Розділ 20
Найбільші та найменші значення тригонометричних функцій

Задачі на знаходження найбільшого та найменшого значень будь-яких функцій, в тому числі і тригонометричних, розв'язуються здебільшого засобами диференційного числення. Але розв'язування таких задач елементарними методами має свої переваги:

1) сприяє більш глибокому розвитку логічного мислення;

2) дає можливість досягти успіху швидше і простіше, ніж за допомогою похідної.

В процесі розв'язування такого типу завдань корисно зводити весь тригонометричний вираз до однієї функції, а потім шукати найбільші та найменші значення її.

Знайти найбільше значення функції $y = \sin x + \cos x$ на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання:

$$y = \sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

$$= 2\sin\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} \cdot \frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Формули зведення.
Формули перетворення суми тригонометричних функцій у добуток.

З умови $0 < x < \frac{\pi}{2}$ оцінимо вираз $x - \frac{\pi}{4}$:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Big| -\frac{\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}; \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}.$$

Значення функцій $y = \sqrt{2} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ буде найбільшим тоді, коли $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, а ця рівність має місце при $x - \frac{\pi}{4} = 0$, тобто при $x = \frac{\pi}{4}$.

Відповідь: $Y_{найб} = \sqrt{2}$ при $x = \frac{\pi}{4}$.

Знайти найменше значення функції $Y = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$ на $[0; \pi]$.

Розв'язання:

Спростимо даний вираз, звівши його до однієї функції:

$$y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)=2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin 2x-\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos 2x\right)=$$

$$=2\cdot\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right).$$

Виходячи з умови $0\le x\le\pi,$ оцінимо вираз $2x-\frac{\pi}{6}$:

$0\le x\le\pi\,\Big|\cdot 2,$ $0\le 2x\le 2\pi\,\Big|-\frac{\pi}{6};$ $-\frac{\pi}{6}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le 1\frac{5}{6}\pi;$ $Y=2\cdot\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ набуває найменшого значення тоді, коли $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-1,$ тобто $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2};$

$$2x=\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{9\pi+\pi}{6}=\frac{10\pi}{6}=1\frac{4}{6}\pi=1\frac{2}{3}\pi;\quad x=1\frac{2}{3}\pi:2=\frac{5\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5\pi}{6}.$$

Відповідь: $y_{найм}=-2$ при $y=\frac{5\pi}{6}.$

Знайти найбільше значення функції $Y=\sin x+2\cos x$ на $[0;\pi].$

Розв'язання:

$Y=\sin x+2\cos x=1\cdot\sin x+2\cos x$

$1^2+2^2=5,$

$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}.$

Винесемо $\sqrt{5}$ за дужки:

Позначимо $\frac{1}{\sqrt{5}}-\cos\varphi,\frac{2}{\sqrt{5}}=\sin\varphi.$

$$=\sqrt{5}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x+\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x\right)=\sqrt{5}\cdot(\cos\varphi\cdot\sin x+\sin\varphi\cdot\cos x)=\sqrt{5}\cdot\sin(x+\varphi).$$

Оскільки $\frac{1}{\sqrt{5}}>0,$ $\frac{2}{\sqrt{5}}>0,$ то $\varphi\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right).$

$Y=\sqrt{5}\cdot\sin(x+\varphi)$ досягне найбільшого значення при $\sin(x+\varphi)=1,$ тобто при $x+\varphi=\frac{\pi}{2},$ $x=\frac{\pi}{2}-\varphi=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}=0{,}46.$

Відповідь: $y_{найб}=\sqrt{5}$ при $x=0{,}46.$

Знайти найбільше значення функції:

$Y=\sin x\cdot\cos^3 x-\sin^3 x\cdot\cos x.$

Розв'язання:

$$Y=\sin x\cdot\cos^3 x-\sin^3 x\cdot\cos x=\sin x\cdot\cos x\cdot\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot(\cos 2x)=\frac{1}{2}\sin 2x\cdot\cos 2x=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x=\frac{1}{4}\cdot\sin 4x.$$

Функція $Y=\frac{1}{4}\cdot\sin 4x$ набуває найбільшого значення при $\sin 4x=1.$

Відповідь: $y_{найб}=\frac{1}{4}.$

Знайти найбільше значення функції $Y = 9 \cdot 3^x \cdot 3^{-x^2}$.

Розв'язання:

$Y = 9 \cdot 3^x \cdot 3^{-x^2} = 3^2 \cdot 3^x \cdot 3^{-x^2} = 3^{2+x-x^2}$.

Так як $3 > 1$, то показникова функція зростає.

Найбільшого значення вона досягне тоді, коли показник $-x^2 + x + 2$ матиме найбільше значення.

Позначимо $\varphi(x) = -x^2 + x + 2$. Графіком функції $\varphi(x)$ є парабола, напрямлена вітками вниз. Знайдемо координати її вершини $(m; n)$:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}; \;\; n = \varphi(m) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{4}.$$

$$y_{найб} = 3^{2\frac{1}{4}} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{4}} = 9 \cdot \sqrt[4]{3}.$$

Відповідь: $9\sqrt[4]{3}$.

Знайти найменше значення функції $Y = \log_{(x^2-6x+36)} \frac{1}{3}$.

Розв'язання:

Перейдемо до основи логарифма $\frac{1}{3}$:

$$Y = \log_{(x^2-6x+36)} \frac{1}{3} = \frac{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}}{\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-6x+36\right)} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-6x+36\right)}.$$

Найменше значення функції $y^{\frac{1}{3}}$ спостерігається тоді, коли вираз $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-6x+36\right)$ досягає найбільшого свого значення. Позначимо $\varphi(x) = \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - 6x + 36\right)$.

Оскільки $0 < \frac{1}{3} < 1$, то логарифмічна функція $\varphi(x)$ спадає. Вона досягає свого найбільшого значення при найменшому значенні аргументу. Знайдемо координати вершини параболи $x^2 - 6x + 36 = f(x)$:

$$m = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3; \;\; n = f(m) = 9 - 18 + 36 = 27.$$

$$y_{найм} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} 27} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} 3^3} = \frac{1}{3\log_{\frac{1}{3}} 3} = \frac{1}{3\log_{\frac{1}{3}} 3^{-1}} = \frac{1}{-3 \cdot 1} = -\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{3}$.

Знайти найбільше значення функції $Y = \sin 2x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$.

Розв'язання:

Перетворимо добуток тригонометричних функцій в суму:

$$Y=\sin 2x\cdot\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\left(2x-2x+\frac{\pi}{5}\right)-\cos\left(2x+2x-\frac{\pi}{5}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{5}-\cos\left(4x-\frac{\pi}{5}\right)\right).$$

Цей вираз досягне найбільшого значення тоді, коли $\cos\left(4x-\frac{\pi}{5}\right)$ досягне свого найменшого значення, тобто, $\cos\left(4x-\frac{\pi}{5}\right)<-1,$

$$y_{найб}=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{5}-(-1)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{5}+1\right).$$

Перетворимо цей вираз:

$$y_{найб}=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{5}+1\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{10}\right)+\sin^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\pi}{10}-\sin^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{\pi}{10}+\sin^2\frac{\pi}{10}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cos^2\frac{\pi}{100}=\cos^2\frac{\pi}{10}\approx 0{,}905.$$

Відповідь: $0{,}905$.

Знайти найбільше значення функції $Y=\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$ на $(0;\pi)$.

Розв'язання:

Перетворимо добуток тригонометричних функцій в суму:

$$Y=\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x+\frac{\pi}{6}-2x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x-\frac{\pi}{6}+2x\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{6}+4x\right)\right)=\frac{1}{2}\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{6}+4x\right)\right).$$

Функція $y=\frac{1}{2}\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{6}+4x\right)\right)$ досягає найбільшого значення тоді, коли $\sin\left(\frac{\pi}{6}+4x\right)=1,$ тобто, $\frac{\pi}{6}+4x=\frac{\pi}{2}.$ З умови $0\le x\le\pi$ оцінимо значення $4x+\frac{\pi}{6}$:

$$0\le x\le\pi\ \Big|\cdot 4$$

$$0\le 4x\le 4\pi\ \Big|+\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{6}\le 4x+\frac{\pi}{6}\le 4\frac{1}{6}\pi.$$

На $\left[\frac{\pi}{6};\frac{25}{6}\pi\right]$ при $\frac{\pi}{2}$ та $\frac{\pi}{2}+2\pi=\frac{5\pi}{2}.$

Синус досягає найбільшого значення,

якщо $4x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2};\ 4x=\frac{\pi}{3};\ x=\frac{\pi}{12};$

якщо $4x+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{2};\ 4x=\frac{7\pi}{3};\ x=\frac{7\pi}{12}.$

Таким чином $y_{найб}=\frac{1}{2}(1+1)=1$ при $x=\frac{\pi}{12}$ та $x=\frac{7\pi}{12}.$

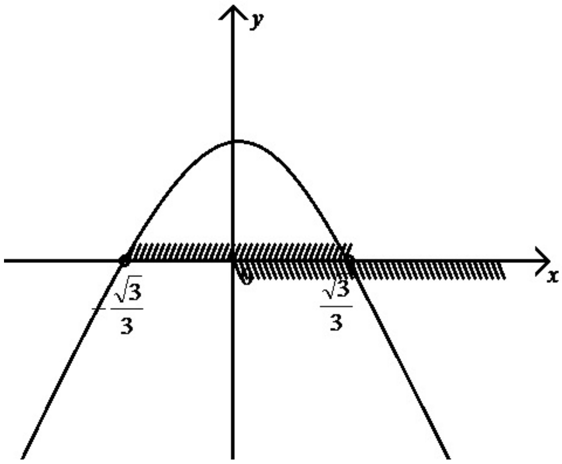
Відповідь: 1.

Знайти найбільше значення функції $Y=x\cdot\sqrt{1-3x^2}$.

Розв'язання:

Знайдемо область визначення функції $Y = x \cdot \sqrt{1-3x^2}$:

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ 1-3x^2 \ge 0 \end{cases} \begin{cases} x \ge 0, \\ 3\left(\frac{1}{3}-x^2\right) \ge 0 \end{cases} \begin{cases} x \ge 0, \\ \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 - x^2 \ge 0 \end{cases} \begin{cases} x \ge 0, \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}-x\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+x\right) \ge 0. \end{cases}$$



$D(y) = \left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$. В області визначення $y \ge 0$.

$Y = x \cdot \sqrt{1-3x^2} = \sqrt{x^2 \cdot (1-3x^2)} = \sqrt{x^2 - 3x^4}$.

Покладемо $x^2 = t,\ \ y = \sqrt{t-3t^2}$.

Найбільшого значення ця функція досягає в області визначення тоді, коли парабола $t^2 - 3t^2 = \varphi(f)$ досягає свого найбільшого значення. Це відбувається у вершині параболи.

$m = -\frac{1}{-3\cdot 2} = \frac{1}{6};\ \ \varphi\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} - 3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6} - 3\cdot\frac{1}{36} = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12};$

Повертаючись до заміни, одержимо:

$x^2 = \frac{1}{6}$. Враховуючи $D(y)$, беремо $x = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6};\ \ y = \sqrt{\frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{1}{4\cdot 3}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{1}{6}\sqrt{3}.$

Відповідь: $\frac{1}{6}\sqrt{3}$.

Додатне число a подати у вигляді суми двох доданків так, щоб їх добуток був найбільшим.

Розв'язання:

Нехай один доданок дорівнює x, тоді другий доданок $a - x$. Позначимо їх добуток $\varphi(x) = x\cdot(a-x) = ax - x^2 = -x^2 + ax$. Так як $-1 < 0$, то функція $\varphi(x)$ досягає свого найбільшого значення у вершині параболи $x_0 = -\frac{a}{-2} = \frac{a}{2},\ \ x_0 = \frac{a}{2}$. $\frac{a}{2}$ – один доданок, $a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ – інший доданок.

Відповідь: $\frac{a}{2}$ і $\frac{a}{2}$.

Завдання для самостійної роботи:

Знайти найбільше та найменше значення функції:

$y = 2\cos x.$ Відповідь: $2; -2.$

$y = -5\sin x.$ Відповідь: $5; -5.$

$y = 3 + 2\sin x.$ Відповідь: $5; 1.$

$y = 2\sin x - 3.$ Відповідь: $-1; -5.$

$y = 5\cos x + 1.$ Відповідь: $6; -4.$

$y = 2 + 3\sin^2 x.$ Відповідь: $5; 2.$

$y = 3 - \cos^2 x.$ Відповідь: $3; 2.$

$y = \dfrac{1}{2 + \cos x}.$ Відповідь: $1; \dfrac{1}{3}.$

$y = \dfrac{1}{3 - \sin x}.$ Відповідь: $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}.$

$y = 5\sin^2 x - 2\cos^2 x.$ Відповідь: $5; -2.$

$y = 3\sin x + 4\cos x.$ Відповідь: $5; -5.$

$y = \sin 4x - \sqrt{3}\cos 4x.$ Відповідь: $y_{найб} = 2, \ y_{найм} = -2.$

Знайти найменше значення функції:

а) $y = \sin x - \cos^2 x - 1;$ б) $y = \sin x - \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right).$

Відповідь: а) $y_{найм} = -2\dfrac{1}{4};$ б) $y_{найм} = -2\sin\dfrac{\pi}{8}.$

Знайти найбільше та найменше значення функції:

а) $y = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$ на $[-1; 1].$

Відповідь: $y_{найб} = \dfrac{4}{3}, y_{найм} = \dfrac{1}{3}.$

б) $y = x^4 + 3x^2 + 2$ на $[-2; 3].$

Відповідь: $y_{найб} = 110, y_{найм} = 2.$

в) $y = \sin^2 x + \sin x + 1.$

Відповідь: $y_{найб} = 3, y_{найм} = \dfrac{3}{4}.$

Знаходження періоду тригонометричних функцій

Період функції - це найменше значення аргументу, через яке вона повторює всі свої значення. Позначається літерою $T.$

Функції $y = \sin x$ та $y = \cos x$ мають період $T = 2\pi.$

Функції $y = tgx$ та $y = ctgx$ мають період $T = \pi.$

Якщо $T -$ період функції, то число $nT,$ де $n \in N -$ також період функції.

Поради:

1) Щоб знайти період функції $f(kx)$, треба період функції $f(x)$ розділити на K.
2) Щоб знайти період функції, яка являє собою суму функцій $f(x)$ і $g(x)$, треба знайти їх періоди T_1 і T_2, а потім визначити найменше спільне кратне цих періодів, тобто $T = НСК(T_1; T_2)$.
Знайти період функції $\varphi(x) = \sin 2x + \cos 4x.$

Розв'язання:

$\sin 2x = \sin kx, k = 2.$ Період синуса $2\pi.$

Тому період $\sin 2x$ $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi.$

Аналогічно знаходимо період $\cos 4x$:

$T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$ Знаходимо період функції $\varphi(x)$:

$T = НСК\left(\pi; \frac{\pi}{2}\right) = \pi.$

Відповідь: $\pi.$

$f(x) = 3\sin 4x + 6\sin x + \sin(x - \pi) + 5\sin(x + \pi).$

Розв'язання:

Використовуючи непарність синуса та формули зведення, спростимо дану функцію

$f(x) = 3\sin 4x + 6\sin x - \sin(\pi - x) + 5\sin(\pi + x) = 3\sin 4x + 6\sin x - \sin x - 5\sin x = 3\sin 4x.$

Число *3* не впливає на період $K = 4.$ $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}.$

$Y = \sin 2x + tg\frac{x}{2}.$

Розв'язання:

$T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi.$ $T_2 = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi.$ $T = НСК(\pi; 2\pi) = 2\pi.$

Відповідь: $2\pi.$

$\varphi(x) = tg\frac{x}{5} + \cos\frac{x}{3}.$

Розв'язання:

$T_1 = \frac{\pi}{\frac{1}{5}} = 5\pi,$ $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi.$ $T = НСК(5\pi; 6\pi) = 30\pi.$

Відповідь: $30\pi.$

$Y = \sin\frac{3x}{4} + 5\cos\frac{2x}{3}.$

Розв'язання:

$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{3},$ $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi.$ $T = НСК\left(\frac{8\pi}{3}; 3\pi\right) = 24\pi.$

Відповідь: $24\pi.$

$Y=\cos^2 x.$

Розв'язання:

$$y=\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.\ T=\frac{2\pi}{2}\pi.$$

Відповідь: $\pi.$

$Y=\sin\frac{\pi x}{3}+\sin\frac{\pi x}{2}.$

Розв'язання:

$$T_1=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{1}\cdot\frac{3}{\pi}=6;\quad T_2=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4.\ \ T=НСК(6;4)=12.$$

Відповідь: 12.

$Y=\dfrac{1}{tg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right)}.$

Розв'язання:

$$Y=\frac{1}{tg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\dfrac{tg\frac{x}{\sqrt{2}}-tg\frac{\pi}{4}}{1+\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot tg\frac{\pi}{4}}}=\frac{1+tg\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot 1}{tg\frac{x}{\sqrt{2}}-1};\ \ T=\frac{\pi}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\pi.$$

Відповідь: $\pi\sqrt{2}.$

$f(t)=\cos^4 t+\sin t.$

Розв'язання:

$$\cos^4 t=\left(\cos^2 t\right)^2=\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2=\frac{1+2\cos 2t+\cos^2 2t}{4}=\frac{1+2\cos 2t+\dfrac{1+\cos^4 t}{2}}{4}=$$

$$=\frac{2+4\cos 2t+1+\cos^4 t}{4}.$$

$$f(t)=\frac{3+4\cos 2t+\cos 4t}{4}+\sin t.$$

$$T_1=\frac{2\pi}{2}=\pi;\ \ T_2=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2};\ \ T_3=\frac{2\pi}{1}=2\pi.$$

$$T=НСК\left(\pi;\frac{\pi}{2};2\pi\right)=2\pi.$$

Відповідь: $2\pi.$

Завдання для самостійної роботи:

Знайти період функції:

$f(x)=\sin 8x.$ Відповідь: $\frac{\pi}{4}.$

$y = \cos 1{,}5x.$ Відповідь: $\frac{4\pi}{3}.$

$\varphi(x) = tg 6x.$ Відповідь: $\frac{\pi}{6}.$

$\varphi(x) = ctg 4x.$ Відповідь: $\frac{\pi}{4}.$

$f(x) = \frac{3x}{4} - \cos\frac{x}{3}.$ Відповідь: $24\pi.$

$y = \sin\frac{2\pi}{3}.$ Відповідь: $3.$

$y = ctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right).$ Відповідь: $\pi\sqrt{2}.$

$y = \sin x \cdot \cos x.$ Відповідь: $\pi.$

$y = \sin 3x - \sin\frac{x}{3}.$ Відповідь: $6\pi.$

$y = \cos\frac{\pi x}{3} + \cos\frac{\pi x}{2}.$ Відповідь: $12.$

$y = \sin^4 x + \cos^4 x.$ Відповідь: $\frac{\pi}{2}.$

$f(x) = \sin 2x + 3\sin(3x-2) - 0{,}5\cos\left(\frac{4}{5}x + 1\right).$ Відповідь: $10\pi.$