Розділ 21
Арифметична прогресія

Числова послідовність - це переномерований ряд чисел, розміщених в порядку зростання номерів їх місць. Числа в послідовності називаються - її членами.

Арифметична прогресія - це числова послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додається - одне й те ж число d.

Зручно позначати арифметичну прогресію $\div$

$a_n = a_{n-1} + a,\ \ d = a_n - a_{n-1} -$ різниця арифметичної прогресії.

Щоб задати арифметичну прогресію, достатньо вказати її перший член a_1 та різницю d.

Характеристична властивість арифметичної прогресії: кожний член, починаючи з другого, є середнім арифметичним попереднього і наступного членів, тобто $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, n \in Z.$

Формула $n-го$ члена:

$$a_n = a_1 + d \cdot (n-1).$$

Формула суми n членів арифметичної прогресії:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;\ S_n = \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n.$$

Дуже цінна властивість членів арифметичної прогресії: суми членів рівновіддалених від кінців арифметичної прогресії, рівні між собою, тобто

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}.$$

Дано: $a_1 = 3, a_2 = 7.$

Знайти: a_{15} і $S_{15}.$

Розв'язання:

Знайдемо різницю прогресії: $d = a_2 - a_1,\quad d = 7 - 3 = 4.$

З вимоги задачі слідує, що $n = 15.$

За формулою $n-го$ членів $\div$ $a_n = a_1 + d(n-1)$ маємо: $a_{15} = 3 + 4 \cdot (15-1) = 3 + 56 = 59.$

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,\ S_{15} = \dfrac{3+59}{2} \cdot 15 = 31 \cdot 15 = 465.$

Відповідь: $59; 465.$

Дано: $a_1 = -5;\ d = 4.$ Знайти a_{10} і $S_{100}.$

Розв'язання:

$a_{11} = a_1 + d(n-1),\ a_{10} = -5 + 4 \cdot (10-1) = -5 + 36 = 31.$

$S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n;$

$S_{100} = \dfrac{2 \cdot (-5) + 4 \cdot (100-1)}{2} \cdot 100 = \dfrac{-10+396}{2} \cdot 100 = \dfrac{386}{2} \cdot 100 = 193 \cdot 100 = 19300.$

Відповідь: $31;\ 19300.$

Дано: $\div S_7 105, d = 4$. Знайти a_1 і a_7.

Розв'язання:

$a_n = a_1 + d(n-1)$.

Застосуємо її до сьомого члена $\div$

$a_7 = a_1 + 4\cdot(n-1)$; $a_7 = a_1 + 24$.

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$; $S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2}\cdot 7$; $105 = \frac{a_1 + a_1 + 24}{2}\cdot 7$; $105 = \frac{2a_1 + 24}{2}\cdot 7$; $105 = (a_1 + 12)\cdot 7$;

$a_1 + 12 = \frac{105}{7}$; $a_1 + 12 = 15$; $a_1 = 15 - 12$; $a_1 = 3$.

$a_7 = 3 + 24$; $a_7 = 27$.

Відповідь: $3; 27$.

Дано $\div d = -3$, $a_n = 2$, $S_n = 57$. Знайти a_1 і n.

Розв'язання:

$a_n = a_1 + d\cdot(n-1)$; $2 = a_n - 3\cdot(n-1)$; $2 = a_1 - 3n + 3$; $a_1 - 3n = -1\ (1)$.

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$; $57 = \frac{a_1 + 2}{2}\cdot n$; $114 = (a_1 + 2)\cdot n\ (2)$. Оскільки a_1 і n мають задовольняти умови заданої задачі, то можна утворити таку систему рівнянь:

$\begin{cases} a_1 - 3n = -1, \\ (a_1 + 2)\cdot n = 114. \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 = 3n - 1, \\ (3n - 1 + 2)\cdot n = 114. \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 = 3n - 1, \\ (3n + 1)\cdot n = 114. \end{cases}$

$3n^2 + n - 114 = 0$, $D = 1 + 12\cdot 114 = 1369 = 37^2$.

$n_1 = \frac{-1-37}{6} = -\frac{38}{6}$ – не задовольняє умову задачі, бо $n \in Z$.

$n_2 = \frac{-1+37}{6} = \frac{36}{6} = 6 \in N$. $a_1 = 3\cdot 6 - 1 = 17$.

Відповідь: $6; 17$.

Між числами 17 і 32 вставити п'ять таких чисел, щоб вони разом з даними числами утворили арифметичну прогресію.

Розв'язання:

Нехай $a_1 = 17$, $a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 = 32$.

За формулою $a_n = a_1 + d\cdot(n-1)$ знайдемо d:

$17 + d\cdot(7-1) = 32$, $6d = 32 - 17$, $6d = 15$, $d = \frac{15}{6} = 2{,}6$.

$a_2 = 17 + 2{,}5 = 19{,}5$, $a_3 = 19{,}5 + 2{,}5 = 22$, $a_4 = 22 + 2{,}5 = 24{,}5$, $a_5 = 24{,}5 + 2{,}5 = 27$,

$a_6 = 27 + 2{,}5 = 29{,}5$.

Відповідь: *19,5; 22; 24,5; 27; 29,5.*

Дано $\div a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$. Знайти S_{20}.

Розв'язання:

Члени a_6 та a_{15} - рівновіддалені від кінців $\div$, що містить *20* членів.

Аналогічно можна стверджувати про a_9 і a_{12}. Таким чином, $a_6 + a_{15} = a_9 + a_{12}$,

$a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = (a_6 + a_{15}) + (a_9 + a_{12}) = (a_6 + a_{15})\cdot 2 = 20$; $a_6 + a_{15} = \frac{20}{2} = 10$.

$a_1 + a_{20} = a_6 + a_{15} = 10.$ Знайдемо S_{20}: $S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{10}{2} \cdot 20 = 100.$

Відповідь: *100.*

Довести, що послідовність, задана формулою $n - го$ члена $a_n = 2n - 5,$ є арифметичною прогресією.

Розв'язання:

Попередній член цієї послідовності $a_{n-1} = 2(n-1) - 5 = 2n - 2 - 5 = 2n - 7.$

Наступний член послідовності $a_{n+1} = 2(n+1) - 5 = 2n + 2 - 5 = 2n - 3.$

Знайдемо середнє арифметичне попереднього і наступного членів цієї послідовності:

$$\frac{2n - 7 + 2n - 3}{2} = \frac{4n - 10}{2} = \frac{4n}{2} - \frac{10}{2} = 2n - 5 = a_n.$$

Положення про характеристичну властивість прогресії прийнятне до деякої арифметичної прогресії прийнятне до даної послідовності $a_n,$ отже, послідовність a_n – є арифметичною прогресією.

Дано: $\div a_1 + a_5 = 24,\ \ a_2 \cdot a_5 = 60.$ Знайти a_1 і $d.$

Розв'язання:

a_1, a_2, a_3, a_5 мають задовольняти такі в умові задачі рівняння, а тому вони повинні задовольнити таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = 24, \\ a_2 \cdot a_3 = 60. \end{cases}$$

Використовуючи формулу $n - го$ члена $\div$, виразимо a_2, a_3, a_5 через a_1 і d:

$a_2 = a_1 + d,\ \ a_3 = a_1 + d + d = a_1 + 2d,\ \ a_5 = a_1 + 4d.$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + 4d = 24, \\ (a_1 + d) \cdot (a_1 + 2d) = 60. \end{cases} \begin{cases} a_1 + a_1 + 4d = 24, \big| : 2 \\ (a_1 + d) \cdot (a_1 + 2d) = 60. \end{cases} \begin{cases} a_1 + 2d = 12, \\ (a_1 + d) \cdot 12 = 60. \end{cases} \begin{cases} a_1 + 2d = 12, \\ a_1 + d = 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + d + d = 12, \\ a_1 + d = 5. \end{cases} \begin{cases} 5 + d = 12, \\ a_1 + d = 5. \end{cases} \begin{cases} d = 12 - 5, \\ a_1 + 7 = 25. \end{cases} \begin{cases} d = 7, \\ a_1 = -2. \end{cases}$$

Відповідь: $-2; 7.$

Знайти суму всіх двоцифрових чисел.

Розв'язання:

Маємо $\div$ з $a_1 = 10,\ \ d = 1,\ \ a_n = 99.$

$a_n = a_1 + d(n-1),\ \ 10 + 1 \cdot (n-1) = 99,\ \ n - 1 = 99 - 10,\ \ n = 89 + 1,\ \ n = 90.$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n,\ \ S_{90} = \frac{2 \cdot 10 + 1 \cdot (90 - 1)}{2} \cdot 90 = \frac{20 + 89}{2} \cdot 90 = \frac{109}{2} \cdot 90 = 4905.$$

Відповідь: $4905.$

Розв'язати рівняння: $1 + 7 + 13 + ... + x = 280, x \in N.$

Розв'язання:

Очевидно, члени цього рівняння є членами арифметичної прогресії, бо $7 - 1 = 6,\ \ 13 - 7 = 6,\ \ d = 6.$

$$a_n = a_1 + d(n-1),\ \ x = 1 + 6(n-1),\ \ x = 1 + 6n - 6,\ \ 6n = x + 5,\ \ n = \frac{x+5}{6}.$$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,\ S_n = \frac{1+x}{2} \cdot \frac{x+5}{6} = \frac{(1+x)(x+5)}{12},\ \frac{x+5+x^2+5x}{12} = 280,\ x^2+6x+5=3360,$

$x^2+6x-3355=0,\ D=36+13420=13456=116^2.$

$x_1 = \frac{-6-116}{2} = \frac{-122}{2} = -61 -$ не задов. умову;

$x_2 = \frac{-6+116}{2} = 55.$

Відповідь: 55.

Знайти a_1 і d арифметичної прогресії, сума n перших членів якої задана формулою $S_n = 5n^2 + 6n.$

Розв'язання:

Знайдемо суму одного члена $S_1 = 5 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 11.$

Значення суми одного члена прогресії співпадає із значенням першого члена, тобто $a_1 = 11.$

Обчислимо суму двох членів $S_2 = 5 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = 32.$

$S_2 = a_1 + a_2;\ a_2 = S_2 - a_1;\ a_2 = 32 - 11 = 21.$

Різниця прогресії: $d_2 = a_2 - a_1;\ d = 21 - 11 = 10.$

Відповідь: $a_1 = 11;\ d = 10.$

Довести, що сума n перших непарних чисел натурального ряду дорівнює квадратові їх кількості.

Доведення

$S_n = 1+3+5+7+...+(2n-1).$

Оскільки $3-1=5-3=7-5=...=(2n-1)-(2n-3)=2,$ то маємо суму членів арифметичної прогресії з $a_1 = 1,\ d = 2,\ a_n = 2n-1$ і кількість членів n.

За формулою $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ маємо:

$S_n = \frac{1+2n-1}{2} \cdot n = \frac{2n}{2} \cdot n = n^2,$ що й треба було довести.

Геометрична прогресія

Геометрична прогресія - це числова послідовність, перший член якої відмінний від нуля, а кожний наступний, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне і те ж число, що не дорівнює нулеві.

Позначається ∺ $b_1, b_2, b_3, ..., b_n.$

Відношення будь-якого члена ∺ до свого попереднього члена називається *знаменником прогресії* $q = \frac{b_n}{b_{n-1}}.$

Характеристична властивість геометричної прогресії:

Кожний член ∺, починаючи з другого є середнім геометричним між

$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}, n \in Z.$

Формула $n-го$ члена $\div$ $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, де b_1 – перший член, q – знаменник, n – номер члена.

Формули суми n перших членів $\div$

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}, (q \neq 1). \ S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}.$$

Добуток членів $\div$, рівновіддалених від її кінців, є величина стала, тобто, $b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = ...$

Дано $\div$ $b_1 = 6, \ q = 3, \ n = 8.$ Знайти b_n і S_n.

Розв'язання:

За формулою $n-го$ члена $\div$ $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

$b_8 = 6 \cdot 3^{8-1} = 6 \cdot 3^7 = 6 \cdot 2187 = 13122.$

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}; \ S_8 = \frac{6 \cdot (3^8 - 1)}{3-1} = \frac{6 \cdot (6561 - 1)}{2} = 19680.$$

Відповідь: $b_8 = 13122; \ S_8 = 19680.$

Дано $\div$ $q = 2, n = 7, S_n = 635.$ Знайти b_1 і b_n.

Розв'язання:

$$b_7 = b_1 \cdot 2^6 = 64b_1; \ S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}; \ 65 = \frac{64 \cdot b_1 \cdot 2 - b_1}{2-1}; \ \frac{128b_1 - b_1}{1} = 635; \ 127b_1 = 635; \ b_1 = \frac{635}{127};$$

$b_1 = 5. \ b_7 = 64 \cdot 5 = 320.$

Відповідь: $5; 320.$

Дано $\div$ $b_1 + b_3 = 15, \ b_2 + b_4 = 30.$ Знайти S_{10}.

Розв'язання:

Розв'яжемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} b_1 + b_3 = 15, \\ b_2 + b_4 = 30. \end{cases}$$

Виразимо члени $\div$, що входять до системи через b_1 і q:

$$\begin{cases} b_1 + b_1 \cdot q^2 = 15, \\ b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^3 = 30. \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 \cdot (1 + q^2) = 15, & (1) \\ b_1 \cdot q \cdot (1 + q^2) = 30. & (2) \end{cases}$$

Розділимо рівняння *(2)* на *(1)*:

$$\frac{b_1 \cdot q \cdot (1 + q^2)}{b_1 \cdot (1 + q^2)} = \frac{30}{15}; \ q = 2.$$

$b_1 \cdot (1 + 2^2) = 15, b_1 = 3.$

За формулою $S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}, \ S_{10} = \frac{3 \cdot (2^{10} - 1)}{2-1} = 3 \cdot (1024 - 1) = 3069.$

Відповідь: $3069.$

Знайти чотири числа, які утворюють геометричну прогресію, якщо перше число більше другого на 36, а третє більше четвертого на 4.

Розв'язання:

Згідно умови задачі $b_1 - b_2 = 36,\ b_1 = b_2 + 36 = b_1 \cdot q + 36;\ b_3 - b_4 = 4,\ b_3 = b_4 + 4;$ $b_1 \cdot q^2 = b_1 \cdot q^3 + 4;\ b_1 \cdot q^2 - b_1 \cdot q^3 = 4;\ b_1 \cdot q \cdot (1-q) = 4.$

Розглянемо таку систему рівнянь: $\begin{cases} b_1(1-q) = 36, & (1) \\ b_1 q^2 (1-q) = 4. & (2) \end{cases}$

Розділимо *(2)* на *(1)*:

$\dfrac{b_1 q^2 (1-q)}{b_1(1-q)} = \dfrac{4}{36};\ q^2 = \dfrac{1}{9};\ q_1 = -\dfrac{1}{3};\ q_2 = \dfrac{1}{3}.$

Якщо $q_1 = -\dfrac{1}{3}$, то $b_1 = \dfrac{36}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \dfrac{36}{1\frac{1}{3}} = \dfrac{36}{\frac{4}{3}} = \dfrac{36}{1} \cdot \dfrac{3}{4} = 27.$

Тоді $b_2 = 27 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) = -9;\ b_3 = -9 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) = 3;\ b_4 = 3 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) = -1.$

Якщо $q = \dfrac{1}{3}$, то $b_1 = \dfrac{36}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{36}{\frac{2}{3}} = 24,$ тоді $b_2 = 54 \cdot \dfrac{1}{3} = 18,\ b_3 = 18 \cdot \dfrac{1}{3} = 6;\ b_4 = 6 \cdot \dfrac{1}{3} = 2.$

Відповідь: $27; -9; 3; -1;\ \ 54; 18; 6; 2.$

Нескінченно спадна геометрична прогресія

Геометрична прогресія називається нескінченно спадною, якщо її знаменник $|q| < 1$.

Сума її членів $S = \dfrac{b_1}{1-q}$, де b_1 – перший член :.

Деякі застосування *Н.С.Г.П*:

Дано : $2; -\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{9}; \ldots$ Знайти S.

Розв'язання:

Знайдемо знаменник : $q = \dfrac{-\frac{3}{2}}{2} = -\dfrac{1}{3}.$

За формулою $S = \dfrac{b_1}{1-q}$ обчислимо $S = \dfrac{2}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \dfrac{2}{1\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5.$

Відповідь: $1{,}5$.

Перетворити десятковий періодичний дріб $0{,}46(5)$ у звичайний.

Розв'язання:

Цей дріб можна подати у вигляді:

$$0{,}46(5)=0{,}46555...=0{,}46+0{,}005+0{,}0005+0{,}00005+...=\frac{46}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{5}{100000}+...=$$

$$=\frac{46}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{5}{100000}+...=\frac{46}{100}+\left(\underbrace{\frac{5}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{5}{100000}+...}_{сума\ Н.С.Г.П.}\right)=\frac{5}{10000}:\frac{5}{1000}=\frac{1}{10}.$$

За формулою $S=\dfrac{b_1}{1-q}$ маємо:

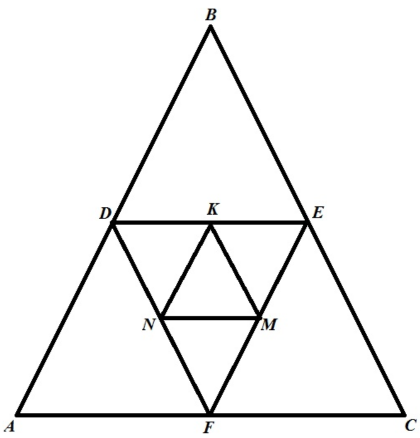
$$S=\frac{\frac{5}{1000}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{5}{1000}\cdot\frac{10}{9}=\frac{5}{900};$$

$$=\frac{46}{100}+\frac{5}{900}=\frac{414+5}{900}=\frac{419}{900}.$$

Відповідь: $\dfrac{419}{900}$.

Задача. В рівносторонній трикутник зі стороною b вписано новий трикутник так, що його вершинами є середини сторін даного трикутника; в цей трикутник таким самим способом вписано новий трикутник і т.д. Довести, що послідовність площ утворених трикутників являє собою *Н.С.Г.П* та знайти суму цих площ.

Розв'язання:



$$S_1=S_{\Delta ABC}=\frac{b^2\sqrt{3}}{4};\quad S_2=S_{\Delta DEF}=\frac{DE^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{b^2\sqrt{3}}{16};$$

$$S_3=S_{\Delta KMN}=\frac{MN^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\left(\frac{b}{4}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{b^2\sqrt{3}}{16\cdot 4}=\frac{b^2\sqrt{3}}{64}\ \text{і т.д.}$$

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{b^2\sqrt{3}}{16}:\frac{b^2\sqrt{3}}{4}=\frac{b^2\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{4}{b^2\sqrt{3}}=\frac{1}{4};\quad \frac{S_3}{S_2}=\frac{b^2\sqrt{3}}{64}:\frac{b^2\sqrt{3}}{16}=\frac{1}{4}.$$

Оскільки $\dfrac{1}{4}$ – стала величина і менша 1, то $S_1, S_2, S_3,... - Н.С.Г.П$

Сума площ трикутників $S=\dfrac{S_1}{1-q}=\dfrac{\frac{b^2\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{\frac{b^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{b^2\sqrt{3}}{3}.$

Відповідь: $\dfrac{b^2\sqrt{3}}{3}.$

Арифметична і геометрична прогресії

Розв'язування задач, в яких одночасно фігурують арифметична і геометрична прогресії, становлять певні труднощі. Запобігти труднощам можна, якщо здійснити таку пропедевтичну роботу:

1) при якій умові числа $a_1, a_2,$ і a_3 утворюють арифметичну прогресію?

Відповідь: три числа утворюють $\div$ тоді, коли $a_2-a_1=a_3-a_2$.

2) при якій умові числа $b_1, b_2,$ і b_3 утворюють геометричну прогресію?

Відповідь: три числа утворюють $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ тоді, коли $\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{b_3}{b_2}$.

3) якщо в задачі йде мова про $\div$ і $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$, то позначення невідомих необхідно вводити тільки через члени однієї з них.

Задача. Три числа, що в суму дають 21, становлять арифметичну прогресію. Якщо до цих чисел додати відповідно 2, 3 і 9, то дістанемо геометричну прогресію. Знайти ці числа.

Розв'язання

Першу умову задачі запишемо так:

$\div a_1, a_2, a_3 \quad d-$ її різниця.

$\div a_1; a_1+d,\ a_1+2d.\ \ a_1+a_1+d+a_1+2d=21,\ \ 3a_1+3d=21\,|:3\ \ a_1+d=7,\ \ a_1=7-d\ (1)$

Якщо до цих трьох членів $\div$ відповідно додати числа 2, 3 і 9, то дістанемо числа:

$a_1+2;\ \ a_1+d+3;\ \ +a_1+2d+9,$ які утворюють геометричну прогресію. На основі характеристичної властивості $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ маємо:

$(a_1+d+3)^2=(a_1+2)\cdot(a_1+2d+9).$ Використовуючи рівність *(1)*, замінимо a_1:

$(7-d+d+3)^2=(7-d+2)\cdot(7-d+2d+9);$

$10^2=(9-d)\cdot(16+d);\ \ 100=144+9d-16d-d^2;$

$+d^2+7d-144+100=0;\ \ d^2+7d-44=0.$

За теоремою Вієта $d_1=-11;\ \ d_2=4.$

$a_1=7-d;\ \ a_1=7-(-11)=18;\ \ a_2=18+(-11)=7;\ \ a_3=7-11=-4.$

$a_1+a_2+a_3=18+7-4=21.$

Додаючи до цих чисел 2; 3; 9 маємо отримати $18+2=20;\ \ 7+3=10;\ \ 9-4=5.$

Вони є членами геометричної прогресії, бо $10^2=20\cdot 5.$

Якщо $d=4,$ то $a_1=7-4=3;\ \ a_2=3+4=7;\ \ a_3=7+4=11;\ \ 3+7+11=21.$

$b_1=3+2=5;\ \ b_2=7+3=10;\ \ b_3=11+9=20.$

Характеристична властивість $10^2 = 20 \cdot 5.$
Відповідь: $18; 7; -4$ або $3; 7; 11.$

Корисною є і така порада: якщо в одній прогресії задані послідовні члени, а в другій - не послідовні, то невідомі треба позначати через члени другої прогресії.

Задача. Три числа, сума яких дорівнює 114,послідовні члени геометричної прогресії або 1-ий, 4-ий і 25-ий члени арифметичної прогресії. Знайти ці числа.

Розв'язання:

Нехай a_1 і $d -$ перший член та різниця арифметичної прогресії, тоді
$a_4 = a_1 + 3d;\ \ a_{25} = a_1 + 24d.$

Згідно умови задачі складаємо рівняння:
$a_1 + a_1 + 3d + a_1 + 24d = 114;\ \ 3a_1 + 27d = 114 \,\big|\!: 3\ \ a_1 + 9d = 38 \to a_1 = 38 - 9d\ (1)$

З другого боку, ці ж числа є послідовними членами геометричної прогресії, тоді
$(a_1 + 3d)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 9d).$ Використовуючи рівність *(1)*, матимемо:
$(38 - 9d + 3d)^2 = (38 - 9d) \cdot (38 - 9d + 24d);\ \ (38 - 6d)^2 = (38 - 9d) \cdot (38 + 15d);$
$1444 - 456d + 36d^2 = 1444 + 570d - 342d - 135d^2;\ \ -456d + 36d^2 - 570d + 32d + 135d^2 = 0;$
$171d^2 - 684d = 0 \,\big|\!: 171\ \ d^2 - 4d = 0;\ \ d(d - 4) = 0;$

$d = 0 -$ не задовольняє умову задачі.
$d = 4.$ Якщо $d = 4,$ то $a_1 = 38 - 9 \cdot 4 = 2$ *(див. рів. (1))*
$a_4 = 2 + 3 \cdot 4 = 14;\ \ a_{25} = 2 + 24 \cdot 4 = 98.\ \ 2 + 14 + 98 = 114.$

Відповідь: $2; 14; 98.$

Задача. Чотири числа становлять арифметичну прогресію. Якщо від них відняти відповідно числа *2; 6; 7; 2*, то дістанемо числа, які утворюють геометричну прогресію. Знайти ці числа.

Розв'язання:

Позначимо невідомі числа як члени геометричної прогресії: $b_1 -$ перший член, $q -$ знаменник – тоді $b_1 \cdot q -$ другий член, $b_1 \cdot q^2 -$ третій член, $b_1 \cdot q^3 -$ четвертий член. Додавши до них відповідно числа *2; 6; 7; 2,* дістанемо члени арифметичної прогресії:

$b_1 + 2;\ \ b_1 q + 6;\ \ b_1 q^2 + 7;\ \ b_1 q^3 + 2.$

Використовуючи двічі характеристичну властивість арифметичної прогресії, дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} b_1 q + 6 = \dfrac{b_1 q + 7 + b_1 + 2}{2}, \\[2ex] b_1 q^2 + 7 = \dfrac{b_1 q^3 + 2 + b_1 q + 6}{2} \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 2 \\[4ex] \cdot 2 \end{vmatrix} \to \begin{cases} 2 \cdot (b_1 q + 6) = b_1 q^2 + 7 + b_1 + 2, \\ 2 \cdot (b_1 q^2 + 7) = b_1 q^3 + 2 + b_1 q + 6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot b_1 q + 12 - b_1 q^2 - 9 - b_1 = 0, \\ 2 \cdot b_1 q + 14 - b_1 q^3 - 8 - b_1 q = 0. \end{cases} \to \begin{cases} 2 \cdot b_1 q - b_1 q^2 - b_1 + 3 = 0, \\ 2 \cdot b_1 q^2 - b_1 q^3 - b_1 q + 6 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cdot b_1q - b_1q^2 - b_1 = -3, \\ 2\cdot b_1q^2 - b_1q^3 - b_1q = -6. \end{cases} \to \begin{cases} 2\cdot b_1q - b_1q^2 - b_1 = -3, & (1) \\ q\cdot\left(2b_1q - b_1q^2 - b_1\right) = -6. & (2) \end{cases}$$

Розділимо *(2)* на *(1)*:

$$\frac{q\cdot\left(2b_1q - b_1q^2 - b_1\right)}{2b_1q - b_1q^2 - b_1} = \frac{-6}{-3},\ \ q = 2.$$

Підставимо значення q в рівняння *(1)*:

$$2\cdot b_1\cdot 2 - b_1\cdot 2^2 - b_1 = -3;\ \ 4b_1 - 4b_1 - b_1 = -3,\ \ b_1 = 3.$$

$$b_2 = 3\cdot 2 = 6,\ \ b_3 = 3\cdot 2^2 = 12,\ \ b_4 = 3\cdot 2^3 = 24.$$

Відповідь: $3; 6; 12; 24.$

Задача. Знайти арифметичну і геометричну прогресії, коли відомо, що перший, третій і одинадцятий члени арифметичної прогресії в два рази більші від першого, третього і п'ятого членів геометричної прогресії, а сума перших п'яти членів арифметичної прогресії дорівнює *40*.

Розв'язання:

Нехай a_1 і d – перший член і різниця $\div$,

b_1 і q – перший член і знаменник ∺.

Згідно умови задачі $a_1 = 2\cdot b_1,\ \ a_2 = 2\cdot b_3,\ \ a_{11} = 2\cdot b_5,\ \ S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2}\cdot 5 = 40.$

Можна утворити таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_1 = 2b_1, \\ a_1 + 2d = 2b_1\cdot q^2, \\ a_1 + 10d = 2b_1\cdot q^4, \\ \frac{a_1 + a_5}{2} = \frac{40}{5}. \end{cases}$$

Адже $a_3 = a_1 + 2d,\ \ b_3 = b_1\cdot q^2,\ \ a_{11} = a_1 + 10d,\ \ b_5 = b_1\cdot q^4.$

Так як a_1 і a_5 – члени, рівновіддалені від кінців арифметичної прогресії, то

$$\frac{a_1 + a_5}{2} = \frac{a_2 + a_4}{2} = 8 = a_3 = a_1 + 2d.$$

$$\begin{cases} a_1 = 2b_1, & (1) \\ a_1 + 2d = 2b_1\cdot q^2, & (2) \\ a_1 + 10d = 2b_1\cdot q^4, & (3) \\ a_1 + 2d = 8. & (4) \end{cases}$$

Підставляючи *(1)* в *(2), (3), (4)* дістанемо систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} 2b_1 + 2d = 2b_1\cdot q^2, \\ 2b_1 + 10d = 2b_1\cdot q^4, \\ 2b_1 + 2d = 8. \end{cases} \left|\begin{matrix} :2 \\ :2 \\ :2 \end{matrix}\right. \begin{cases} b_1 + d = b_1q^2, & (5) \\ b_1 + 5d = b_1q^4, & (6) \\ b_1 + d = 4. & (7) \end{cases}$$

З рівняння *(7)* маємо $d = 4 - b_1\ \ (8).$

Підставляючи *(7)* в *(5)* і *(6)* з урахування *(8)*, дістанемо:

$$\begin{cases} 4 = b_1 \cdot q^2, \\ 4 + 4 \cdot (4 - b_1) = b_1 \cdot q^4 \end{cases}$$ бо $b_1 + 5d = b_1 + d + 4d.$

$$\begin{cases} 4 = b_1 \cdot q^2, \\ 4 + 16 - 4b_1 = b_1 \cdot q^4 \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = b_1 \cdot q, & (9) \\ 20 - 4b_1 = b_1 \cdot q^4 & (10) \end{cases}$$

Підставимо *(9)* в *(10)*:

$20 - 4b_1 = b_1 \cdot q^2 \cdot q^2 = 4q^2.$ З рівняння *(9)* маємо:

$\cdot q^2 = \dfrac{4}{b_1}.$ Тоді $20 - 4b_1 = 4 \cdot \dfrac{4}{b_1};$ $20 - 4b_1 = \dfrac{16}{b_1};$ $b_1 \neq 0.$

$20b_1 - 4b_1^2 = 16;$ $20b_1 - 4b_1^2 - 16 = 0 \,|: (-4)$ $b^2 - 5b_1 + 4 = 0;$

За теоремою Вієта $b_1 = 1;$ $b_2 = 4.$

Якщо $b = 1,$ то на основі рівняння *(8)* $d = 4 - 1 = 3$ і $a_1 = 2b_1 = 2 \cdot 1 = 2;$ $a_2 = 2 + 3 = 5;$ $a_3 = 5 + 3 = 8.$ $\div$

Якщо $b = 4,$ то $a_1 = 2 \cdot 4 = 8;$ $a_2 = 8 + 3 = 11;$ $a_3 = 11 + 3 = 14.$ $\div$

Знайдемо знаменник q з рівняння *(5)*:

Якщо $b_1 = 1,$ то $1 + 3 = 1 \cdot q^2;$ $q_1 = -2;$ $q_2 = 2.$

$b_2 = 1 \cdot (-2) = -2;$ $b_3 = (-2) \cdot (-2) = 4;$ $b_4 = 4 \cdot (-2) = -8.$

$b_2 = 1 \cdot 2 = 2;$ $b_3 = 2 \cdot 2 = 4;$ $b_4 = 4 \cdot 2 = 8.$

Якщо $b_1 = 4,$ то $4 + 3 = 4 \cdot q^2;$ $q^2 = \dfrac{7}{4};$ $q_1 = -\dfrac{\sqrt{7}}{2};$ $q_2 = \dfrac{\sqrt{7}}{2}.$

$$b_2 = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right) = -2\sqrt{7};\ b_3 = -2\sqrt{7} \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right) = 7;\ b_4 = 7 \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right) = -\frac{7\sqrt{7}}{2}.$$

$$b_2 = 4 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = 2\sqrt{7};\ b_3 = 2\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = 7;\ b_4 = 7 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{7\sqrt{7}}{2}.$$

Відповідь: $2; 5; 8;$ $-2; 4; 8;$ $4; -2\sqrt{7}; 7; -\dfrac{7\sqrt{7}}{2};$ $4; 2\sqrt{7}; 7; \dfrac{7\sqrt{7}}{2}.$

Знайти чотири числа, з яких перших три утворюють арифметичну, а три останні - геометричну прогресію. Сума двох крайніх чисел дорівнює 37, а сума двох середніх - 36.

Розв'язання:

Позначимо $x -$ перше число, $y -$ друге число. Тоді $36 - y -$ третє число.

$x; y; 36 - y -$ арифметична прогресія.

За характеристичною властивістю її маємо:

$2y = x + 36 - y \,(1)$

По умові задачі складаємо друге рівняння:

$y; 36 - y; 37 - x -$ геометрична прогресія.

$(36 - y)^2 = y \cdot (37 - x)\,(2)$

З рівнянь *(1)* і *(2)* утворюємо систему:

$$\begin{cases} 2y = x + 36 - y, \\ (36-y)^2 = y\cdot(37-x) \end{cases} \begin{cases} 3y = x + 36, \\ (36-y)^2 = y\cdot(37-x) \end{cases} \begin{cases} x = 3y - 36, \\ (36-y)^2 = y\cdot(37-3y+36) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y - 36, \\ 1296 - 72y + y^2 = 73y - 3y^2 \end{cases}$$

$4y^2 - 145y + 1296 = 0;\ D = 21025 - 20736 = 289 = 17^2.$

$y_1 = \dfrac{145-17}{16} = \dfrac{128}{16} = 8.\ \ y_2 = \dfrac{145+17}{16} = \dfrac{162}{16} = 20{,}25.$

$x_1 = 3\cdot 16 - 36 = 12;\ \ x_2 = 3\cdot 20{,}25 = 60{,}75 - 36 = 24{,}75.$

$12; 16; 36-16; 37-12;\ \ 24{,}75; 20{,}25; 36-20{,}25; 15{,}75; 12{,}25; 37-24{,}75;$

$12; 16; 20; 25;\ \ 24{,}75; 20{,}25; 15{,}75; 12{,}25.$

Відповідь: $12; 16; 20; 25$ або $24{,}75; 20{,}25; 15{,}75; 12{,}25.$

Задача. Знайти суму перших n членів арифметичної прогресії, якщо $(m+1)$ член її дорівнює $2m+1$.

Розв'язання:

Знайдемо перший та другий член прогресії:

$a_{m+1} = 2m + 1.$

$a_1 = a_{0+1} = 2\cdot 0 + 1 = 1;\ \ a_2 = a_{1+1} = 2\cdot 1 + 1 = 3,$ тоді $d = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2.$

$S_n = \dfrac{2a_1 + d\cdot(n-1)}{2}\cdot n;\ \ S_n = \dfrac{2\cdot 1 + 2\cdot(n-1)}{2}\cdot n = \dfrac{2 + 2n - 2}{2} = n^2.$

Відповідь: n^2.

Довести, що коли $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}, \dfrac{1}{b+a}$ утворюють арифметичну прогресію, то числа a^2, b^2, c^2 також становлять арифметичну прогресію.

Розв'язання:

За властивістю членів арифметичної прогресії:

$\dfrac{1}{c+a} - \dfrac{1}{b+c} = \dfrac{1}{b+a} - \dfrac{1}{c+a}$. Зведемо дроби в лівій та правій частинах рівняння до спільних знаменників:

$$\frac{b+c-a-c}{(c+a)\cdot(b+c)} = \frac{c+a-b-a}{(b+a)\cdot(c+a)};\ \ \frac{b-a}{(c+a)\cdot(b+c)} = \frac{c-b}{(c+a)\cdot(b+c)};$$

$$\frac{b-a}{(c+a)\cdot(b+c)} = \frac{c-b}{(b+a)\cdot(c+a)}\ \Big|\cdot(b+a)\cdot(c+a)$$

$(b-a)\cdot(b+a) = (c-b)\cdot(c+b);\ \ b^2 - a^2 = c^2 - b^2;\ \ 2b^2 = c^2 + a^2;\ \ b^2 = \dfrac{c^2 + a^2}{2}$ – це характеристична властивість арифметичної прогресії, тобто числа a^2, b^2, c^2 утворюють арифметичну прогресію.

Завдання для самостійної роботи:

Дана ÷ Відомо значення трьох величин. Знайти дві інші.

№ п/п	a_1	d	n	a_n	S_n	Відповіді:	
1	10	4	11			$a_n = 50$	$S_n = 330$
2	10	4		50		$n = 11$	$S_n = 330$
3	10	4			330	$n = 11$	$a_n = 50$
4	10		11		330	$d = 4$	$a_n = 50$
5		4		50	330	$a_1 = 10; -6$	$n = 11; 15$
6	110	-10	11			$a_n = 10$	$S_n = 660$
7	4	$-\frac{1}{4}$	13			$a_n = 1$	$S_n = 32{,}5$
8	5		26	105		$d = 4$	$S_n = 1430$
9	$\frac{3}{4}$		26	$3\frac{7}{18}$		$d = \frac{1}{20}$	$S_n = 56\frac{7}{9}$
10		3	12		210	$a_1 = 1$	$a_n = 34$
11		2	15	-10		$a_1 = -38$	$S_n = -360$
12	0	0,5		5		$n = 11$	$S_n = 27{,}5$
13	-9	$\frac{1}{2}$			-75	$n = 25$	$a_n = 3$
14	-28		9		0	$d = 7$	$a_n = 28$
15	0,2			5,2	137,7	$d = 0{,}1$	$n = 51$
16			30	$15\frac{3}{4}$	$146\frac{1}{4}$	$a_1 = -6$	$d = \frac{3}{4}$
17		0,3		50,3	2551,3	$a_1 = 32$	$n = 62$

÷ $a_1 + a_2 + a_3 = 9;\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 16,\ S_n = 100.\ n - ?$ Відповідь: 10.

÷ $a_3 = 9;\ a_7 - a_2 = 20;\ S_n = 91.\ n - ?$ Відповідь: 7.

÷ зростаюча, $a_1 + a_2 + a_3 = 27;\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 275;\ a_1 = ?\ d = ?$

Відповідь: $a_1 = 5, d = 4.$

÷ $a_3 + a_5 = 14;\ S_{12} = 129;\ S_n = 195.\ n = ?$ Відповідь: 15.

÷ зростаюча, $a_1 + a_7 = 4;\ a_3^2 + a_7^2 = 122;\ a_1 = ?\ d = ?$ Відповідь: $a_1 = -7, d = 3.$

÷ зростаюча, $a_5 : a_3 = 4;\ a_2 \cdot a_6 = (-11);\ a_1 = ?\ d = ?$ Відповідь: $a_1 = -4, d = 3.$

Знайти перший член і різницю ÷:

$$\begin{cases} a_2 + a_8 = 10, \\ a_3 + a_{14} = 31. \end{cases}$$ Відповідь: $a_1 = -7; d = 3.$

$$\begin{cases} S_5 - S_2 - a_5 = 0{,}1, \\ S_4 + a_7 = 0{,}1. \end{cases}$$ Відповідь: $a_1 = 1{,}05; d = 0{,}8.$

$\begin{cases} S_4 = 9, \\ S_6 = 22\frac{1}{2}. \end{cases}$ Відповідь: $a_1 = 0,25; d = 1,5.$

$\begin{cases} a_3 + a_5 + a_8 = 18, \\ a_4 + a_2 = -2. \end{cases}$ Відповідь: $a_1 = 1\frac{2}{3}; d = -1\frac{1}{3}.$

$\div\div\, 10, 20, 40, \ldots\ S_{10} - ?$ Відповідь: $10230.$

$-4, 16, -64, \ldots\ S_7 - ?$ Відповідь: $-13108.$

$3, -1, \frac{1}{3}, \ldots\ S_8 - ?$ Відповідь: $2\frac{182}{729}.$

$b_1 = 5,\ q = -\frac{1}{5},\ n = 6.$ Знайти b_n і S_n. Відповідь: $-\frac{1}{625};\ 4\frac{104}{625}.$

$b_n = 128,\ q = 2,\ n = 7.$ Знайти b_1 і S_n. Відповідь: $2;\ 254.$

$b_1 = 3,\ q = 2,\ b_n = 96.$ Знайти n і S_n. Відповідь: $6;\ 189.$

$b_1 = 81,\ b_n = -10\frac{2}{3},\ n = 6.$ Знайти q і S_n. Відповідь: $-\frac{2}{3};\ 44\frac{1}{3}.$

Між числами 1 і 16 вставити три таких числа, щоб вони разом з даними числами утворили геометричну прогресію.
Відповідь: 1; 2; 4; 8; 16.

Н.С.Г.П: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \ldots$ Знайти суму. Відповідь: 2.

$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \ldots\ S - ?.$ Відповідь: $0,75.$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \ldots\ S - ?.$ Відповідь: $\frac{2}{3}.$

В круг радіусом a вписано квадрат. В квадрат вписано круг; в круг - квадрат і т.д.
Знайти суму площ всіх кругів і суму площ всіх квадратів.
Відповідь: $2\pi a^2;\ 4a^2.$

Задача. Написати три перші члени арифметичної прогресії, в якій сума довільного числа членів задана формулою $S_n = 7n^2 - 5n.$
Відповідь: 2; 16; 30.

Задача. Сума трьох чисел, які утворюють арифметичну прогресію дорівнює 15. Якщо до них додати відповідно числа 1, 4 і 19, то дістанемо три числа, які утворюють геометричну прогресію. Знайти ці числа.
Відповідь: 2; 5; 8 і 26; 5; $-16.$

Задача. Сума трьох чисел, які є послідовними членами арифметичної прогресії, дорівнює 21. Якщо друге число зменшити на одиницю, а третє збільшити на одиницю, то утвориться три послідовних члени геометричної прогресії. Знайти ці числа.
Відповідь: 3; 7; 11 і 12; 7; 2.

При яких значеннях α числа $2 \cdot \cos \frac{\pi}{6}$, $4 \cdot \sin \alpha$, $6 \cdot \sin(\pi - \alpha)$ є послідовними членами арифметичної прогресії?

Відповідь: $\alpha = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z.$