2.$

$\int_{-2}^{1} \left(2x^3+3x-4\right) dx.$ Відповідь: $-24.$

$\int_{1}^{2} (5-2x) dx.$ Відповідь: $2.$

$\int_{1}^{4} \left(1+5x+\frac{3\sqrt{x}}{2}\right) dx.$ Відповідь: $47{,}5.$

$\int_{-1}^{0} \sqrt{3-5x} dx.$ Відповідь: $\frac{2}{15}\left(16\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right).$

$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} ctg^2 2x dx.$ Відповідь: $\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{\pi}{12}.$

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

а) $y = -x^2 - 2x + 3$ та $y = 1 - x.$ Відповідь: $4{,}5\,(кв.од)$

б) $2y = x^2 + x - 6$ та $2y = -x^2 + 3x + 6.$ Відповідь: $20\frac{5}{6}\,(кв.од)$

1) $x = 0,\ y = 0,\ y = \sin x.$ Відповідь: $2\,(кв.од)$

2) $x = 0,\ x = 4,\ y = 0,\ y = 3x^2 - 6.$ Відповідь: $24\,(кв.од)$

3) $y = 0,\ y = 2x^2 + 3x - 9.$ Відповідь: $30\frac{3}{8}\,(кв.од)$

4) $y = x^2 + 6x + 5,\ y = 0.$ Відповідь: $10\frac{2}{3}\,(кв.од)$

5) $y = 0,\ y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$ Відповідь: $0{,}5\,(кв.од)$

6) $y = 0,\ y = (x+2)^2,\ y = 4 - x.$ Відповідь: $10\frac{2}{3}\,(кв.од)$

Обчислити інтеграли:

$\int\limits_0^4 \frac{x^2 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} dx.$ Відповідь: $12\frac{4}{5} - 3\frac{3}{7}\sqrt[3]{2}.$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \sin x \right) dx.$ Відповідь: $\frac{6 - \sqrt{2}}{2}.$

Для функції $f(x) = x^2 - 2x + 1$ знайти ту первісну $F(x)$, графік якої проходить через т. $M(2;1)$.

Відповідь: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + \frac{1}{3}.$

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 6x + 5$ і осями координат.

Відповідь: $2\frac{1}{3}\,(кв.од).$

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 2x - 2$ та $y = x.$

Відповідь: $4{,}5\,(кв.од).$