Розділ 13
Комбінаторні рівняння та їх системи

Скінченні множини, для яких є істотним порядок елементів в них, називаються впорядкованими.
Наприклад, точка *A(1; 3)* і точка *B(3; 1)* – впорядковані множини, бо *A(1; 3)*$\neq$*B(3; 1)*.
Будь-яка впорядкована множина, яка складається з *n* елементів, називається перестановкою з *n* елементів.
Перестановки з *n* елементів відрізняються одна від одної тільки порядком елементів.
Формула перестановок $P_n = n!$ $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n.$ ($n!$- читається: *«ен факторіал»*)
$0! = 1.$
Будь-яка впорядкована підмножина з *n* елементів даної множини *M*, яка містить *m* елементів, де $n \le m,$ називається розміщенням з *m* елементів по *n*.
Розміщення відрізняються або елементами, або порядком елементів.
Позначається $A_m^n.$
Формула: $A_m^n = \underbrace{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}_{n-\text{множників}}.$
Наприклад: $A_4^3 = 4\cdot 3\cdot 2 = 24.$
Корисною є формула $A_m^{k+1} = A_m^k\cdot(m-k).$
Будь-яка підмножина з *n* елементів даної множини *M*, яка містить *m* елементів, називається комбінацією з *m* елементів по *n*. Позначається $C_m^n.$
Формула: $C_m^n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}.$
В процесі розв'язування різноманітних комбінаторних вправ добрим важелем можуть слугувати такі формули:

1). $C_m^n = \dfrac{A_m^n}{P_n}.$ 2). $C_m^n = C_m^{m-n}.$ 3). $C_m^{n+1} = \dfrac{m-n}{n+1}\cdot C_m^n.$

4). $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}.$ 5). $C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^n = 2^m.$ 6). $C_0^0 = 1,$ $C_m^0 = 1,$ $C_m^m = 1.$

Комбінаторика використовує тільки натуральні числа.
Комбінаторними будемо вважати рівняння та їх системи, які містять хоча б одну із множин:
перестановки, розміщення, комбінації.
Розв'язати рівняння:
1). $C_x^{13} = C_x^7.$

Розв'язання:

За формулою (2) маємо: $C_x^7 = C_x^{x-7}.$ Тоді $13 = x-7,$ $x = 13+7,$ $x = 20.$
Відповідь: 20.
2). $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14\cdot x.$

Розв'язання:

За формулою (1) маємо: $A_x^3 = C_x^3 \cdot P_3$. Тоді $C_x^3 \cdot P_3 + C_x^{x-x+2} = 14x$,

$3! \cdot \frac{x!}{3!(x-3)!} + C_x^2 = 14x$, $\frac{x!}{(x-3)!} + \frac{x!}{2!(x-2)!} = 14x$,

$\frac{(x-3)!(x-2)(x-1)\cdot x}{(x-3)!} + \frac{(x-2)!(x-1)\cdot x}{1\cdot 2\cdot (x-2)!} = 14x \,|: x$,

$(x-2)\cdot(x-1) + \frac{x-1}{2} = 14 \,|\cdot 2$, $2\cdot\left(x^2 - x - 2x + 2\right) + x - 1 = 28$, $2x^2 - 6x + 4 + x - 1 - 28 = 0$,

$2x^2 - 5x - 25 = 0$, $D = 25 + 200 = 225$. $x_1 = \frac{5-15}{4} = -\frac{10}{4} = -2{,}5 \notin N$; $x_2 = \frac{5+15}{4} = 5$.

Відповідь: 5.

3). $12C_{x+3}^{x-1} = 55 \cdot A_{x+1}^2$.

Розв'язання:

$12C_{x+3}^{x+3-x+1} = 55 \cdot A_{x+1}^2$; $12C_{x+3}^4 = 55 \cdot A_{x+1}^2$;

$12 \cdot \frac{(x+1)!}{4!(x+1-4)!} = 55 \cdot (x+1)\cdot x$; $\frac{(x+1)!}{2\cdot(x-3)!} = 55\cdot(x+1)\cdot x$;

$\frac{(x-3)!(x-2)(x-1)x\cdot(x+1)}{2(x-3)!} = 55(x+1)\cdot x \,|\cdot 2$;

$(x-2)(x-1)x(x+1) = 110(x+1)x \,|: (x+1)\cdot x \neq 0$;

$(x-2)\cdot(x-1) = 110$, $x^2 - x - 2x + 2 - 110 = 0$, $x^2 - 3x - 108 = 0$, $D = 9 + 432 = 441 = 21^2$;

$x_1 = \frac{3-21}{2} = -9 \notin N$; $x_2 = \frac{3+21}{2} = 12$.

Відповідь: 12. *(можливо відповідь 8)*.

4). $\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}$.

Розв'язання:

Очевидно, що $0 < x \le 4$.

В лівій частині рівняння зведемо до спільного знаменника:

$\frac{C_5^x - C_4^x}{C_4^x \cdot C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}$; $\frac{\frac{5!}{x!(5-x)!} - \frac{4!}{x!(4-x)!}}{\frac{4!}{x!(4-x)!}\cdot\frac{5!}{x!(5-x)!}} = \frac{1}{C_6^x}$;

$\frac{\frac{5!(4-x)! - 4!(5-x)!}{x!(5-x)!(4-x)!}}{\frac{4!5!}{x!\cdot x!(4-x)!(5-x)!}} = \frac{1}{C_6^x}$; $\frac{x!(5!(4-x)! - 4!(5-x)!)}{4!5!} = \frac{1}{C_6^x}$;

$\frac{x!4!(4-x)!(5-5+x)}{4!5!} = \frac{1}{C_6^x}$; $\frac{x!(4-x)!x}{5!} = \frac{1}{\frac{6!}{x!(6-x)!}}$;

$\frac{x!(4-x)!x}{5!} = \frac{x!(6-x)!x}{6!} \,|: (x!\cdot(4-x)!)$;

$\frac{x}{5!} = \frac{(5-x)(6-x)}{6!} \,|\cdot 6!$; $6x = (5-x)(6-x)$; $6x = 30 - 5x - 6x + x^2$; $x^2 - 17x + 30 = 0$;

За теоремою Вієта маємо: $x_1 = 2; \quad x_2 = 15$ – не задовольняє умову $0 < x \leq 4$.
Відповідь: 2.

$$\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2}, \\ C_x^2 = 153. \end{cases}$$

Розв'язання:

Розв’яжемо друге рівняння системи:

$$C_x^2 = \frac{x!}{2!(x-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (x-2)\cdot (x-1)\cdot x}{2!1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (x-2)} = \frac{(x-1)\cdot x}{2}; \quad \frac{(x-1)\cdot x}{2} = 153 \Big| \cdot 2; \quad (x-1)\cdot x = 306;$$

$$x^2 - x - 306 = 0.$$

По теоремі Вієта $x_1 = 18, \quad x_2 = -17, \quad -17 \notin N.$

Підставляємо $x = 18$ у перше рівняння системи:

$$C_{18}^y = C_{18}^{y+2}; \quad \frac{18!}{y!(18-y)!} = \frac{18!}{(y+2)!(18-y-2)!} \Big| :18! \quad \frac{1}{y!(18-y)!} = \frac{1}{(y+2)!(16-y)!};$$

З рівності дробів з однаковими чисельниками випливає рівність знаменників, тобто

$$y!(18-y)! = (y+2)!(16-y)! \Big| : y!$$

$$(18-y)! = (y+1)\cdot (y+2)\cdot (16-y)! \Big| : (16-y)!$$

$$(18-y)\cdot (17-y) = (y+1)\cdot (y+2); \quad 306 - 18y - 17y + y^2 = y^2 + 2y + y + 2;$$

$$-38y = -304; \quad y = \frac{-304}{-38}; \quad y = 8.$$

Відповідь: (18; 8).

$$\begin{cases} A_{5x}^{y-3} : A_{5x}^{y-2} = 1:7, \\ C_{5x}^{y-2} : C_{5x}^{y-3} = 7:4. \end{cases}$$

Розв'язання:

Надамо цій системі рівнянь такого вигляду:

$$A_{5x}^{y-3} = C_{5x}^{y-3}\cdot P_{y-3} = C_{5x}^{y-3}\cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (y-5)\cdot (y-4)\cdot (y-3);$$

$$A_{5x}^{y-2} = C_{5x}^{y-2}\cdot P_{y-2} = C_{5x}^{y-2}\cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (y-3)\cdot (y-2).$$

$$\begin{cases} \dfrac{C_{5x}^{y-3}\cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (y-3)}{C_{5x}^{y-2}\cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (y-3)\cdot (y-2)} = \dfrac{1}{7}, \\ \dfrac{C_{5x}^{y-2}}{C_{5x}^{y-3}} = \dfrac{7}{4}. \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{C_{5x}^{y-3}\cdot}{C_{5x}^{y-2}\cdot (y-2)} = \dfrac{1}{7}, \\ \dfrac{C_{5x}^{y-2}}{C_{5x}^{y-3}} = \dfrac{7}{4}. \end{cases} \to C_{5x}^{y-2} = \frac{7}{4}\cdot C_{5x}^{y-3}.$$

$$\begin{cases} C_{5x}^{y-3} = \dfrac{1}{7}, \\ \dfrac{7}{4} C_{5x}^{y-3}\cdot (y-2). \end{cases} \quad \frac{1}{\frac{7}{4}(y-2)} = \frac{1}{7}; \quad \frac{7}{4}(y-2) = 7; \quad y-2 = 4, \quad y = 6.$$

Підставимо в друге рівняння:

$$\frac{C_{5x}^{6-2}}{C_{5x}^{6-3}} = \frac{7}{4}; \quad \frac{C_{5x}^4}{C_{5x}^3} = \frac{7}{4}; \quad 4\cdot C_{5x}^4 = 7\cdot C_{5x}^3.$$

$$4\cdot \frac{(5x)!}{4!(5x-4)!} = 7\cdot \frac{(5x)!}{3!(5x-3)!} \Big| : (5x)! \quad \frac{4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot (5x-4)!} = \frac{7}{3!(5x-3)!} \Big| \times 3!$$

$$\frac{1}{(5x-4)!}=\frac{7}{(5x-3)!};\ (5x-3)!=7(5x-4)!\,|:(5x-4)!\ \ 5x-3=7;\ \ 5x=10;\ \ x=2.$$

Відповідь: (2; 6).

Розглянемо рівняння, яке зводиться до системи:

$C_{n+1}^{m+1}:C_{n+1}^{m}=5:5.$

Розв'язання:

$$\begin{cases} C_{n+1}^{m+1}:C_{n+1}^{m}=5:5, \\ C_{n+1}^{m}:C_{n+1}^{m-1}=5:3. \end{cases} \begin{cases} \dfrac{C_{n+1}^{m+1}}{C_{n+1}^{m}}=\dfrac{5}{5}, \\ \dfrac{C_{n+1}^{m}}{C_{n+1}^{m-1}}=\dfrac{5}{3}. \end{cases} \begin{cases} \dfrac{\dfrac{(n+1)!}{(m+1)!(n+1-m-1)!}}{\dfrac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}}=1, \\ \dfrac{\dfrac{(n+1)!}{(m+1)!(n+1-m)!}}{\dfrac{(n+1)!}{(m-1)!(n+1-m+1)!}}=\dfrac{5}{3}. \end{cases} \begin{cases} \dfrac{m!(n-m+1)!}{(m+1)!(n-m)!}=1, \\ \dfrac{(m-1)!(n-m+2)!}{m!(n-m+1)!}=\dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{n-m+1}{m+1}=1, \\ \dfrac{n-m+2}{m}=\dfrac{5}{3}. \end{cases} \begin{cases} n-m+1=m+1, \\ 3n-3m+6=5n. \end{cases} \begin{cases} n=2m, \\ 8m=3n+6. \end{cases} \quad 8m=3\cdot 2m+6,\ \ 2m=6,\ \ m=3.\ \ n=2\cdot 3=6.$$

Відповідь: (3; 6).

Завдання для самостійної роботи:

$x^2\cdot C_{x-1}^{x-4}=A_4^2\cdot C_{x+1}^{3}-x\cdot C_{x-1}^{x-4}.$ Відповідь: 6.

$C_{x+8}^{x+3}=5\cdot A_{x+6}^{3}.$ Відповідь: 17.

$\dfrac{A_{x+2}^{n+2}\cdot P_{x-n}}{P_x}=110.$ Відповідь: $x=9$ при $n=\{1;2;3;4;5;6;7;8\}.$

$\dfrac{P_{x+2}}{A_x^n\cdot P_{x-n}}=132.$ Відповідь: $x=10$ при $n=9!$

$\dfrac{C_{2x}^{x+1}}{C_{2x+1}^{x-1}}=0{,}6.$ Відповідь: 7.

$C_{20}^{x}=C_{20}^{3x-12}.$ Відповідь: 6; 8.

$\dfrac{1}{C_4^x}-\dfrac{1}{C_5^x}=\dfrac{1}{C_6^x}.$ Відповідь: 2.

$\begin{cases} A_x^y:A_x^{y-1}=10, \\ C_x^y:C_x^{y-1}=\dfrac{5}{3}. \end{cases}$ Відповідь: (15; 6).

$\begin{cases} C_x^y=C_x^{y+2}, \\ C_x^2=133. \end{cases}$ Відповідь: (6; 3).

$\begin{cases} C_x^{y+1}=2{,}5x, \\ C_{x-1}^{y}=10. \end{cases}$ Відповідь: (4; 3).

$C_{x+1}^{y-1}:C_{x+1}^{y}:C_{x+1}^{y+1}=3:5:5.$ Відповідь: (6; 3).