Розділ 12
Системи рівнянь

Два або більше рівняння з *n* змінними утворюють систему тоді, коли потрібно знайти їх спільні розв'язки.
Розв'язком системи рівнянь з *n* змінними називається така впорядкована *n*-ка чисел, яка перетворює кожне рівняння в правильну число рівність.
Розв'язати систему рівнянь означає знайти множину всіх її розв'язків або показати, що вона розв'язків не має.
Система, яка має розв'язки, називаються сумісною, а яка не має розв'язків - несумісною або суперечливою.
Той факт, що задана система записуються за допомогою фігурної дужки, написаної злів від стовпчика рівнянь.
Система рівнянь *(A)* називаються наслідком системи *(B)*, якщо всі розв'язки системи *(B)* є розв'язками системи *(A)*. Цей факт записуються так: $B \Rightarrow A.$
Дві системи рівнянь називаються рівносильними або еквівалентними, якщо кожна з них є наслідком іншої. $B \Leftrightarrow A.$
Дві системи називаються рівносильними і тоді, коли вони обидві не мають розв'язків.
Є три традиційних способи розв'язування систем двох рівнянь:
1) спосіб підстановки;
2) спосіб алгебраїчного додаванна;
3) спосіб порівняння. Суть цього способу полягає в тому, що з обох рівнянь системи виражають одну і ту саму змінну, наприклад y через $x.$ Утворюють третє рівняння відносно змінної x і розв'язують його. Знаходять значення іншої змінної. Записують у відповідь.

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 + 2x + 3y = 6, (1) \\ 2x - y = 3. (2) \end{cases}$$

Розв’язання:

Розв’яжемо цю систему способом підстановки. З рівняння *(2)* маємо:
$y = 2x - 3.$
Підставимо значення в рівняння *(1)*:

$$x^2 - 3x(2x-3) + (2x-3)^2 + 2x + 3(2x-3) = 6,$$
$$x^2 - 6x^2 + 9x + 4x^2 - 12x + 9 + 2x + 6x - 9 = 6,$$
$$-x^2 + 5x - 6 = 0 \Big| \cdot (-1)$$

$x^2 - 5x + 6 = 0.$ За теоремою Вієта: $\left[\begin{array}{l} x_1 = 2,\ y_1 = 2 \cdot 2 - 3 = 1 \\ x_2 = 3 \quad y_2 = 2 \cdot 3 - 3 = 3 \end{array}\right.$

Відповідь: $(2;1),\ (3;3).$

$$\begin{cases} x - y = 8, (1) \\ x \cdot y = -15\,(2) \end{cases}$$

Розв’язання:

З рівняння *(1)* виразимо змінну y через x: $y = x - 8;$

Підставимо значення y в рівняння *(2)*:

$x\cdot(x-8)=-15,\ -8x+x^2+15=0,\ x^2-8x+15=0.$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=3,\ \ y_1=3-8=-5, \\ x_2=5\ \ \ y_2=5-8=-3 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} y_1=-5, \\ y_2=-3. \end{array}\right.$$

Відповідь: $(3;-5),\ (5;-3).$

$$\begin{cases} x^2+y^2=34, (1) \\ x-y=2\,(2) \end{cases}$$

Розв'язання:

Піднесемо обидві частини рівняння *(2)* до квадрату:

$(x-y)^2=2^2,\ x^2-2xy+y^2=4$ *(3)*.

Віднімемо рівняння *(1)* від *(3)*:

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} \boldsymbol{x^2-2xy+y^2=4,} \\ \underline{\boldsymbol{x^2+y^2=34}} \end{array} \\ \boldsymbol{-2xy=-30:(-2)} \\ \boldsymbol{xy=15\,(4).} \end{array}$$

Розглянемо систему рівнянь *(2)*: *(4)*:

$$\begin{cases} x-y=2, \\ xy=15 \end{cases} \begin{cases} y=x-2, \\ x(x-2)=15 \end{cases} \begin{cases} y=x-2, \\ x^2-2x-15=0 \end{cases} \begin{cases} y_1=-5;\,y_2=3, \\ x_1=-3;\,x_2=5. \end{cases}$$

Відповідь: $-(3;-5),\ (5;3).$

$$\begin{cases} x^2-y^2=40,\ (1) \\ xy=21\ (2) \end{cases}$$

Розв'язання:

Піднесемо обидві частини рівняння *(2)* до квадрату:

$\begin{cases} x^2-y^2=40, \\ x^2y^2=441. \end{cases} \begin{cases} x^2+(-y^2)=40, \\ x^2\cdot(-y^2)=441. \end{cases}$ На підставі теореми Вієта складаємо допоміжне рівняння:

$t^2-40t-441=0.$ За теоремою Вієта: $t_1=-9,\ t_2=49.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=-9, \\ -y^2=49. \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=49, \\ -y^2=-9. \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=-9, \\ y^2=-49. \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=49, \\ y^2=9. \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x\in\varnothing \\ x\in\varnothing \\ x_1=-7 \\ x_2=7 \\ y_1=-3 \\ y_2=3 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x_1=-7 \\ y_1=-3 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x_2=7 \\ y_2=3 \end{array}\right.$$

Відповідь: $(-7;\ -3),\ (7;\ 3).$

$$\begin{cases} x^2+y^2=80,\ (1) \\ xy=32\ (2) \end{cases}$$

Розв'язання:

Помножимо рівняння *(2)* на 2: $2xy=64$ *(3)*.

Додамо рівняння *(1)* і *(3)*: Віднімемо рівняння *(1)*–*(3)*:

$$+\begin{cases} x^2+y^2=80, \\ 2xy=64 \end{cases}$$

$$x^2+2xy+y^2=144;$$

$$(x+y)^2=144;$$

$$\sqrt{(x+y)^2}=\sqrt{12^2}.$$

$$|x+y|=|12|;$$

Оскільки $12>0$, то $|12|=12$.

$|x+y|=12.$ *(4)*

$$-\begin{cases} x^2+y^2=80, \\ 2xy=64 \end{cases}$$

$$x^2-2xy+y^2=144;$$

$$(x-y)^2=4^2;$$

$$\sqrt{(x-y)^2}=\sqrt{4^2}.$$

$$|x-y|=|4|;$$

Оскільки $4>0$, то $|4|=4$.

$|x-y|=4$ *(5)*.

З рівнянь *(4)* і *(5)* утворимо систему:

$\begin{cases} |x+y|=12, \\ |x-y|=4. \end{cases}$ За властивостями модуля числа маємо:

$\begin{cases} x+y=\mu 12, \\ x-y=\mu 4. \end{cases}$ З цієї сукупності утворимо сукупність чотирьох систем рівнянь:

$$\left[\begin{array}{llll}
\begin{cases} x+y=-12, \\ x-y=-4. \end{cases} & +\begin{cases} x+y=-12 \\ x-y=-4 \end{cases} \; 2x=-16; x=-8 & \begin{cases} -8+y=-12 \\ x=-8 \end{cases} & \left[\begin{array}{l} y=-4, \\ x=-8. \end{array}\right. \\
\begin{cases} x+y=-12, \\ x-y=4. \end{cases} & +\begin{cases} x+y=-12 \\ x-y=4 \end{cases} \; 2x=-8; x=-4 & \begin{cases} -4+y=12 \\ x=-4 \end{cases} & \left[\begin{array}{l} y=-8, \\ x=-4. \end{array}\right. \\
\begin{cases} x+y=12, \\ x-y=-4. \end{cases} & +\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=-4 \end{cases} \; 2x=8; x=4 & \begin{cases} 4+y=12 \\ x=4 \end{cases} & \left[\begin{array}{l} y=8, \\ x=4. \end{array}\right. \\
\begin{cases} x+y=12, \\ x-y=4. \end{cases} & +\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=4 \end{cases} \; 2x=16; x=8 & \begin{cases} 8+y=12 \\ x=8 \end{cases} & \left[\begin{array}{l} y=4, \\ x=8. \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Відповідь: $(-4;-8),(-8;-4),(4;8),(8;4)$.

$$2x^2-15xy+4y^2-12x+45y-24=0,\ (1)$$

$$x^2+xy-2y^2-3x+3y=0\ (2)$$

Розв'язання:

Запишемо рівняння *(2)* як квадратне відносно *x:*

$$x^2+(xy-3x)+(3y-2y^2)=0;\ x^2+(y-3)x+3y-2y^2=0;(3)$$

$$D=(y-3)^2-4\cdot(3y-2y^2)=y^2-6y+9-12y+8y^2=9y^2-18y+9=$$

$$=9\cdot(y^2-2y+1)=3^2\cdot(y-1)^2=(3\cdot(y-1))^2.$$

$$x_1=\frac{-(y-3)-\sqrt{(3\cdot(y-1))^2}}{2}=\frac{-y+3-3\cdot(y-1)}{2}=\frac{-y+3-3y+3}{2}=\frac{6-4y}{2}=3-2y;$$

$$x_2=\frac{-y+3+3y-3}{2}=\frac{2y}{2}=y.$$

За формулою розкладання квадратного тричлена на множники $ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ розкладемо на множники ліву частину рівняння *(3):*

$x^2+(y-3)x+3y-2y^2=(x-y)\cdot(x-3+2y);$

$(x-y)\cdot(x-3+2y)=0.$ Це рівняння рівносильне двом рівнянням:

$x-y=0$ і $x+2y-3=0.$

Вихідна система рівнянь еквівалентна сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2-15xy+4y^2-12x+45y-24=0,\\ x-y=0.\end{cases}\\ \begin{cases}2x^2-15xy+4y^2-12x+45y-24=0,\\ x+2y-3=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Кожну систему рівнянь сукупності розв'яжемо способом підстановки:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=x,\\ 2x^2-15x^2+4x^2-12x+45x-24=0.\end{cases}\\ \begin{cases}x=3-2y,\\ 2\cdot(3-2y)^2-15\cdot(3-2y)\cdot y+4y^2-12\cdot(3-2y)+45y-24=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=x,\\ -9x^2+33x-24=0 \,|: (-3).\end{cases}\\ \begin{cases}x=3-2y,\\ 2\cdot(9-12y+4y^2)-45y+30y^2+4y^2-36+24y+45y-24=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=x,\\ 3x^2+11x+8=0.\end{cases}\\ \begin{cases}x=3-2y,\\ 18-24y+8y^2-45y+30y^2+4y^2-36+24y+45y-24=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=x,\\ 3x^2-11x+8=0\end{cases} D=121-96=25, \left[\begin{array}{l}y_1=1,\\ x_1=\dfrac{11-5}{6}=1\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}y_2=\dfrac{8}{3},\\ x_2=\dfrac{16}{6}=\dfrac{8}{3}.\end{array}\right.\\ \begin{cases}x=3-2y,\\ 42y^2-42=0\end{cases} \left[\begin{array}{l}x_3=5,\\ y_3=-1\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x_4=1,\\ y_4=1.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Відповідь: $(1;1),\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{8}{3}\right),(5;-1).$

$$\begin{cases}x^3=5x+y, \ (1)\\ y^3=x+5y. \ (2)\end{cases}$$

Розв'язання:

Додамо рівняння *(1)* і *(2)*:

$x^3+y^3=6x+6y;$

$x^3+y^3=6\cdot(x+y)$ (3)

Віднімемо рівняння *(1)* і *(2)*:

$x^3 - y^3 = 4x + 4y;$

$x^3 - y^3 = 4 \cdot (x - y)$ (4).

Розглянемо систему рівнянь *(3)* і *(4)*. Застосуємо для її розв'язання формули суми і різниці кубів:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 6 \cdot (x + y), \\ x^3 - y^3 = 4 \cdot (x - y) \end{cases} \begin{cases} (x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2) - 6 \cdot (x + y) = 0, \\ (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2) - 4 \cdot (x - y) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2 - 6) = 0, \\ (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2 - 4) = 0. \end{cases}$$

Ця система рівнянь рівносильна сукупності чотирьох систем рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0. \end{cases} \begin{cases} 2x = 0, \\ x - y = 0. \end{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ y_1 = 0. \end{array} \right. \\ \begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 - xy + y^2 - 6 = 0. \end{cases} \begin{cases} x = y, \\ x^2 - x^2 + y^2 - 6 = 0. \end{cases} \begin{cases} x = y, \\ y^2 - 6 = 0. \end{cases} \begin{cases} x_2 = -\sqrt{6}, \\ y_2 = -\sqrt{6}. \end{cases} \left[\begin{array}{l} x_3 = \sqrt{6}, \\ y_3 = \sqrt{6}. \end{array} \right. \\ \begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + xy + y^2 - 4 = 0. \end{cases} \begin{cases} x = -y, \\ (-y)^2 - y^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases} \begin{cases} x = -y, \\ y^2 = 4. \end{cases} \left[\begin{array}{l} x_4 = 2, \\ y_4 = -2, \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x_5 = -2, \\ y_5 = 2. \end{array} \right. \\ + \begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 6 = 0, \\ x^2 + xy + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \qquad - \begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 6 = 0, \\ x^2 + xy + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$2x^2 + 2y^2 - 10 = 0 \qquad -2xy - 2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 = 5 \ (5) \qquad 2xy = -2 \ (6)$$

Утворимо систему з рівнянь *(5)* і *(6)*:

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 2xy = -2. \end{cases}$ Додамо і віднімемо рівняння цієї системи та утворимо нову систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 3, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4. \end{cases} \begin{cases} (x + y)^2 - 3 = 0, \\ (x - y)^2 - 7 = 0. \end{cases} \begin{cases} (x + y - \sqrt{3}) \cdot (x + y + \sqrt{3}) = 0, \\ (x - y - \sqrt{7}) \cdot (x - y + \sqrt{7}) = 0. \end{cases}$$

Остання система рівносильна сукупності чотирьох систем рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y - \sqrt{3} = 0, \\ x + y - \sqrt{7} = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} x + y - \sqrt{3} = 0, \\ x - y + \sqrt{7} = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} x + y + \sqrt{3} = 0, \\ x - y - \sqrt{7} = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} x + y + \sqrt{3} = 0, \\ x - y + \sqrt{7} = 0. \end{cases} \end{array} \right.
\qquad
\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_6 = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{7}), \\ y_6 = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{7}) \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x_7 = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{7}), \\ y_7 = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3}) \end{array} \right. \qquad \left[\begin{array}{l} x_9 = -\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{7}), \\ y_9 = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3}). \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x_8 = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3}), \\ y_8 = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3}) \end{array} \right. \end{array}$$

Відповідь: $(0;\ 0),\ \left(-\sqrt{6};\ -\sqrt{6}\right),\ \left(\sqrt{6};\ \sqrt{6}\right),\ (2;\ -2),\ (-2;\ 2),\ \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2};\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right),$
$\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2};\ \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2};\ \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right).$

$$\begin{cases} 3x^2+2xy+y^2=11, \\ x^2+2xy+3y^2=17. \end{cases}$$

Розв'язання:

Введемо нову змінну $x=t\cdot y.$ Тоді система зводиться до такої:

$$\begin{cases} 3\cdot(ty)^2+2y(ty)+y^2=11, \\ (ty)^2+2y(ty)+3y^2=17. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2y^2+2ty^2+y^2=11, \\ t^2y^2+2ty^2+3y^2=17. \end{cases} \begin{cases} y^2\cdot\left(3t^2+2t+1\right)=11, \\ y^2\cdot\left(t^2+2t+3\right)=17. \end{cases}$$

Оскільки $y\neq 0,$ то розділимо ліві і праві частини рівнянь останньої системи:

$$\frac{y^2\cdot\left(3t^2+2t+1\right)}{y^2\cdot\left(t^2+2t+3\right)}=\frac{11}{17}\Rightarrow\frac{3t^2+2t+1}{t^2+2t+3}=\frac{11}{17};$$

Застосувавши основну властивість пропорції, дістанемо:

$$17\cdot\left(3t^2+2t+1\right)=11\cdot\left(t^2+2t+3\right)\ \Rightarrow 51t^2+34t+17=11t^2+22t+33;$$

$$40t^2+12t-16=0|:4\ \Rightarrow 10t^2+3t-4=0.\ D=9+160=169,$$

$$t_1=\frac{-3-13}{20}=-\frac{16}{20}=-\frac{4}{5};\ t_2=\frac{-3+13}{20}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}.$$

Підставимо значення $t_1=-\frac{4}{5}$ в рівняння $y^2\cdot\left(t^2+2t+3\right)=17.$

$$y^2\cdot\left(\left(-\frac{4}{5}\right)^2+2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+3\right)=17,\ \Rightarrow y^2\cdot\left(\frac{16}{25}-\frac{8}{5}+3\right)=17,\ y^2=\frac{16-40+75}{25}=17;$$

$$y^2\cdot\frac{51}{25}=17;\ y^2=17:\frac{51}{25};\ y^2=\frac{17}{1}\cdot\frac{25}{51}=\frac{25}{3};\ y_1=-\frac{5}{\sqrt{3}}=-\frac{5\sqrt{3}}{3};\ y_2=\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Повертаємось до заміни $x=ty$:

$$x_1=-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3};\ x_2=-\frac{4}{5}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{3}=-\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Підставивши значення $t_2=\frac{1}{2}$ в рівняння $y^2\cdot\left(3t^2+2t+1\right)=11,$ дістанемо:

$$y^2\cdot\left(3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}+1\right)=11,\quad y^2\cdot\left(\frac{3}{4}+2\right)=11;\ y^2=11:2\frac{3}{4}=\frac{11}{1}\cdot\frac{4}{11}=4;$$

$$y_3=-2;\ y_3=2.$$

$$x_3=-2\cdot\frac{1}{2}=-1;\ x_4=\frac{1}{2}\cdot 2=1.$$

Відповідь: $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3};\ -\frac{5}{3}\sqrt{3}\right),\ \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3};\ \frac{5}{3}\sqrt{3}\right),\ (-1;-2),(1;2).$

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8, \\ x^2+y^2+xy=7. \end{cases}$$

Розв’язання:

Виконаємо заміну $x+y=u,$ а $x\cdot y=v.$

$(x+y)^2=u^2,\ x^2+2xy+y^2=u^2,\ x^2+y^2=u^2-2v.$

Вихідна система набуває вигляду:

$$\begin{cases} u^2-2v+u=8, \\ u^2-2v+v=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2+u-2v=8, \\ u^2-v=7. \end{cases}$$

Цю систему розв'яжемо способом підстановки.

$v=u^2-7;\ u^2+u-2(u^2-7)=8,\ u^2+u-2u^2+14=8,\ -u^2+u+6=0\,|\cdot(-1),$

$u^2-u-6=0.$

За теоремою Вієта маємо: $u_1=3,\ u_2=-2.$ Тоді $v_1=3^2-7=2;\ v_2=(-2)^2-7=-3.$

Розв'яжемо сукупність систем рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=-2, \\ xy=-3. \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=3, \\ xy=2. \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-2-x, \\ x\cdot(-2-x)=-3. \end{cases} \\ \begin{cases} y=3-x, \\ x\cdot(3-x)=2. \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-2-x, \\ -2x-x^2+3=0. \end{cases} \\ \begin{cases} y=3-x, \\ 3x-x^2-2=0. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-2-x, \\ x^2+2x-3=0. \end{cases} \\ \begin{cases} y=3-x, \\ x^2-3x+2=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-2-x, \\ x_1=-3;\ x_2=1. \end{cases} \\ \begin{cases} y=3-x, \\ x_3=1;\ x_4=2. \end{cases} \end{array}\right.$$ Відповідь: $(-3;\ 1),\ (1;\ -3),\ (1;\ 2),\ (2;\ 1).$

Покажемо деякі методи розв'язування систем до яких входять ірраціональні рівняння:

$$\begin{cases} x+\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{2}{y}, \\ y-x=3. \end{cases}$$

Розв'язання:

Тут доцільно шукати ОДЗН системи:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}\ge 0, \\ y\ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 0, \\ y>0. \end{cases} \text{– нехай це перша область ДЗН, а} \\ \begin{cases} x\le 0, \\ y<0. \end{cases} \text{це друга область ДЗН.} \end{array}$$

Розв'яжемо дану систему в першій ОДЗН:

Перетворимо перше рівняння системи, помноживши його обидві частини на y тут $(y>0)$:

$x+\sqrt{\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{y}{y}}=\dfrac{2}{y}\Big|\cdot y,\ xy+\sqrt{xy}-2=0,\ \left(\sqrt{xy}\right)^2+\sqrt{xy}-2=0.$

Введемо нову змінну:

$\sqrt{xy}=t,\ t^2+t-2=0.$

За теоремою Вієта:

$t_1 = -2;\ \ t_2 = 1.$

$\sqrt{xy} = -2,\ \ \sqrt{xy} = -2,\ \ xy \in \varnothing.$

$\sqrt{xy} = 1 \Rightarrow xy = 1.$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 2{,}5\sqrt[6]{xy}, (1) \\ x - 14y = 100.\ (2) \end{cases}$$

Розв'язання:

ОДЗН: $x > 0,\ \ y > 0.\ \ \sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{x^2},\ \ \sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{y^2},\ \ \sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{y^2} = 2{,}5\sqrt[6]{xy}\Big| : \sqrt[6]{xy}.$

$\sqrt[6]{\dfrac{x^2}{xy}} + \sqrt[6]{\dfrac{y^2}{xy}} = 2{,}5;\ \ \sqrt[6]{\dfrac{x}{y}} + \sqrt[6]{\dfrac{y}{x}} - 2{,}5 = 0.$ Позначимо $\sqrt[6]{\dfrac{x}{y}} = t,$ тоді $t + \dfrac{1}{t} - 2{,}5 = 0;$

$$\begin{cases} t^2 - 2{,}5t + 1 = 0,\ D = 6{,}25 - 4 = 2{,}25 = 1{,}5^2. \\ t \neq 0 \end{cases}$$

$t_1 = \dfrac{2{,}5 - 1{,}5}{2} = \dfrac{1}{2};\ \ t_2 = \dfrac{2{,}5 + 1{,}5}{2} = 2.\ \ \sqrt[6]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{1}{2};\ \ \dfrac{x}{y} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^6;\ \ \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{64};\ \ y = 64x$ *(3).*

$\sqrt[6]{\dfrac{x}{y}} = 2,\ \ \dfrac{x}{y} = 2^6,\ \ x = 64y$ *(4).*

Утворимо сукупність двох систем рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 64x, \\ x - 14y = 100. \end{cases} \\ \begin{cases} x = 64y, \\ x - 14y = 100. \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 64x, \\ x - 14\cdot 64x = 100. \end{cases} \\ \begin{cases} x = 64y, \\ 64y - 14y = 100. \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 64x, \\ -895x = 100. \end{cases} \\ \begin{cases} x = 64y, \\ 50y = 100. \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \begin{cases} y = 64\cdot x, \\ x = -\dfrac{100}{895} \end{cases} \notin ОДЗН\ \varnothing. \\ \begin{cases} x = 64\cdot 2, \\ y = \dfrac{100}{50} = 2. \end{cases} \begin{cases} x = 128, > 0 \\ y = 2. > 0 \end{cases} \end{array}$$

Відповідь: $(128; 2).$

$$\begin{cases} x + y - \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{6}{x-y}, (1) \\ xy = 20\ (2) \end{cases}$$

Розв'язання:

Перетворимо $\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \sqrt{\dfrac{(x+y)\cdot(x-y)}{(x-y)^2}} = \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2}}{|x-y|},$ тоді рівняння *(1)* набуває вигляду:

$x + y - \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2}}{|x-y|} = \dfrac{6}{x-y},$ якщо $x - y > 0,$ то $|x - y| = x - y.$

$x + y - \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2}}{|x-y|} = \dfrac{6}{x-y}\Big| \times (x-y),\ \ x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 - y^2} - 6 = 0.$ Позначимо $\sqrt{x^2 - y^2} = t.$

$t^2 - t - 6 = 0,\ \ t_1 = 3,\ \ t_2 = -2.$

$\sqrt{x^2 - y^2} = 3;\ \ \begin{cases} x^2 - y^2 = 9, \\ xy = 20 \end{cases}\ \ \sqrt{x^2 - y^2} = -2\ \ \varnothing\ \ y = \dfrac{20}{x};$

$x^2-\left(\frac{20}{x}\right)^2=9,\ x^2-\frac{400}{x^2}-9=0,\ \begin{cases}x^4-9x^2-400=0,\\ x^2\neq 0\end{cases}\ x^2=m,\ m^2-9m-400=0.$

$D=81+4\cdot 400=1681=41^2,\ m_1=\frac{9-41}{2}=-\frac{32}{2}=-16;\ m_2=\frac{9+41}{2}=25;$

$x^2=-16\quad x\in\varnothing.\ x^2=25,\ x_1=-5;\ x_2=5;\ y_1=\frac{20}{-5}=-4;\ y_2=\frac{20}{5}=4.$

$x-y>0\quad -5-(-4)=-1<0.$ Отже (5; 4).

Якщо $x-y<0,$ то $|x-y|=-(x-y).$ Тоді $x+y-\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{-(x-y)}-\frac{6}{x-y}=0;$

$x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}-6=0;\ \sqrt{x^2-y^2}=l;\ l^2+l-6=0,\ l_1=-3;\ l_2=2.$

$\sqrt{x^2-y^2}=-3,\ \varnothing\ \sqrt{x^2+y^2}=2,\ x^2-y^2=4$

$\begin{cases}x^2-y^2=4,\\ xy=20.\end{cases}\ y=\frac{20}{x},\ x^2-\frac{400}{x^2}-4=0,\ \begin{cases}x^4-4x^2-400=0,\\ x^2\neq 0.\end{cases}\ x^2=n,\ n^2-4n-400=0,$

$D=16+1600=1616,\ n_1=\frac{4-\sqrt{1616}}{2}=0,\ n_2=\frac{4+\sqrt{1616}}{2};\ x^2=\frac{4+\sqrt{1616}}{2},$

$x_1=\sqrt{\frac{4+\sqrt{1616}}{2}}=\sqrt{2+2\sqrt{101}};\ x_2=\sqrt{2+2\sqrt{101}};\ y_2=\frac{20}{\sqrt{2+2\sqrt{101}}}.$

Відповідь: (5; 4), $\left(-\sqrt{2+2\sqrt{101}};\ \frac{20}{-\sqrt{2+2\sqrt{101}}}\right).$

Утворилась система рівнянь:

$\begin{cases}y-x=3,\\ xy=1.\end{cases}\ \begin{cases}y=3+x,\\ x\cdot(3+x)=1.\end{cases}\ \begin{cases}y=3+x,\\ 3x+x^2-1=0.\end{cases}\ \begin{cases}y=3+x,\\ x^2+3x-1=0.\end{cases}$

$D=9+4=13>0;\ x_1=\frac{-3-\sqrt{13}}{2};\ x_2=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}.$

$y_1=3+\frac{-3-\sqrt{13}}{2}=\frac{3-\sqrt{13}}{2};\ y_2=3+\frac{-3+\sqrt{13}}{2}=\frac{3+\sqrt{13}}{2}.$

Так як $\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$ і $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ не належать першій ОДЗН, в якій розв'язується дана система, а $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ і $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ належать їй, то розв'язком системи є пара чисел $\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2};\ \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$. Спростимо перше рівняння системи в другій ОДЗН:

$x+\sqrt{\frac{x\cdot y}{y\cdot y}}=\frac{2}{y}\bigg|\cdot y,\ xy+\sqrt{xy}-2=0,$ а тому $\left(\sqrt{xy}\right)^2-\sqrt{xy}-2=0,\ \sqrt{xy}=t,\ t^2-t-=0,$

$t_1=-1;\ t_2=2.\ \sqrt{xy}=-1,\ xy\in\varnothing.\ \sqrt{xy}=2,\ xy=4.$ Маємо таку систему:

$\begin{cases}y-x=3,\\ xy=4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=3+x,\\ x\cdot(3+x)=4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=3+x,\\ 3x+x^2=4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=3+x,\\ x^2+3x-4=0\end{cases}$

$\begin{cases}y=3+x,\\ x=-4;\ x=1\end{cases}\ \begin{cases}x=-4,\\ y=3-4=-1\end{cases}\ \begin{cases}x=1,\\ y=3+1=4.\end{cases}$

Пара *(1; 4)* не належить другій ОДЗН, а тому розв'язком системи є пара *(-1; -4)*.

Відповідь: $\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2};\ \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right),\ (-4;\ -1).$

$$\begin{cases} 3|x|+5y+9=0, \\ 2x-|y|-7=0. \end{cases}$$

Розв'язання:

Розв'яжемо дану систему в кожній з чотирьох ОДЗН:

I). $\begin{cases} x\ge 0, \\ y\ge 0. \end{cases}$ $\begin{matrix} |x|=x. \\ |y|=y. \end{matrix}$ $\begin{cases} 3x+5y+9=0, \\ 2x-y-7=0 \,|\cdot 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+5y=-9, \\ 10x-5y=35 \end{cases}$

$$13x=26;$$

$$x=2$$

$3\cdot 2+5y=-9, 8y=-9-6,\ y=-3$ не задовольняє умову $y\ge 0.$

В цій ОДЗН система не має розв'язків.

$$\begin{cases} x^2-x\sqrt{xy}=8, \\ y^2-y\sqrt{xy}=-1. \end{cases}$$

Розв'язання:

Заміна $x=ty,\ y\ne 0.$

$$\begin{cases} (ty)^2-ty\sqrt{ty\cdot y}=8, \\ y^2-y\sqrt{ty\cdot y}=-1 \end{cases} \begin{cases} t^2y^2-ty\sqrt{ty^2}=8, \\ y^2-y\sqrt{ty^2}=-1 \end{cases} \begin{cases} t^2y^2-ty|y|\sqrt{t}=8, \\ y^2-y|y|\sqrt{t}=-1. \end{cases}$$

Якщо $y>0,$ то $|y|=y$

$$\begin{cases} 2y^2-\cancel{ty}^2\sqrt{t}=8, \\ y^2-y^2\sqrt{t}=-1. \end{cases} \begin{matrix} t^2y^2-ty^2\sqrt{t}=8, \\ y^2-y^2\sqrt{t}=-1. \end{matrix} \begin{matrix} y^2\cdot\left(t^2-\sqrt{t}\right)=8, \\ y^2\left(1-\sqrt{t}\right)=-1. \end{matrix} \ \frac{t^2-t\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}=-8,\ \frac{t\cdot\left(t-\sqrt{t}\right)}{1-\sqrt{t}}=-8,$$

$$\frac{t\cdot\sqrt{t}\left(\sqrt{t}-1\right)}{1-\sqrt{t}}=-8,\ \frac{t\sqrt{t}\left(1-\sqrt{t}\right)}{1-\sqrt{t}}=8,\ \begin{matrix} t\sqrt{t}=8, \\ t=2^2=4. \end{matrix}\quad t^{\frac{3}{2}}=2.$$ Піднесемо до степеня $\frac{2}{3}$:

$$\begin{cases} x=4y, \\ y^2-y\sqrt{xy}=-1 \end{cases} \begin{cases} x=4y, \\ y^2-y\sqrt{4y\cdot y}+1=0 \end{cases} \begin{cases} -4y=0, \\ y^2-2y^2+1=0 \end{cases} \begin{cases} x-4y=0, \\ 1-y^2=0. \end{cases} \begin{cases} x=4\cdot 1, \\ y=1 \end{cases} \begin{matrix} x=4, \\ y=1. \end{matrix}$$

Якщо $y<0,$ то $|y|=-y$ і $\begin{cases} t^2y^2+ty^2\sqrt{t}=8, \\ y^2+y^2\sqrt{t}=-1 \end{cases}$ $\frac{y^2\cdot\left(t^2+t\sqrt{t}\right)}{y^2\cdot\left(1+\sqrt{t}\right)}=\frac{8}{1},\ \frac{t\sqrt{t}\cdot\left(1+\sqrt{t}\right)}{1+\sqrt{t}}=-8,$

$t\sqrt{t}=-8,\ t\in\varnothing.$

Відповідь: *(4; 1)*.

II). $\begin{cases} x\ge 0, \\ y<0 \end{cases}$ $\begin{cases} |x|=x, \\ |y|=-y. \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+5y=-9, \\ 2x+y=7 \,|\cdot(-5) \end{cases}$ $+\begin{cases} 3x+5y=-9, \\ -10x-5y=-35 \end{cases}$

$$-7x=-44;$$

$x=\frac{-44}{-7}=\frac{44}{7}\ge 0;\ 3\cdot\frac{44}{7}+5y=-9;\ 5y=-9-\frac{132}{7}=\frac{-195}{7};\ y=-\frac{195}{7}:5=-\frac{195}{7{,}5}=-\frac{39}{7}<0.$

$\left(\frac{44}{7};\ -\frac{39}{7}\right)-$ розв'язок системи.

III). $\begin{cases} x \le 0, \\ y \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} |x| = -x, \\ |y| = y. \end{cases}$ $\begin{cases} -3x+5y=-9, \\ 2x-y-7=0 \,|\cdot 5 \end{cases}$ $+\begin{cases} -3x+5y=-9, \\ 10x-5y=35 \end{cases}$

$$7x = 26;$$

$x = \dfrac{26}{7}$ – не задовольняє умову $x \le 0,$ а тому система в цій ОДЗН розв'язків не має.

IV). $\begin{cases} x < 0, \\ y < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} |x| = -x, \\ |y| = -y. \end{cases}$ $\begin{cases} -3x+5y=-9, \\ 2x+y=7 \,|\cdot(-5) \end{cases}$ $+\begin{cases} -3x+5y=-9, \\ -10x-5y=-35 \end{cases}$

$$-13x = 26;$$

$x = \dfrac{26}{-13} = -2 \in$ ОДЗН. $2 \cdot 2 + y = 7;$ $y = 3 \notin$ ОДЗН.

Відповідь: $\left(\dfrac{44}{7};\ -\dfrac{39}{7}\right).$

$$\begin{cases} (x-y)\cdot 0{,}5^{y-x} = 5\cdot 2^{x-y}, \ (1) \\ (x-y)^{\frac{x+y}{7}} = 125 \ (2) \end{cases}$$

Розв'язання:

Перетворимо перше рівняння системи:

$0{,}5^{y-x} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{y-x} = \left(2^{-1}\right)^{y-x} = 2^{x-y},$ $(x-y)\cdot 2^{x-y} = 5\cdot 2^{x-y} \,\Big|: 2^{x-y},$ $x-y=5.$

Підставимо це значення у рівняння *(2)*:

$5^{\frac{x+y}{7}} = 125;$ $5^{\frac{x+y}{7}} = 5^3.$ В силу монотонності показникової функції, маємо:

$\dfrac{x+y}{7} = 3 \to x+y=21$ Утворимо нову систему рівнянь:

$\begin{cases} x+y=21. \\ x-y=5. \end{cases}$ $\begin{matrix} 2x=26, \\ x=13. \end{matrix}$ $\begin{matrix} 13+y=21, \\ y=8. \end{matrix}$

Відповідь: $(13;\ 8).$

$$\begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{x}} = 2, \ (1) \\ (x+y)\cdot 4^x = 64 \ (2) \end{cases}$$

Розв'язання:

Піднесемо рівняння *(1)* до степеня x:

$\left((x+y)^{\frac{1}{x}}\right)^x = 2^x,$ $x+y=2^x.$ Тоді рівняння *(2)* матиме вигляд $2^x\cdot 4^x = 4^3;$

$2^x\cdot 2^{2x} = \left(2^2\right)^3,$ $2^{3x}=2^6,$ $3x=6,$ $x=2,$ $y=2^2-2=2.$

Відповідь: $(2;\ 2).$

$$\begin{cases} 3^{2x-1}\cdot 27^{x+y} = 3, \\ (5x-y)^2 = 36. \end{cases}$$

Розв'язання:

$\begin{cases} 3^{2x-1}\cdot 27^{x+y} = 3, \\ \sqrt{(5x-y)^2} = \sqrt{36}. \end{cases}$ $\begin{cases} 3^{2x-1+3x+3y} = 3^1, \\ |5x-y| = 6. \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5x+3y=2,\\ 5x-y=6\,|\cdot 3\end{cases}\\ \begin{cases}5x+3y=2,\\ 5x-y=-6\,|\cdot 3\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases}5x+3y=2,\\ 15x-3y=18\end{cases}\\ \begin{cases}5x+3y=2,\\ 15x-3y=-18\end{cases}\end{array}\right. \begin{array}{l}\begin{cases}20x=20,\\ 5x+3y=2\end{cases}\\ \begin{cases}20x=-16,\\ 5x+3y=2.\end{cases}\end{array} \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\ y=\dfrac{2-5\cdot 1}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x=-0{,}8,\\ y=\dfrac{2+5\cdot 0{,}8}{3}\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x=1,\\ y=-1\\ x=-0{,}8,\\ y=2.\end{array}\right.$$

Відповідь: $(1;-1),(-0{,}8;2)$.

Системи логарифмічних рівнянь розв'язуються тими самими способами, що й системи алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{cases}x^{\lg y}=100, & (1)\\ \log_y x=2 & (2)\end{cases}$$

Розв'язання:

$x>0,\ y>0,\ y\neq 1.$

Прологарифмуємо рівняння *(1)* з основою 10:

$\lg y\cdot\lg x=\lg 100,\ \ \lg y\cdot \lg x=2.$

За означенням логарифма числа з рівняння *(2)* маємо:

$x=y^2.$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}x=y^2,\\ \lg y\cdot\lg x=2\end{cases} \begin{cases}x=y^2,\\ \lg y\cdot\lg y^2=2\end{cases} \begin{cases}x=y^2,\\ 2\lg^2 y=2\end{cases} \begin{cases}x=y^2,\\ \lg^2 y=1\end{cases}$$

Ця система рівнянь рівносильна такій сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y^2,\\ \lg y=-1;\end{cases}\\ \begin{cases}x=y^2,\\ \lg y=1;\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y^2,\\ y_1=10^{-1};\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=100,\\ y_2=10;\end{cases}\end{array}\right.$$ Відповідь: $(0{,}01;0{,}1),(100;10)$.

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6, & (1)\\ \sqrt[6]{(x+y)^3\cdot(x-y)^2}=8. & (2)\end{cases}$$

Розв'язання:

Друге рівняння системи перетворимо:

$$\sqrt[6]{(x+y)^3\cdot(x-y)^2}=\sqrt[6]{(x+y)^3}\cdot\sqrt[6]{(x-y)^2}=\sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{(x-y)^2}}=\sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{|x-y|}=$$

Якщо $x-y<0$, то $|x-y|=-(x-y)$ $=\sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{-1\cdot(x-y)}=-\sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y};$

Якщо $x-y>0$, то $\sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{|x-y|}=\sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y}.$

Вихідна система рівнянь перетвориться в сукупність систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6,\\ -\sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y}=8;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6,\\ \sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y}=8;\end{cases}\end{array}\right.$$

Нехай $\sqrt{\mathrm{x+y}}=t, t\geq 0$, а $\sqrt[3]{x-y}=l$, тоді

$$\begin{cases}t+l=6,\\ -t\cdot l=8\end{cases}\to\begin{cases}l=6-t,\\ -t\cdot(6-t)=8\end{cases}\to\begin{cases}l=6-t,\\ -6t+t^2-8=0\end{cases}$$

$t^2-6t+8=0$ За теоремою Вієта, маємо: $t_1=2, t_2=4.$

$l_1 = 6-2=4;\ l_2 = 6-4=2.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+y}=2,\\ \sqrt[3]{x-y}=4\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x+y}=4,\\ \sqrt[3]{x-y}=2\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=4, & 2x=68,\\ x-y=64 & x_1=34.\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=16, & 2x=24,\\ x-y=8 & x_2=12\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y_1=4-34,\\ x_1=34\end{cases}\\ \begin{cases}y_1=12-8,\\ x_1=12\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y_1=-30,\\ x_1=34\end{cases} - \text{не виконується умова } x+y>0.\\ \begin{cases}y_1=4,\\ x_1=12\end{cases}\end{array}\right.$$

Розв'яжемо другу систему сукупності:

$$\begin{cases}t+l=6,\\ t\cdot l=8\end{cases} \begin{cases}l=6-t,\\ t\cdot(6-t)=8\end{cases} \begin{cases}l=6-t,\\ -t^2+6t-8=0\end{cases} \begin{cases}l=6-t,\\ t^2-6t+8=0.\end{cases}$$

$$D=36+32=68=4\cdot 17 \quad t_1=\frac{6-2\sqrt{17}}{2}=3-\sqrt{17};\ \ t_2=3+\sqrt{17};$$

$l_1=3+\sqrt{17};\ l_2=3-\sqrt{17}.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+y}=3-\sqrt{17},\\ \sqrt[3]{x-y}=3+\sqrt{17},\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x+y}=3-\sqrt{17},\\ \sqrt[3]{x-y}=3-\sqrt{17},\end{cases}\end{array}\right. \begin{array}{l}\begin{cases}x+y=9-6\sqrt{17}+17,\\ x-y=27+3\cdot 9\sqrt{17}+3\cdot 3\cdot 7+\left(\sqrt{17}\right)^3\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=26+6\sqrt{17},\\ x-y=27-27\sqrt{17}+103+17\sqrt{17}\end{cases}\end{array} \begin{array}{l}\begin{cases}x+y=26-6\sqrt{17},\\ x-y=180+44\sqrt{17}\end{cases}\\ \begin{cases}x=78-13\sqrt{17},\\ y=-12+19\sqrt{17}\end{cases}\end{array}$$

$2x=206+38\sqrt{17},\ y_1=-76+44\sqrt{17},$

$x=103+19\sqrt{17},\ y_2=-12+19\sqrt{17}.$

Відповідь: $(12;\ 4)$, $\left(103+19\sqrt{17};\ -76+44\sqrt{17}\right)$, $\left(78-19\sqrt{17};\ -12+19\sqrt{17}\right)$.

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{4},\\ 2x+3y-5z+19=0.\end{cases}$$

Розв'язання:

Позначимо $t=\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{4}$. Звідси: $2t=x-1,\ x=2t+1.$

$3t=y+3,\ y=3t-3,\ 4t=z-1,\ z=4t+1.$

$2\cdot(2t+1)+3\cdot(3t-3)-5\cdot(4t+1)+19=0,$

$4t+2+9t-9-20t-5+19=0,\ -7t+7=0,\ t=1;$

$x=2\cdot 1+1=3;\ \ y=3\cdot 1-3=0;\ \ z=4\cdot 1+1=5.$

Відповідь: $(3;0;5)$.

$$\begin{cases}x+y+z=4,\\ 2xy-z^2=16.\end{cases}$$

Розв'язання:

Піднесемо перше рівняння до квадрату і віднімемо друге рівняння:

$$-\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=16 \\ 2xy-z^2=16 \end{cases}$$

$$x^2+y^2+2z^2+2xz+2yz=0, \qquad \left(x^2+2xz+z^2\right)+\left(y^2+2yz+z^2\right)=0,$$

$$(x+z)^2+(y+z)^2=0.$$

Ця рівність можлива тільки тоді, коли

$(x+z)^2=0$ і $(y+z)^2=0$

$x+z=0 \qquad y+z=0$

$x=-z; \qquad y=-z.$

Підставляючи ці значення в перше рівняння вихідної системи, одержимо:

$-z-z+z=4, \;\; z=4.$

$x_1=-4; \;\; y=-4.$

Відповідь: $(-4;-4;4)$.

Особливої уваги заслуговує спосіб розв'язування такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} (x)^{2y^2-1}=5, \\ x^{y^2+2}=125. \end{cases}$$

Розв'язання:

Прологарифмуємо кожне з рівнянь системи з основою 5:

$$\begin{cases} \left(2y^2-1\right)\cdot\log_5 x=\log_5 x, \\ \left(y^2+2\right)\cdot\log_5 x=\log_5 125. \end{cases} \quad \begin{cases} \left(2y^2-1\right)\cdot\log_5 x=1, & (1) \\ \left(y^2+2\right)\cdot\log_5 x=3. & (2) \end{cases} \quad x>0.$$

Розділимо рівняння *(2)* на *(1)*:

$$\frac{\left(y^2+2\right)\cdot\log_5 x}{\left(2y^2-1\right)\cdot\log_5 x}=\frac{3}{1}; \;\; \frac{y^2+2}{2y^2-1}=\frac{3}{1}; \;\; y^2+2=\left(2y^2-1\right)\cdot 3, \;\; y^2+2=6y^2-3, \;\; -5y^2=-5,$$

$y^2=1, \;\; y_1=-1; \;\; y_2=1.$

$x^{2\cdot(-1)^2-1}=5, \;\; x_1=5, \;\; x^{2\cdot 1^2-1}=5, \;\; x_2=5.$

Відповідь: $(5;-1),(5;1)$.

$$\begin{cases} 2^x\cdot 3^y=6, \\ 3^x\cdot 4^y=12. \end{cases}$$

Розв'язання:

$\begin{cases} 2^x\cdot 3^y=2\cdot 3, \\ 3^x\cdot 4^y=2^2\cdot 3. \end{cases}$ Прологарифмуємо обидва рівняння з основою 10:

$$\begin{cases} \lg\left(2^x\cdot 3^y\right)\lg(2\cdot 3), \\ \lg\left(3^x\cdot 2^{2y}\right)\lg\left(2^2\cdot 3\right). \end{cases} \quad \begin{cases} x\lg 2+y\lg 3=\lg 2+\lg 3, \\ x\lg 3+2y\lg 2=2\lg 2+\lg 3. \end{cases}$$

Цю систему розв'яжемо способом підстановки:

з першого рівняння виразимо y через x і підставимо в друге рівняння системи:

$$y\lg 3=\lg 2+\lg 3-x\lg 2, \;\; y=\frac{\lg 2+\lg 3-x\lg 2}{\lg 3}.$$

Тоді друге рівняння матиме вигляд:

$$x\lg 3 + 2\cdot\frac{\lg 2+\lg 3 - x\lg 2}{\lg 3}\cdot\lg 2 = 2\lg 2 + \lg 3 \Big| \cdot \lg 3,$$
$$x\lg^2 3 + 2\lg^2 2 + 2\lg 2\cdot\lg 3 - 2\lg^2 2\cdot x = 2\lg 2\cdot\lg 3 + \lg^2 3;$$
$$x\cdot\left(\lg^2 3 - 2\lg^2 2\right) = \lg^2 3 - 2\lg^2 2;\quad x = \frac{\lg^2 3 - 2\lg^2 2}{\lg^2 3 - 2\lg^2 2};\quad x = 1.$$

Значення $x = 1$ підставимо в перше рівняння вихідної системи рівнянь:

$$2^1\cdot 3^y = 6,\ \ 3^y = \frac{6}{2},\ \ 3^y = 3,\ \ y = 1.$$

Відповідь: $(1;1)$.

$$\begin{cases} 2 - \log_2 y = 2\log_2(x+y), \\ \log_2(x+y) + \log_2\left(x^2 - xy + y^2\right) = 1. \end{cases}$$

Розв'язання:

$$2 = \log_2 4;\ 1 = \log_2 2.$$

ОДЗН: $\begin{cases} y > 0, \\ x + y > 0, \\ x^2 - xy + y^2 > 0. \end{cases}$

Система набуває вигляду:

$$\begin{cases} \log_2 4 - \log_2 y = \log_2(x+y)^2, \\ \log_2(x+y) + \log_2\left(x^2 - xy + y^2\right) = \log_2 2. \end{cases}$$

Пропотенціюємо обидва рівняння системи:

$$\begin{cases} \frac{4}{y} = (x+y)^2, \\ (x+y)\cdot\left(x^2 - xy + y^2\right) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4}{y} = (x+y)^2, \quad y \neq 0. \\ x^3 + y^3 = 2 \end{cases}$$

Вводимо заміну $y = tx.$ Система набуває вигляду:

$$\begin{cases} 4 = tx\cdot(x+tx)^2, \\ 2 = x^3 + (tx)^3. \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = tx\cdot\left(x^2 + 2x^2t + x^2t^2\right), \\ 2 = x^3 + x^3t^3. \end{cases} \quad \frac{4}{2} = \frac{tx^3\cdot\left(1+2t+t^2\right)}{x^3\cdot\left(1+t^3\right)};\ \ 2 = \frac{t\cdot(1+t)^2}{(1+t)\left(-t+t^2\right)};$$

$$2 = \frac{t+t^2}{1-t+t^2};\ \ t + t^2 = 2 - 2t + 2t^2;\ \ 2t^2 - 3t^2 - 2t - t + 2 = 0;\ \ t^2 - 3t + 2 = 0;$$

$$t_1 = 1;\ \ t_2 = 2.$$

$$y = 1\cdot x,\ y = x;\ x^3 + x^3 = 2;\ 2x^3 = 2;\ x^3 = 1;\ x = 1.$$

Тоді $y = 1.$ *(1; 1)* - розв'язок системи.

$$y = 2\cdot x,\ x^3 + (2x)^3 = 2;\ x^3 + 8x^3 = 2;\ 9x^3 = 2;\ x^3 = \frac{9}{2};\ \ x = \sqrt[3]{\frac{2}{9}} = \sqrt[3]{\frac{2\cdot 3}{9\cdot 3}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{3};\ \ y_2 = \frac{2\sqrt[3]{6}}{3}.$$

Відповідь: $(1;1), \left(\frac{\sqrt[3]{6}}{3};\frac{2\sqrt[3]{6}}{3}\right).$

$$\begin{cases} y^{5x^2 - 51x + 10} = 1, \\ xy = 15. \end{cases}$$

Розв'язання:

$$1 = y^0,\ \ \begin{cases} y^{5x^2 - 51x + 10} = y^0, \\ xy = 15. \end{cases} \quad \begin{cases} 5x^2 - 51x + 10 = 0, \\ xy = 15. \end{cases}$$

$D=2601-200=2401=49^2$, $x_1=\dfrac{51-40}{10}=0{,}2$; $x_2=\dfrac{51+49}{10}=10.$

$y_1=\dfrac{15}{0{,}2}=75$; $y_2=\dfrac{15}{10}=1{,}5.$

Відповідь: $(0{,}2;75),(10;1{,}5).$

$$\begin{cases} x^y=2, & (1)\\ (2x)^{y^2}=64. & (2)\end{cases}$$

Розв'язання:

$x>0$ як основа показникової функції.

Перетворимо рівняння *(2)*:

$(2x)^{y^2}=64$, $(2x)^{y^2}=2^6$, $2^{y^2}\cdot x^{y^2}=2^6$, $2^{y^2}\cdot\left(x^y\right)^y=2^6$. Враховуючи рівність *(1),* маємо:

$2^{y^2}\cdot 2^y=2^6$, $2^{y^2+y}=2^6$, $y^2+y=6$, $y^2+y-6=0.$

За теоремою Вієта: $y_1=-3$, $y_2=2.$

$x^{-3}=2$, $\dfrac{1}{x^3}=2$; $x^3=\dfrac{1}{2}$; $x_1=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{4}{8}}=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$; $x^2=2$,

$x=-\sqrt{2}$ – не задов. умову $x>0.$

$x_2=\sqrt{2}.$

Відповідь: $\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2};-3\right),\left(\sqrt{2};2\right).$

$$\begin{cases} y\cdot x^{\log_y x}=x^{2,5} & (1)\\ \log_3 y\cdot\log_y(y-2x)=1 & (2)\end{cases}$$

Розв'язання:

ОДЗН: $\begin{cases} x>0,\\ y>0,\\ y>2x.\end{cases}$ Прологарифмуємо рівняння (1) з основою 3:

$\log_3\left(y\cdot x^{\log_y x}\right)=\log_3 x^{2,5}$;

$\log_3 y+\log_y x\cdot\log_3 x=2{,}5\cdot\log_3 x \,|\log_3 y$,

$(\log_3 y)^2+\log_y x\cdot\log_3 x\cdot\log_3 y=2{,}5\cdot\log_3 x\cdot\log_3 y$;

$(\log_3 y)^2+\dfrac{\log_3 x}{\log_3 y}\cdot\log_3 x\cdot\log_3 y-2{,}5\cdot\log_3 x\cdot\log_3 y=0$;

$(\log_3 y)^2-2{,}5\cdot\log_3 x\cdot\log_3 y+(\log_3 x)=0 \,|:(\log_3 x\cdot\log_3 y)$;

$\dfrac{\log_3 y}{\log_3 x}-2{,}5+\dfrac{\log_3 x}{\log_3 y}=0.$ Позначимо $\dfrac{\log_3 y}{\log_3 x}=t$, тоді $t-25+\dfrac{1}{t}=0$, $\begin{cases} t^2-2{,}5t+1=0,\\ t\neq 0\end{cases}$

$D=6{,}25-4=2{,}25.$

$t_1=\dfrac{2{,}5-1{,}5}{2}=\dfrac{1}{2}$; $t_2=\dfrac{2{,}5+1{,}5}{2}=2.$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{\log_3 y}{\log_3 x}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{\log_3 y}{\log_3 x}=2.\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\log_3 x=2\log_3 y,\\ \log_3 y=2\log_3 x.\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\log_3 x=\log_3 y^2,\\ \log_3 y=\log_3 x^2.\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x=y^2,\\ y=x^2.\end{array}\right.$$

В рівнянні *(2)* вихідної системи перейдемо до основи логарифмів 3:

$$\log_3 y\cdot\frac{\log_3(y-2x)}{\log_3 y}=1,\ \log_3(y-2x)=1,\ y-2x=3.$$

Якщо $x=y^2$, то $y-2\cdot y^2-3=0,\ 2y^2-y+3=0$

$D=1-24=-23<0,\ y\in\varnothing.$

Якщо $y=x^2$, то $x^2-2x-3=0,\ x_1=-1$ не задов. умову $x>0.\ x_2-3.$

$y=2x+3=2\cdot 3+3=9.$

Відповідь: $(3;9)$.

$$\begin{cases}\lg\sqrt{(x+y)^2}=1,\\ \lg y-\lg|x|=\lg 2.\end{cases}$$

Розв'язання:

ОДЗН:

$$\begin{cases}x+y\neq 0,\\ y>0,\\ x\neq 0.\end{cases} \begin{cases}\lg|x+y|=1,\\ \lg y=\lg 2+\lg|x|.\end{cases} \quad x+y>0.$$

$$\begin{cases}|x+y|=10,\\ \lg y=\lg(2|x|).\end{cases} \begin{cases}x+y=\pm 10,\\ y=2|x|.\end{cases} \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=10,\\ y=2x.\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=10,\\ y=-2x.\end{cases}\end{array}\right. \begin{cases}x+2x=10,\\ y=2x.\end{cases} \begin{cases}3x=10,\\ y=2x.\end{cases} \begin{cases}x=\dfrac{10}{3},\\ y=\dfrac{20}{3}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-2x=10,\\ y=-2x.\end{cases} \begin{cases}-x=10,\\ y=20.\end{cases} \begin{cases}x=-10,\\ y=20.\end{cases}$$

Відповідь: $\left(\frac{10}{3};\frac{20}{3}\right),(-10;20)$.

Розв'язування систем тригонометричних рівнянь зводиться до одного з трьох випадків:

а) шляхом тотожних перетворень систему зводять до одного рівняння з однією змінною;

б) приходять до системи рівнянь тільки з аргументами;

в) утворюється система рівнянь відносно тригонометричних функцій цих аргументів.

Дуже поширена така система тригонометричних рівнянь:

$$\begin{cases}\sin x\cdot\cos x=-0{,}5, & (1)\\ \cos x\cdot\sin y=0{,}5. & (2)\end{cases}$$

Розв'язання:

Неважко помітити, що ліві частини рівнянь *(1)* і *(2)* являють собою частини формул синуса суми або різниці аргументів. Звідси випливає спосіб розв'язування цієї системи. Додаючи рівняння *(1)* і *(2)* та отримаємо нову систему тригонометричних рівнянь:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y + \cos y \cdot \sin x = 0, \\ \cos x \cdot \sin y - \sin x \cdot \cos y = 1. \end{cases} \begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(y-x) = 1. \end{cases}$$

Використовуючи окремі випадки розв'язування рівнянь виду $\sin x = a,$ маємо: Цю систему зручно розв'язувати способом додавання:

$$\begin{cases} x + y = \pi n, \ n \in Z, \\ y - x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in Z. \end{cases}$$

$2y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n + 2k\pi, \ \ y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2} + k\pi.$ Значення y підставимо в перше рівняння цієї системи:

$$x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} + k\pi = \pi n, \ \ x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} - k\pi.$$

Відповідь: $\left(-\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2} - k\pi; \ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2} + k\pi \right), \ n \in Z, \ k \in Z.$

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2\sin y. \end{cases}$$

Розв'язання:

Цю систему доцільно розв'язувати способом підстановки:

$$\begin{cases} y = x - \dfrac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2 \cdot \left(\sin x \cdot \cos\dfrac{5\pi}{3} - \cos x \cdot \sin\dfrac{5\pi}{3} \right); \end{cases} \begin{cases} y = x - \dfrac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2 \cdot \left(\sin x \cdot \dfrac{1}{2} - \cos x \dfrac{\sqrt{3}}{2} \right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - \dfrac{5\pi}{3}, \\ \sin x = \sin x - \sqrt{3} \cdot \cos x; \end{cases} \begin{cases} y = x - \dfrac{5\pi}{3}, \\ \cos x = 0; \end{cases} \begin{cases} y = x - \dfrac{5\pi}{3}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z. \end{cases}$$

$$y = \frac{\pi}{2} + \pi n - \frac{5\pi}{3} = \pi n + \frac{3\pi - 10\pi}{6} = \pi n - \frac{7\pi}{6}, \ n \in Z.$$

Відповідь: $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \ \pi n - \dfrac{7\pi}{6} \right), \ n \in Z.$

$$\begin{cases} tgx + tgy = 1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Розв'язання:

В системах рівнянь такого типу потрібно шукати область визначення системи.

Оскільки $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$ то область визначення системи:

$$\begin{cases}\cos x \neq 0,\\ \sin x \neq 0.\end{cases} \quad \begin{cases}x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z,\\ y \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.\end{cases}$$

Вихідна система рівнянь аналогічна до попередньої, а тому може бути розв'язана способом підстановки.

$$\begin{cases}y = \dfrac{\pi}{4} - x,\\ tgx + tg\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 1.\end{cases} \quad \begin{cases}y = \dfrac{\pi}{4} - x,\\ tgx + \dfrac{tg\dfrac{\pi}{4} - tgx}{1 + tg\dfrac{\pi}{4} \cdot tgx} = 1.\end{cases} \quad \begin{cases}y = \dfrac{\pi}{4} - x,\\ tgx + \dfrac{1 - tgx}{1 + tgx} = 1 \,\Big|\cdot (1 + tgx).\end{cases}$$

$$\begin{cases}y = \dfrac{\pi}{4} - x,\\ tgx + tg^2 x + 1 - tgx - tgx - 1 = 0.\end{cases} \quad \begin{cases}y = \dfrac{\pi}{4} - x,\\ tg^2 x - tgx = 0.\end{cases} \quad \begin{cases}y = \dfrac{\pi}{4} - x,\\ tg(tgx - 1) = 0.\end{cases}$$

Ця система рівносильна такій сукупності систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}tgx = 0,\\ y = \dfrac{\pi}{4} - x;\end{cases}\\ \begin{cases}tgx - 1 = 0,\\ y = \dfrac{\pi}{4} - x;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = \pi n,\ n \in Z,\\ y = \dfrac{\pi}{4} - \pi n,\ n \in Z;\end{cases}\\ \begin{cases}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z,\\ y = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} - k\pi,\ n \in Z.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $\left(\pi n;\ \dfrac{\pi}{4} - \pi n\right),\ n \in Z,\ \left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi;\ -k\pi\right),\ k \in Z.$

$$\begin{cases}\sin x \cdot \sin y = 0{,}75,\\ tgx \cdot tgx = 3.\end{cases}$$

Розв’язання:

Встановимо ОДЗН:

$$\begin{cases}\cos x \neq 0,\\ \cos y \neq 0.\end{cases} \quad \begin{cases}x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z,\\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z.\end{cases}$$

Розділимо перше рівняння на друге:

$$\frac{\sin x \cdot \sin y}{tgx \cdot tgy} = \frac{0{,}75}{3};\quad \frac{\sin x \cdot \sin y}{\dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x}} = 0{,}25;\quad \cos x \cdot \cos y = 0{,}25\ \ (A)$$

Замінимо друге рівняння системи рівнянням *(A)*:

$$\begin{cases}\sin x \cdot \sin y = 0{,}75, \quad (B)\\ \cos x \cdot \cos y = 0{,}25. \quad (C)\end{cases}$$

Додамо рівняння *(B)* і *(C)*:

$\sin x \cdot \sin y + \cos x \cdot \cos y = 1$ *(D)*.

Віднімемо рівняння C і B:

$\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y = -0{,}5$ *(E)*

Ліві частини рівнянь D і E являють собою косинус різниці і косинус суми відповідно. Маємо систему рівнянь еквівалентну вихідній системі:

$$\begin{cases} \cos(x-y)=1, \\ \cos(x+y)-0{,}5. \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=2\pi n,\ n\in Z. \\ x+y=\pm\arccos(-0{,}5)+2k\pi,\ k\in Z. \end{cases}$$

Ця система рівносильна сукупності систем:

$$\left[\begin{array}{l} +\begin{cases} x-y=2\pi n, \\ x+y=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi. \end{cases} \\ +\begin{cases} x-y=2\pi n, \\ x+y=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi. \end{cases} \end{array}\right. \begin{array}{l} 2x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi+2\pi n, \\ 2x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi+2\pi k. \end{array} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi+\pi n, \\ y=\dfrac{\pi}{3}+k\pi-2\pi n. \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi+\pi k, \\ y=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi-\pi n. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\pi}{3}+\pi(n+k), k\in Z. \\ y_1=\dfrac{\pi}{3}+\pi(k-n), n\in Z. \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-\dfrac{\pi}{3}+\pi(n+k), k\in Z. \\ y_2=-\dfrac{\pi}{3}+\pi(k-n), n\in Z. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(\dfrac{\pi}{3}+\pi(n+k); \dfrac{\pi}{3}+\pi(k-n)\right), n\in Z, k\in Z.\ \left(-\dfrac{\pi}{3}+\pi(k+\pi); -\dfrac{\pi}{3}+\pi(k-n)\right).$

$$\begin{cases} \sin^2 x+\cos^2 x=0{,}5, \\ x+y=\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Розв'язання:

Понизимо степінь синуса і косинуса першого рівняння системи:

$$\begin{cases} \dfrac{1-\cos 2x}{2}+\dfrac{1+\cos 2y}{2}=0{,}5\,\Big|\cdot 2; \\ x+y=\dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 1-\cos 2x+1+\cos 2y=1, \\ x+y=\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2y-\cos 2x=-1, \\ x+y=\dfrac{\pi}{4}. \end{cases} \quad \begin{cases} -2\sin\dfrac{2y+2x}{2}\cdot\sin\dfrac{2y-2x}{2}=-1, \\ x+y=\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin(x+y)\cdot\sin(y-x)=1, \\ x+y=\dfrac{\pi}{4}. \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sin\dfrac{\pi}{4}\cdot\sin(x-y)=-1, \\ x+y=\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin(x-y)=-1,\ \ \sin(x-y)=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ x-y=(-1)^n\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi.$$

$$+\begin{cases} x-y=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{\pi}{4}+2\pi n, \\ x+y=\dfrac{\pi}{4}. \end{cases} \quad 2x=\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ x=\frac{\pi}{8}+(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in Z.$$

$y=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}-(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{8}-\pi n=\frac{\pi}{8}\cdot\left(1-(-1)^{n+1}\right)-\pi n,\ n\in Z.$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{8}+(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{8}+\pi n\right);\ \left(\frac{\pi}{8}\cdot\left((-1)^{n+1}\right)-\pi n\right), n\in Z.$

Завдання для самостійної роботи:

$\begin{cases} x^2y+xy^2-x^2-4xy-2y^2+3x+4y=2, \\ x-2y=1. \end{cases}$

Відповідь: $(1;0),(3;1),\left(2;\frac{1}{2}\right).$

$\begin{cases} x+y=7, \\ xy=-18. \end{cases}$

Відповідь: $(-2;9),(9;-2).$

$\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ x+y=10. \end{cases}$

Відповідь: $(6;4).$

$\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ xy=8. \end{cases}$

Відповідь: $(-2;-4),(2;4),(-4;-2),(4;2).$

$\begin{cases} x^2+2xy-8y^2-6x+18y-7=0, \\ 2x^2-5xy-10y^2-3x+9y+7=0. \end{cases}$

Відповідь: $(-3;-1),(-1;2),(1;1),(3;1).$

$\begin{cases} x^3+y^3=1, \\ x^2y+2xy^2+y^2=2. \end{cases}$

Відповідь: $\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3};\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right),\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2};\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right).$

$\begin{cases} x^2+2xy-8y^2-6x+18y-7=0, \\ 2x^2-5xy-10y^2-3x+9y+7=0. \end{cases}$

Відповідь: $(-3;-1),(-1;2),(1;1),(3;1).$

$\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=481, \\ x^2+xy+y^2=37. \end{cases}$

Відповідь: $(-3;-4),(-4;-3),(3;-4),(4;3).$

$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\frac{5}{2}\sqrt[6]{xy},\ (xy\ge 0). \\ x+y=65. \end{cases}$

Відповідь: $(1;64),(64;1).$

$\begin{cases} |x-y|+y^2=3, \\ |x-y|+|y-1|=2. \end{cases}$

Відповідь: $(-1;1),(1;-1)$.

$$\begin{cases}\cos^2 x+\cos^2 y=1{,}5,\\ x+y=\pi.\end{cases}$$

Відповідь: $\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n;\quad \pm\dfrac{5\pi}{6}+\pi(1-2n),\ n\in Z.$

$$\begin{cases}x^2+2xy-7y^2\ge\dfrac{1-a}{a+1},\\ 3x^2+10xy-5y^2\le-2.\end{cases}$$

Відповідь: $(-\infty;\ -1)$.

$$\begin{cases}x^{x-2y}=36,\\ 4(x-2y)+\log_6 x=9.\end{cases}$$ Знайти цілі розв’язки.

Відповідь: $(6;\ 2)$.

$$\begin{cases}x+y+z=14,\\ x+yz=19.\end{cases}$$

Відповідь: $(5;2;7),(7;3;4),(7;4;3),(5;7;2)$.

При яких a система має розв’язки $x>0,\ \ y>0$?

$$\begin{cases}ax+4y=6-9a,\\ 2x+(2+a)y=8.\end{cases}$$

Відповідь: $\left(-4;\dfrac{6}{13}\right)$.

$$\begin{cases}2\log_x 2+8^{2\log_4\sqrt[3]{3y}}=\log_{\sqrt{x}}\left(2x^2\right)-xy,\\ 2^x\cdot4^y=8.\end{cases}$$

Відповідь: $\varnothing$.

$$\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ xy=2.\end{cases}$$

Відповідь: $(-2;0)\cup(0;2)$.

Знайти додатні розв’язки:

$$\begin{cases}x^{y+4x}=y,\\ x^3=y^{-1}.\end{cases}$$

Відповідь: $(-2;3)$.

$$\begin{cases}(2x-3y)^2+5\cdot(2x-3y)-6=0,\\ 2(x+y)^2-5(x+y)+2=0.\end{cases}$$

Відповідь: $\left(\dfrac{7}{5};\dfrac{3}{5}\right),\ \left(\dfrac{1}{2};0\right),\ (0;2),\ \left(-\dfrac{9}{10};\dfrac{7}{5}\right)$.

$$\begin{cases}x^2+y^2=34,\\ x+y+xy=23.\end{cases}$$

Відповідь: $(3;5),(5;3)$.

$$\begin{cases}2^x\cdot3^y=12,\\ 2^y\cdot3^x=18.\end{cases}$$

Відповідь: $(2;1)$.

$$\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$$

Відповідь: $(3;2), (5;1), (1;5), (2;3)$.

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(\frac{3}{2};4\right), (4;-1)$.

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7. \end{cases}$$

Відповідь: $(-1;-2), (2;-1)$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Відповідь: $(1;2), (2;1), (-1;-2), (-2;-1)$.

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - xy - 2x - 3y = 6. \end{cases}$$

Відповідь: $(-2;2), \left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right), (6;2), \left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{cases} \log_5(x + y) = 1, \\ 2^x + 2^y = 12. \end{cases}$$

Відповідь: $(2;3), (3;2)$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{y+1} = 1\dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{1}{y+1} = 1\dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Відповідь: $(3;2)$.

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 3, \\ y^2 - 3xy = 2. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$\begin{cases} x^2 - 6xy + 8y^2 = 0, \\ x^2 + 3y^2 - xy = 45. \end{cases}$$

Відповідь: $(6;\ 3),\ (-6;\ -3),\ (4\sqrt{3};\ \sqrt{3}),\ (-4\sqrt{3};\ -\sqrt{3})$.

$$\begin{cases} \log_y x + \log_y x = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$$

Відповідь: $(5;\ 5)$.

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x + y} = 20, \\ x^2 + y^2 = 136. \end{cases}$$

Відповідь: $(10;\ 6)$, $(6;\ 10)$.

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ x+y=28.\end{cases}$$

Відповідь: $(27;\ 1)$, $(1;\ 27)$.

$$\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=2+\log_3 2,\\ \log_{27}(x+y)=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

Відповідь: $(6;\ 3)$, $(3;\ 6)$.

У відповідь записати $7x-2y$:

$$\begin{cases}5^x\cdot 2^y=3200,\\ \log_{\sqrt{5}}(y-x)=2.\end{cases}$$

У відповідь записати добуток коренів:

$$\begin{cases}x^{\lg y}=4,\\ xy=40.\end{cases}$$

У відповідь записати $15y+2x$:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{15},\\ \log_3 x+\log_3 y=1+\log_3 5.\end{cases}$$

У відповідь записати $2x-y$ для $0<x\le 90^{\circ}$:

$$\begin{cases}\sin^2 x+\sin^2 y=\dfrac{7}{4},\\ x+y=\dfrac{5\pi}{6}.\end{cases}$$

При яких *a* система не має розв’язку?

$$\begin{cases}2x+31y=-23,\\ 2x+2ay=23.\end{cases}$$

Відповідь: 15,5.

У відповідь записати добуток коренів:

$$\begin{cases}2^x\cdot 3^y=6,\\ 3^x\cdot 4^y=12.\end{cases}$$

У відповідь записати добуток $x\cdot y$:

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x+y}=2,\\ (x+y)\cdot 7^x=2744.\end{cases}$$

У відповідь записати найбільше y:

$$\begin{cases}(1+y)^x = 100,\\ (y^4-2y^2+1)^{x-1} = \dfrac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^2}.\end{cases}$$

У відповідь записати найбільшу суму коренів:

$$\begin{cases}x+y+xy=11,\\ x+y-xy=1.\end{cases}$$

У відповідь записати добуток коренів:

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{20y}{x}} = \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y},\\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}.\end{cases}$$

Записати у відповідь xy для $x>0,\ y>0$:

$$\begin{cases}y^{x+y} = x^4,\\ x^{x+y} = y.\end{cases}$$

Відповідь: 1.

При якому m система не має розв'язку:

$$\begin{cases}3x+(m-2)y=1,\\ (m+2)x+4y=2.\end{cases}$$

Відповідь: -4.

Записати у відповідь $6x-7y$:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\log_2 x-\log_4 y=0,\\ x^2-5y^2+4=0.\end{cases}$$

Відповідь: -1.

$$\begin{cases}3^{-x}\cdot 2^y = 1152,\\ \log_{\sqrt{5}}(x+y)=2.\end{cases}$$

Відповідь: $(-2;\ 7)$.

$$\begin{cases}3^x\cdot 2^y = 972,\\ \log_{\sqrt{5}}(x-y)=2.\end{cases}$$

Відповідь: $(5;\ 2)$.

$$\begin{cases}\log_9(x^3+y^3)=\log_3(x+y),\\ \log_3(x^2-y^2)=\log_3(x+y).\end{cases}$$

Відповідь: $(1;\ 0)$, $(2;\ 1)$.

$$\begin{cases} (x+y)\cdot 3^{y-x} = \dfrac{5}{27}, \\ 3\log_5(x+y) = x-y. \end{cases}$$

Відповідь: $(4;\ 1)$.

$$\begin{cases} \log_2 \dfrac{x^2\sqrt{y+1}}{2} = 2, \\ \log_8 x \cdot \log_2 (y+1)^2 = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Відповідь: $(2;\ 3)$, $(\sqrt{2};\ 15)$.

$$\begin{cases} y^2 + 2x = 7, \\ x - 3y = 0. \end{cases}$$

Відповідь: $(-21;\ -7)$, $(3;\ 1)$.

$$\begin{cases} x^2 - y = 1, \\ x - y = -5. \end{cases}$$

Відповідь: $(3;\ 8)$, $(-2;\ 3)$.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Відповідь: $(1;\ 2)$, $(2;\ 1)$.

Знайти добуток коренів:

$$\begin{cases} 3\cdot\left(2\log_{y^2} x + \log_{\frac{1}{x}} y\right) = 10, \\ xy = 81. \end{cases}$$

У відповідь записати $\dfrac{x}{y}$:

$$\begin{cases} \log_2 x = \dfrac{1}{2}\log_2 y + \dfrac{1}{2}\log_2(4-x), \\ \log_2(x+y) = \dfrac{\log_3\left(\dfrac{y}{x}\right)}{\log_3 \dfrac{1}{3}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} tgx - tgy = -2\sqrt{3}, \\ x - y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(\dfrac{2\pi}{3} + k\pi;\ \dfrac{\pi}{3} + k\pi\right)$, $k \in Z$.

$$\begin{cases} \sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\sin\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x \cdot \cos y = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \pm\frac{\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in Z.$

$$\begin{cases} x-y=-\frac{\pi}{6}, \\ \sin x\cdot\sin y=\frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2};\ \frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right),\ k\in Z.$

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{3}, \\ tgx\cdot tgy=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{6}+k\pi;\ \frac{\pi}{6}-k\pi\right),\ k\in Z.$

$$\begin{cases} \sin x\cdot\sin y=\frac{1}{4}, \\ 3tgx=tgy. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{6}+(k+n)\pi;\ \frac{\pi}{3}+(k-n)\pi\right),\ k\in Z,\ n\in Z.$

$$\begin{cases} x\cdot\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=y\cdot\cos^2\left(y+\frac{\pi}{6}\right), \\ x\cdot\cos^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=y\cdot\sin^2\left(y+\frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Відповідь: $(0;\ 0),\ \left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right),\ k\in Z.$

Розв’язування систем рівнянь з трьома і більше змінними потребують крім класичних способів ще й деяких штучних прийомів. Це пояснюється тим, що не завжди вдається гарно виразити одну змінну через інші і таким чином зменшити кількість невідомих в системі.
І друга підстава – не завжди перетворена система рівнянь з меншою кількістю змінних розв’язується порівняно легко.
Проілюструємо це на конкретних вправах.

$$\begin{cases} x\cdot(y-1)=3, & (1) \\ (3-y)\cdot z=1, & (2) \\ (x-2)\cdot(2-z)=1. & (3) \end{cases}$$

Розв'язання:

З рівнянь *(1)* і *(2)* виразимо змінні x і z через y:

$x=\frac{3}{y-1};\ z=\frac{1}{3-y}$ (4); Знайдені значення підставимо в рівняння *(3)*:

$\left(\frac{3}{y-1}-2\right)\cdot\left(2-\frac{1}{3-y}\right)=1.$ Розв’язуємо утворене рівняння:

$y \neq 1$ і $y \neq 3$. $\dfrac{3-2y+2}{y-1} \cdot \dfrac{6-2y-1}{3-y} = 1$; $\dfrac{5-2y}{y-1} \cdot \dfrac{5-2y}{3-y} = 1$;

$(5-2y)^2 = (y-1)\cdot(3-y)$; $25 - 20y + 4y^2 = y^2 + 3y + y - 3$; $5y^2 - 24y + 28 = 0$;

$D = 24^2 - 4\cdot 5 \cdot 28 = 576 - 560 = 16.$

$y_1 = \dfrac{24-4}{10} = 2$; $y_2 = \dfrac{24+4}{10} = 2{,}8.$

Підставляючи ці значення у формули *(4)*, знайдемо:
значення x та z:

$$x_1 = \frac{3}{2-1} = 3;\ x_2 = \frac{3}{2-2{,}8} = \frac{3}{-0{,}8} = -\frac{3}{\frac{4}{5}} = -\frac{15}{4};$$

$$z_1 = \frac{1}{3-2} = 1;\ z_2 = \frac{1}{3-2{,}8} = \frac{1}{0{,}8} = 5.$$

Відповідь: $(3;\ 2;\ 1)$, $\left(-\dfrac{15}{4};\ 2{,}8;\ 5\right)$.

$$\begin{cases} x - y + z = 0, & (1) \\ 3x^2 + 3z^2 + 5xyz = 0, & (2) \\ 2x^3 - 2y^3 - 3xyz = 0. & (3) \end{cases}$$

Розв'язання:

З першого рівняння виразимо z через x та y:
$z = y - x.$ Підставивши це значення z в друге і третє рівняння вихідної системи, дістанемо систему двох рівнянь з двома змінними:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3\cdot(y-x)^2 + 5xy\cdot(y-x) = 0, & (4) \\ 2x^3 - 2y^3 - 3xy\cdot(y-x) = 0. & (5) \end{cases}$$

Друге рівняння цієї системи можна перетворити:

$2\cdot(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2) + 3xy\cdot(x-y) = 0;$

$(x-y)\cdot(2x^2+2xy+2y^2+3xy) = 0;$

$(x-y)\cdot(2x^2+5xy+2y^2) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} x - y = 0, \\ 2x^2 + 5xy + 2y^2 = 0. \end{array}\right.$$

$2x^2 + 5xy + 2y^2 = 0 \,|: xy$; $2\left(\dfrac{x}{y}\right) + 5 + 2\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0.$

Позначимо $\dfrac{x}{y} = t$:

$2\cdot t + 5 + \dfrac{2}{t} = 0,\ \ t \neq 0.$

$2t^2 + 5t + 2 = 0,\ \ D = 25 - 16 = 9.$

$t_1 = \dfrac{-5-3}{4} = -2$; $t_2 = \dfrac{-5+3}{4} = -\dfrac{1}{2}.$

$x = -2y,\ x = -0{,}5y.$

Утворимо сукупність трьох систем рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x^2+3(y-x)+5xy(y-x)=0,\\ x-y=0.\end{cases} \quad (6)\\ \begin{cases}3x^2+3(y-x)+5xy(y-x)=0,\\ x=-2y.\end{cases} \quad (7)\\ \begin{cases}3x^2+3(y-x)+5xy(y-x)=0,\\ x=-0{,}5y.\end{cases} \quad (8)\end{array}\right.$$

Розв'яжемо систему рівнянь *(6)*:

$3x^2+3\cdot 0+5xy\cdot 0=0,\ x_1=0;\ y_1=0.$

Розв'яжемо систему рівнянь *(7)*:

$3\cdot(-2y)^2+3\cdot(y+2y)+5\cdot(-2y)\cdot y\cdot(y+2y)=0,$

$12y^2+9y-30y^3=0 \,|\, :(-3)$

$10y^3-4y^2-3y=0$

$y=0$ або $y^2-4y-3=0,\ D=16+12=28=4\cdot 7$

$y_2=\dfrac{4-2\sqrt{7}}{2}=2-\sqrt{7};\ y_3=2+\sqrt{7};\ x_2=-4+2\sqrt{7};\ x_3=-4-2\sqrt{7}.$

Система *(8)* має розв'язки:

$3\cdot(-0{,}5y)^2+3\cdot(y+0{,}5y)+5\cdot(-0{,}5y)\cdot y\cdot(y+0{,}5y)=0;$

$0{,}75y^2+4{,}5y-3{,}75y^3=0; |:(-0{,}75);\ 5y^3-y^2-6y=0;$

$y\cdot(5y^2-y-6)=0;\ y=0$ або $5y^2-y-6=0;$

$D=1+120=121;\ y_4=\dfrac{1-11}{10}=-1;\ y_5=\dfrac{1+11}{10}=1{,}2;$

$x_4=-0{,}5\cdot(-1)=0{,}5;\ x_5=-0{,}5\cdot 1{,}2=-0{,}6.$

$z_1=0-0=0;\ z_2=2-\sqrt{7}-(-4+2\sqrt{7})=2-\sqrt{7}+4-2\sqrt{7}=6-3\sqrt{7};$

$z_3=2+\sqrt{7}-(-4-2\sqrt{7})=2+\sqrt{7}+4+2\sqrt{7}=6+3\sqrt{7};$

$z_4=-1-0{,}5=-1{,}5;\ z_5=1{,}2+0{,}6=1{,}8.$

Відповідь: $(0;\ 0;\ 0),\ (-4+2\sqrt{7}; 2-\sqrt{7}; 6-3\sqrt{7}),\ (-4-2\sqrt{7};\ 2+\sqrt{7};\ 6+3\sqrt{7}),$ $(0{,}5;\ -1;\ -1{,}5),\ (-0{,}6;\ 1{,}2;\ 1{,}8).$

$$\begin{cases}y+z=3, & (1)\\ z+x=-5, & (2)\\ x+y=4. & (3)\end{cases}$$

Розв'язання:

Додамо ці рівняння:

$2x+2y+2z=2 \,|\, :2;\ x+y+z=1\ \ (4).$

Підставляючи в рівняння *(4)* значення $z+y$, дістанемо $3+x=1,\ x=-2.$

Аналогічно $y-5=1,\ y=6;\ z+4=1,\ z=-3.$

Відповідь: $(-2;\ 6;\ -3).$

$$\begin{cases}yz=-4, & (1)\\ zx=3, & (2)\\ xy=27. & (3)\end{cases}$$

Розв'язання:

Перемножимо ліві частини рівнянь *(1 – 3)*, а також їх праві частини:

$x^2y^2z^2 = -324;\ xyz = \sqrt{-324}.$

Відповідь: $\varnothing$.

$$\begin{cases} zx + xy = -5, & (1) \\ xy + yz = 4, & (2) \\ yz + xz = 3. & (3) \end{cases}$$

Розв'язання:

Додамо рівняння *(1 – 3)*:

$2xy + 2xz + 2yz = 2 \,|: 2,\ \ xy + xz + yz = 1\ (4)$

Послідовно підставляючи рівняння *(1 – 3)* в *(4)*, дістанемо нову систему рівнянь:

$$\begin{matrix} zy - 5 = 1, \\ xz + 4 = 1, \\ xy + 3 = 1. \end{matrix} \quad \begin{cases} zy = 6 & (5) \\ xz = -3 & (6) \\ xy = -2 & (7) \end{cases}$$

Цю систему рівнянь розв’язуємо аналогічно:

$(xyz)^2 = 36,\ \ xyz = \pm 6\ (8)$

Підставляючи послідовно *(6 – 7)* в *(8)*, дістанемо:

$$\begin{matrix} x \cdot 6 = \pm 6; \\ y \cdot (-3) = \pm 6; \\ x \cdot (-2) = \pm 6. \end{matrix} \quad \begin{cases} x = \pm 1; \\ y = \pm 2; \\ z = \pm 3. \end{cases}$$

Відповідь: $(1;\ 2;\ 3),\ (1;\ -2;\ 3),\ (1;\ -2;\ -3),\ (-1;\ 2;\ 3),\ (-1;\ -2;\ 3),\ (-1;\ -2;\ -3).$

$$\begin{cases} (y+z)\cdot(z+x) = 15, & (1) \\ (z+x)\cdot(x+y) = 10, & (2) \\ (x+y)\cdot(y+z) = 6. & (3) \end{cases}$$

Розв'язання:

Перемножимо ліві і праві рівняння системи:

$(x+y)^2 \cdot (x+z)^2 \cdot (y+z)^2 = 900;\ \ ((x+y)\cdot(x+z)\cdot(y+z))^2 = 900.$

$(x+y)\cdot(x+z)\cdot(y+z) = \pm 30;\ (4)$

Підставляючи послідовно *(1 – 3)* в *(4)*, дістанемо сукупність двох систем рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2, \\ y+z=3, \\ z+x=5. \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-2, \\ y+z=-3, \\ z+x=-5. \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2x+2y+2z=10. \\ \\ 2x+2y+2z=-10. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x+y+z=5. \\ \\ x+y+z=-5. \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \begin{cases} 2+z=5, \\ x+3=5. \end{cases} \\ \begin{cases} y+5=5, \\ -2+z=-5, \\ x-3=-5, \\ y-5=-5. \end{cases} \end{array} \quad \begin{cases} z=3, \\ x=2, \\ y=0. \end{cases} \quad \begin{cases} y=0, \\ z=-3, \\ x=-2. \end{cases}$$

Відповідь: $(2;\ 0;\ 3),\ (-2;\ 0;\ -3).$

$$\begin{cases} z+x-y=3, & (1) \\ x+y-z=-5, & (2) \\ y+z-x=1. & (3) \end{cases}$$

Розв'язання:

Додамо рівняння *(1)* і *(2)*:

$$+\begin{array}{l} z+x-y=3, \\ x+y-z=-5. \\ \hline 2x=-2;\ x=-1. \end{array}$$

Додамо рівняння *(2)* і *(3)*:

$$+\begin{cases} x+y-z=-5, \\ y+z-x=1. \end{cases}$$
$$2y=-4;\ y=-2.$$

$$+\begin{cases} z+x-y=3, \\ y+z-x=1. \end{cases}$$
$$2z=4;\ z=2.$$

Відповідь: $(-1;\ -2;\ 2)$.

$$\begin{cases} x^2-(y-z)^2=3, \\ y^2-(z-x)^2=12, \\ z^2-(x-y)^2=1. \end{cases}$$

Розв'язання:

До кожного з рівнянь системи застосуємо формулу різниці квадратів:

$$\begin{cases} (x-y+z)\cdot(x+y-z)=3, & (1) \\ (y-z+x)\cdot(y+z-x)=12, & (2) \\ (z-x+y)\cdot(z+x-y)=4. & (3) \end{cases}$$

Перемножимо ліві і праві частини рівнянь системи:

$$(x+y-z)^2\cdot(y+z-x)^2\cdot(z+x-y)^2=144,$$
$$(x+y-z)\cdot(y+z-x)\cdot(z+x-y)=\pm 12 \quad (4)$$

Послідовно підставляючи *(1 – 3)* в *(4),* дістанемо дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} (y+z-x)\cdot 3=12, \\ (z+x-y)\cdot 12=12, \\ (x+y-z)\cdot 4=12. \end{cases} \text{ і } \begin{cases} (y+z-x)\cdot 3=-12, \\ (z+x-y)\cdot 12=-12, \\ (x+y-z)\cdot 4=-12. \end{cases}$$

$$+\begin{cases} y+z-x=4, & (5) \\ z+x-y=1, & (6) \\ x+y-z=3. & (7) \end{cases} \qquad +\begin{cases} y+z-x=-4, & (8) \\ z+x-y=-1, & (9) \\ x+y-z=-3. & (10) \end{cases}$$

(5)+(6):

$2z=5,\ z=2{,}5.$

(6)+(7):

$2x=4,\ x=2.$

(5)+(7):

$2y=7,\ y=3{,}5.$

(8)+(9):

$2z=-5,\ z=-2{,}5.$

(9)+(10):

$2x=-4,\ x=-2.$

(8)+(10):

$2y=-7,\ y=-3{,}5.$

Відповідь: $(2;\ 3{,}5;\ 2{,}5),\ (-2;\ -3{,}5;\ -2{,}5)$.

$$\begin{cases} \dfrac{xyz}{x+y}=1, \\ \dfrac{2xyz}{y+z}=1, \\ \dfrac{5xyz}{z+x}=1. \end{cases}$$

Розв'язання:

Перевернемо кожне з рівнянь системи:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xyz}=1, \\ \dfrac{y+z}{2xyz}=1 \big| \cdot 2, \\ \dfrac{z+x}{5xyz}=1 \big| \cdot 5. \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x+y}{xyz}=1, \\ \dfrac{y+z}{2xyz}=2, \\ \dfrac{z+x}{5xyz}=5. \end{cases}$$

Розділимо кожний член чисельника дробу на знаменник, вважаючи, що $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}=1, & (1) \\ \dfrac{1}{xz}+\dfrac{1}{xy}=2, & (2) \\ \dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xy}=5. & (3) \end{cases}$$

Після додавання лівих і правих частин рівнянь системи одержимо:

$$\frac{2}{yz}+\frac{2}{xz}+\frac{2}{xy}=8 \big| :2 \quad \frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}=4. \quad (4)$$

Підставляючи *(1 – 3)* в *(4)* матимемо:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{xy}+1=4, \\ \dfrac{1}{yz}+2=4, \\ \dfrac{1}{xz}+5=4. \end{cases} \quad \text{Звідси:} \begin{cases} \dfrac{1}{xy}=3, \\ \dfrac{1}{yz}=2, \\ \dfrac{1}{xz}=-1. \end{cases} \quad \begin{cases} xy=\dfrac{1}{3}, & (5) \\ yz=\dfrac{1}{2}, & (6) \\ xz=-1. & (7) \end{cases}$$

Після перемноження лівої і правої частини рівняння останньої системи, дістанемо:

$$(xyz)^2=-\frac{1}{6} \quad \varnothing.$$

Відповідь: $\varnothing$.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=29, & (1) \\ xy+yz+zx=26, & (2) \\ xy-yz-zx=-14. & (3) \end{cases}$$

Помножимо обидві частини рівняння *(2)* на 2:

$$+\begin{array}{l} 2xy+2yz+2xz=52 \ \ (4). \\ x^2+\ y^2+\ \ z^2=29 \end{array}$$ Додамо рівняння *(1)* і *(4)*:

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz=81.$$

За формулою квадрата тричлена маємо:

$(x+y+z)^2=81,\ x+y+z=\pm 9.$

Додамо рівняння *(2)* і *(3)*:

$2xy=12,\ xy=6.$

Утворимо такі дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} x+y+z=9, \\ xy=6, \\ xy+yz+zx=26. \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x+y+z=-9, \\ xy=6, \\ xy+yz+xz=26. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=9-z, \\ 6+z\cdot(x+y)=26. \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-9-z, \\ 6+z\cdot(y+x)=26. \end{cases}$$

$6+z\cdot(9-z)=26,$

$6+9z-z^2-26=0,$

$z^2-9z+20=0,$

$z_1=4,\ z_2=5;$

$6+z\cdot(-9-z)=26,$

$6-9z-z^2-26=0,$

$z^2+9z+20=0,$

$D=81-80=1,$

$z_1=\dfrac{-9-1}{2}=-5,\ z_2=\dfrac{-9+1}{2}=-4;$

Маємо дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} x+y+4=9, \\ xy=6. \end{cases} \begin{cases} x+y+5=9, \\ xy=6. \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-5=-9, \\ xy=6. \end{cases} \begin{cases} x+y-4=-9, \\ xy=6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases} \begin{cases} x+y=4, \\ xy=6. \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-4, \\ xy=6. \end{cases} \begin{cases} x+y=-5, \\ xy=6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=5-x, \\ x\cdot(5-x)-6=0. \end{cases} \begin{cases} y=4-x, \\ x\cdot(4-x)-6=0. \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-4-x, \\ x\cdot(-4-x)=6. \end{cases} \begin{cases} y=-5-x, \\ x\cdot(-5-x)=6. \end{cases}$$

$-x^2+5x-6=0,\quad -x^2+4x-6=0,\quad -4x-x^2-6=0,\quad -5x-x^2-6=0$

$x^2-5x+6=0,\quad x^2-4x+6=0,\quad x^2+4x+6=0,\quad x^2+5x+6=0$

$x_1=2,\ x_2=3.\quad D=16-24<0\quad D=16-24<0\quad D=25-24=1$

$y_1=3,\ y_2=2.\quad \varnothing \quad \varnothing \quad x_3=\dfrac{-5-1}{2}=-3;\ \ x_4=\dfrac{-5+1}{2}=-2.$

$z_1=4,\ z_2=4.\quad y_3=-5+3=2;\ y_4=-5+2=3.$

$z_3=-5,\ z_4=-5.$

Відповідь: $(2;\ 3),\ (3;\ 2),\ (-3;\ -2),\ (-2;\ -3).$

$$\begin{cases} x+y-z=2, & (1) \\ x^2+y^2+z^2=6, & (2) \\ x^3+y^3-z^3=8. & (3) \end{cases}$$

Розв’язання:

Перетворимо третє рівняння системи:

$x^3+y^3=8+z^3; \to (x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)=8+z^3$ (4).

З першого рівняння системи маємо:

$$\begin{cases} x+y=2+z, & (5) \\ x^2+y^2=6-z^2, & (6) \\ (x+y)^2=(2+z)^2. & (8) \end{cases}$$

З другого рівняння випливає, що $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, $2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)$;

$$xy=\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2} \quad (7)$$

Підставляємо *(6)* і *(8)* в *(7)*:

$$xy=\frac{(2+z)^2-(6-z^2)}{2}=\frac{4+4z+z^2-6+z^2}{2}=\frac{4z+2z-2}{2}=z^2+2z-1 \quad (9)$$

Підставляємо *(5), (6), (9)* в *(4)*:

$(2+z)\cdot(6-z^2-z^2-2z+1)=(2+z)\cdot(4-2z+z^2)$;

$(2+z)\cdot(7-2z^2-2z)-(2+z)\cdot(4-2z+z^2)=0$;

$(2+z)\cdot(7-2z^2-2z-4+2z-z^2)=0$;

$(2+z)\cdot(-3z^2+3)=0$;

$2+z=0, \qquad -3z^2+3=0,$

$z_1=-2. \qquad z^2-1=0,\ (z-1)\cdot(z+1)=0,\ z_2=-1;\ z_3=1.$

Утвориться сукупність трьох систем рівнянь:

$$\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=2, \\ z=-2. \end{cases} \begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=5, \\ z=-1. \end{cases} \begin{cases} x+y=3, \\ x^2+y^2=5, \\ z=-1. \end{cases}$$

Розв'яжемо кожну з цих систем рівнянь:

$y=-x,\quad x^2+(-x)^2=2,\ 2x^2=2,\ x^2=1,\ x_1=-1,\ x_2=1.$

$y_1=1,\ y_2=-1.$

$y=1-x,\ (1-x)^2+x^2=5,\ x^2+1-2x+x^2=5,\ 2x^2-2x-4=0 \,|:2\ \ x^2-x-2=0,$

$x_3=-1,\ x_4=2.$

$y_3=2,\ y_4=-1.$

$y=3-x,\ (3-x)^2+x^2=5,\ 9-6x+x^2+x^2-5=0,\ 2x^2-6x+4=0 \,|:2\ \ x^2-3x+2=0,$

$x_5=1,\ x_6=2.$

$y_5=2,\ y_6=1.$

Відповідь: $(-1;\ 1),\ (1;\ -1),\ (-1;\ 2),\ (2;\ -1),\ (1;\ 2),\ (2;\ 1)$.

$$\begin{cases} x+y+z=-2, & (1) \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=-\dfrac{1}{2}, & (2) \\ xyz=2. & (3) \end{cases}$$

Розв'язання:

Перетворимо рівняння *(2)* з урахуванням рівняння *(3)*:

$$\frac{yz+xz+xy}{xyz}=-\frac{1}{2},\ \frac{yz+xz+xy}{2}=-\frac{1}{2},\ yz+xz+xy=-1.$$

Утворимо систему рівнянь рівносильну вихідній:

$$\begin{cases} x+y+z=-2, & (4)\to \\ yz+xz+xy=-1, & (5)\to \\ xyz=2. & (6) \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-z-2, & (7) \\ (x+y)\cdot z+xy=-1, & (8) \\ xy=\dfrac{2}{z}. & (9) \end{cases}$$

Підставляючи *(7)* і *(9)* у *(8)*, дістанемо:

$$(-z-2)\cdot z+\frac{2}{z}+1=0\Big|\cdot z,\ -z^3-2z^2+z+2=0\to z^3+2z^2-z-2=0.$$

Шукаємо дільники вільного члена: ± 1 і ± 2.

-1: $(-1)^3+2\cdot(-1)^2+1-2=-1+2+1-2=0.$ $z_1=-1.$

$$\begin{array}{r|l} z^3+2z^2-z-2 & z+1 \\ \hline -\ z^3+z^2 \quad\quad & z^2+z-2 \\ \hline z^2-z \quad & \\ -\ z^2+z \quad & \\ \hline -2z-2 & \\ -2z-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$z^2+z-2=0,\ D=1+8=9.$

$z_2=\dfrac{-1-3}{2}=-2;\ z_3=\dfrac{-1+3}{2}=1.$

Підставляємо $z_1=-1$ в рівняння *(7)* і *(9)*:

$$\begin{cases} x+y=1-2, \\ xy=\dfrac{2}{-1}. \end{cases} \begin{cases} x+y=-1, \\ xy=-2. \end{cases} \begin{cases} y=-1-x, \\ x\cdot(-1-x)=-2. \end{cases} \begin{cases} y=-1-x, \\ -x-x^2+2=0. \end{cases}$$

$x^2+x-2=0.$ Підставляємо $z=-2$ в рівняння *(7)* і *(9)*:

$$\begin{cases} x_1=-2, \\ y_1=1, \\ z_1=-1. \end{cases} \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=-2, \\ z_2=-1. \end{cases} \begin{cases} x+y=2-2, \\ xy=\dfrac{-2}{2}. \end{cases} \begin{cases} x+y=0, \\ xy=-1. \end{cases} \begin{cases} y=-x, \\ x\cdot(-x)=-1. \end{cases} \begin{cases} y=-x, \\ -x^2=-1. \end{cases}$$

$x_3=1,\ y_3=-1,\ z_3=-2,\ x_4=-1,\ y_4=1,\ z_4=-2.$

Підставляючи $z=1$ в рівняння *(7)* і *(9)*, дістанемо:

$$\begin{cases} x+y=-1-2, \\ xy=\dfrac{2}{1}. \end{cases} \begin{cases} x+y=-3, \\ xy=2. \end{cases} \begin{cases} y=-3-x, \\ x\cdot(-3-x)=2. \end{cases} \begin{cases} y=-3-x, \\ -3x-x^2-2=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-3-x, \\ x^2+3x+2=0. \end{cases} \quad x_5=-1,\ x_6=-2,\ y_5=-2,\ y_6=-1,\ z_5=1,\ z_6=1.$$

Відповідь: $(-2;\ 1;\ -1)$, $(1;\ -2;\ -1)$, $(1;\ -1;\ -2)$, $(-1;\ 1;\ -2)$, $(-1;\ -2;\ 1)$, $(-2;\ -1;\ 1)$.

Цю систему рівнянь можна було б розв'язати за допомогою узагальненої теореми Вієта, але вона не входить в програму з математики для ЗОШ.

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=1, & (1) \\ y^2+yz+z^2=3, & (2) \\ z^2+zx+x^2=7. & (3) \end{cases}$$

Розв'язання:

Від рівняння *(1)* віднімемо рівняння *(2)*:

$$x^2-y^2+y(x-z)+y^2-z^2=-2 \to x^2-z^2+y(x-z)=-2,$$

$$(x-z)\cdot(x+z)+y\cdot(x-z)=-2,\ \ (x-z)\cdot(x+y+z)=-2\ \ (4)$$

Аналогічно *(2) - (3)*:

$$y^2-z^2+z\cdot(y-x)+z^2-x^2=-4 \to y^2-x^2+z\cdot(y-x)=-4.$$

$$(y-x)\cdot(y+x)+z(y-x)=-4 \to (y-x)\cdot(x+y+z)=-4\ \ (5)$$

Розділимо *(4)* на *(5)*:

$$\frac{(x-z)\cdot(x+y+z)}{(y-x)\cdot(x+y+z)}=\frac{-2}{-4} \to \frac{x-z}{y-x}=\frac{1}{2} \to 2x-2z=y-x,\ \ y=3x-2x\ \ (6)$$

Підставимо *(6)* в *(1)*:

$$x^2+x\cdot(3x-2z)+(3x-2z)^2=1 \to x^2+3x^2-2xz+9x^2-12xz+4z^2=1,$$

$$\begin{cases} 13x^2-14xz+4z^2=1, \\ x^2+xz+z^2=7 \,|\cdot 14 \end{cases} \quad + \begin{cases} 13x^2-14xz+4z^2=1, \\ 14x^2+14xz+14z^2=98 \end{cases}$$

$$27x^2+18z^2=99$$

Розглянемо систему рівнянь:

підстановка $z=tx.$

$$\begin{cases} 13x^2-14x(tx)+4(tx)^2=1, \\ x^2+x(tx)+(tx)^2=7. \end{cases} \quad \begin{cases} 13x^2-14x^2t+4x^2t^2=1, \\ x^2+x^2t+x^2t^2=7. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2\cdot(13-14t+4t^2)=1, \\ x^2\cdot(1+t+t^2)=7. \end{cases} \quad \frac{13-14t+4t^2}{1+t+t^2}=\frac{1}{7};$$

Використовуючи основну властивість пропорції, дістанемо:

$$7\cdot(13-14t+t^2)=(1+t+t^2)\cdot 1 \to 91-98t+28t^2=1+t+t^2;$$

$$91-98t+28t^2-1-t-t^2=0 \to 27t^2-99t+90=0;$$

$$D=99^2-4\cdot 27\cdot 90=9801-9720=81 \to t_1=\frac{99-9}{54}=\frac{90}{54}=\frac{5}{3};\ t_2=\frac{108}{54}=2.$$

$z=\frac{5}{3}x$ або $z=2x.$ Підставляємо ці значення в *(6)*:

$$y=3x-2\cdot\frac{5}{3}x=3x-\frac{10}{3}x=\frac{9x-10x}{3}=-\frac{1}{3}x \text{ або } y=3x-2\cdot 2=3x-4.$$

$$(A)\begin{cases}27x^2+11z^2=99,\\ y=-\dfrac{1}{3}x,\\ z=\dfrac{5}{3}x.\end{cases}\quad (Б)\begin{cases}27x^2+11z^2=99,\\ y=-\dfrac{1}{3}x,\\ z=2x.\end{cases}\quad (В)\begin{cases}27x^2+11z^2=99,\\ y=3x-4,\\ z=\dfrac{5}{3}x.\end{cases}\quad (Г)\begin{cases}27x^2+11z^2=99,\\ y=3x-4,\\ z=2x.\end{cases}$$

Розв'яжемо кожну з цих систем рівнянь:

А): $27x^2+11\cdot\left(\frac{5}{3}x\right)^2=99;\quad 27x^2+\frac{25}{9}x^2=99\big|\cdot 9;\ 243x^2+25x^2=891,$

$268x^2=891,\ x^2=\frac{891}{263},\ x_1=-\sqrt{\frac{891}{263}},\ x_2=\sqrt{\frac{891}{263}}.$

$y_1=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{891}{263}},\ y_2=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{891}{263}},\ z_1=-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{891}{263}},\ z_2=\frac{5}{3}\sqrt{\frac{891}{263}}.$

Б): $27x^2+11\cdot(2x)^2=99;\quad 27x^2+44x^2=99;\ 71x^2=99,$

$x_3=-\sqrt{\frac{99}{71}},\ x_4=\sqrt{\frac{99}{71}}.$

$y_3=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{99}{71}},\ y_4=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{99}{71}},\ z_3=-2\sqrt{\frac{99}{71}},\ z_4=2\sqrt{\frac{99}{71}}.$

В): $x_5=-\sqrt{\frac{891}{263}},\ x_6=\sqrt{\frac{891}{263}},$

$y_5=-3\sqrt{\frac{891}{263}}-4,\ y_6=3\sqrt{\frac{891}{263}}-4,\ z_5=-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{891}{263}},\ z_6=\frac{5}{3}\sqrt{\frac{891}{263}}.$

Г): $x_7=-\sqrt{\frac{99}{71}},\ x_8=\sqrt{\frac{99}{71}},$

$y_7=-3\sqrt{\frac{99}{71}}-4,\ y_8=3\sqrt{\frac{99}{71}}-4,\ z_7=-2\sqrt{\frac{99}{71}},\ z_8=2\sqrt{\frac{99}{71}}.$

Відповідь:

$$\left(-\sqrt{\frac{891}{263}};\frac{1}{3}\sqrt{\frac{891}{263}};-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{891}{263}}\right),\left(\sqrt{\frac{891}{263}};-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{891}{263}};\frac{5}{3}\sqrt{\frac{891}{263}}\right),\left(-\sqrt{\frac{99}{71}};\frac{1}{3}\sqrt{\frac{99}{71}};-2\sqrt{\frac{99}{71}}\right),$$

$$\left(\sqrt{\frac{99}{71}};-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{99}{71}};2\sqrt{\frac{99}{71}}\right),\left(-\sqrt{\frac{891}{263}};-3\sqrt{\frac{891}{263}}-4;-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{891}{263}}\right),\left(\sqrt{\frac{891}{263}};3\sqrt{\frac{891}{263}}-4;\frac{5}{3}\sqrt{\frac{891}{263}}\right),$$

$$\left(-\sqrt{\frac{99}{71}};-3\sqrt{\frac{99}{71}}-4;-2\sqrt{\frac{99}{71}}\right),\left(\sqrt{\frac{99}{71}};3\sqrt{\frac{99}{71}}-4;2\sqrt{\frac{99}{71}}\right).$$

$$\begin{cases}(x+y)\cdot(x+z)=x, & (1)\\ (y+z)\cdot(y+x)=2y, & (2)\\ (z+x)\cdot(z+y)=3z. & (3)\end{cases}$$

Розв'язання:

Унікальний спосіб розв’язування.

Якщо $x=0,$ то $(y+z)\cdot(y+x)=2y,\ (y+z)\cdot y=2y,\ y^2+yz=2y,\ y+z=2.$

З рівняння *(1)* випливає $yz=0\Rightarrow y\neq 0, z=0; (0;0;0).$

Нехай $x=y=0,$ тоді з рівняння *(3)* маємо:

$(z+0)\cdot(z+0)=3z,\ \ z^2=3z,\ \ z\cdot(z-3)=0,\ \ z=0$ або $z=3;\ \ (0;0;3).$

Нехай $x=z=y,$ тоді $(y+0)\cdot(y+0)=2y,\ \ y^2-2y=0,\ \ y^2-2y=0,\ \ y=0$ або $y=2;$ $(0;2;0).$

Нехай $y=z=0,$ тоді $(x+0)\cdot(x+0)=x,\ \ x^2-x=0,\ \ x=0,\ \ x=1;\ \ (1;0;0).$

Нехай $x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0.$

Ділимо *(1)* на *(2)*:

$$\frac{(x+y)\cdot(x+z)=x}{(y+z)\cdot(x+y)=2y};\ \ \frac{x+z}{y+z}=\frac{x}{2y}.$$

Ділимо *(2)* на *(3)*:

$$\frac{(y+z)\cdot(y+x)=2y}{(z+x)\cdot(z+y)=3z};\ \ \frac{y+x}{z+x}=\frac{2y}{3z}.$$

Застосовуючи основну властивість пропорції, дістанемо:

$$\begin{cases}(x+z)\cdot 2y=(y+z)\cdot x, & \to\\ (y+x)\cdot 3z=(z+x)\cdot 2y. & \to\end{cases}\begin{cases}2xy+2zy=yx+xz,\\ 3yz+3xz=2yz+2xy.\end{cases}$$

$$\begin{cases}xy+2yz-xz=0, & (4)\\ 2xy-yz-3xz=0. & (5)\end{cases}\to +\begin{cases}xy+2yz-xz=0,\\ 4xy-2yz-6xz=0.\end{cases}$$

$$5xy-7xz=0,\ \ x(5y-7y)=0, x\neq 0,\ \text{тоді}\ 5y-7z=0,\ y=\frac{7}{5}z.$$

Це значення підставляємо в рівняння *(4)*:

$$x\cdot\frac{7}{5}z+2\cdot\frac{7}{5}z\cdot z-xz=0,\ \ \frac{7}{5}zx+\frac{14}{5}z^2-xz=0,\ \ \frac{2}{5}zx+\frac{14}{5}z^2=0;\ \ z\cdot\left(\frac{2}{5}x+\frac{14}{5}z\right)=0, z\neq 0,$$

тоді $\frac{2}{5}x+\frac{14}{5}z=0\big|\times 5,\ 2x=-14z,\ x=-7z.$ Значення *x* та *y* підставимо в рівняння *(3)*:

$$(z-7z)\cdot\left(z+\frac{7}{5}z\right)=3z,\ \ -6z\cdot 2{,}4z=3z\big|:3z, -2z\cdot 2{,}4=1;$$

$$z=-1:4\frac{8}{10}=1:\left(-4\frac{4}{5}\right)=-1:\frac{24}{5}=-\frac{5}{24};$$

$$y=\frac{7}{5}\cdot\left(-\frac{5}{24}\right)=-\frac{7}{24};\ \ x=-7\cdot\left(-\frac{5}{24}\right)=-\frac{35}{24}.$$

Відповідь: $(0;0;0),(0;0;3),(0;2;0),(1;0;0),\left(\frac{35}{24};-\frac{7}{24};-\frac{5}{24}\right).$

$$\begin{cases}3x-\sqrt[4]{x+7y}=2y,\\ \sqrt{x+y}+2y=3x.\end{cases}$$

Розв'язання:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{x+7y}=3x-2y,\\ \sqrt{x+y}=3x-2y.\end{cases}$$ Доцільно зробити заміну $3x-2y=a$ (1)

Тоді $\begin{cases}\sqrt[4]{x+7y}=a,\\ \sqrt{x+y}=a.\end{cases}\ \ \begin{cases}x+7y=a^4,\\ x+y=a^2\big|\cdot(-1).\end{cases}\ \ \begin{cases}x+7y=a^4,\\ -x-y=-a^2\big|\cdot 7.\end{cases}$

Додаючи рівняння останньої системи, дістанемо значення x та y:

$$6y=a^4-a^2,\ \ y=\frac{a^4-a^2}{6},$$

$$\begin{cases} x+7y=a^4, \\ x+y=a^2 \big| \cdot(-7) \end{cases} \quad + \begin{cases} x+7y=a^4, \\ -7x-7y=7a^2 \end{cases} \qquad x=\frac{7a^2-a^4}{6}.$$

$$-6x=a^4-7a^2$$

Підставляючи ці значення x та y в заміну *(1)* дістанемо:

$$3\cdot\frac{7a^2-a^4}{6}-2\cdot\frac{a^4-a^2}{6}=a\big|\cdot 6,\;\; 21a^2-3a^4-2a^4+2a^2=6a,$$

$$-5a^4+23a^2-6a=0\big|\cdot(-1),\;\; 5a^4-23a^2+6a=0,\;\; a\cdot\left(5a^3-23a+6\right)=0,\;\; a_1=0;$$

$$5a^3-23a+6=0.\;\; a_2=2,\text{ бо } 5\cdot 2^3-23\cdot 2+6=0.$$

$$\begin{array}{r|l} -\;5a^3-23a+6 & a-2 \\ \cline{2-2} 5a^3-10a^2 & 5a^2+10a-3 \\ \cline{1-1} -\;10a^2-23a & \\ 10a^2-20a & \\ \cline{1-1} -\;3a+6 & \\ 3a+6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$D=100+60=160,$$

$$a_1=\frac{-10-\sqrt{160}}{10}=\frac{-10-2\sqrt{40}}{10}=$$

$$=\frac{-10-4\sqrt{10}}{10}=-\frac{5+2\sqrt{10}}{5}<0,\;\; a>0.$$

$$a_3=\frac{-5+2\sqrt{10}}{5}>0.$$

Тоді $x_1=\dfrac{7\cdot 0^2-2^4}{6}=0;\;\; y_1=\dfrac{0^4-0^2}{6}=0.\qquad (0;\;0).$

$$x_2=\frac{7\cdot 2^2-2^4}{6}=2;\;\; y_2=\frac{2^4-2^2}{6}=\frac{16-4}{6}=2.\qquad (2;\;2).$$

$$x_3=\frac{7\cdot\left(\dfrac{-5+2\sqrt{10}}{5}\right)^2-\left(\dfrac{-5+2\sqrt{10}}{5}\right)^4}{6}=\frac{7\cdot\dfrac{25-20\sqrt{10}+40}{25}-\left(\dfrac{65-20\sqrt{10}}{25}\right)^2}{6}=$$

$$=\frac{\dfrac{455\cdot 140\sqrt{10}}{25}-\dfrac{4225-2600\sqrt{10}+4000}{625}}{6}=\frac{\dfrac{11375-3500\sqrt{10}-4225+2600\sqrt{10}-4000}{625}}{6}=$$

$$=\frac{\dfrac{3150-900\sqrt{10}}{625}}{6}=\frac{3150-900\sqrt{10}}{3750}=\frac{315-90\sqrt{10}}{375}=\frac{63-18\sqrt{10}}{75}=\frac{21-6\sqrt{10}}{25}.$$

$$y_3=\frac{a^4-a^2}{6}=\frac{\left(\dfrac{2\sqrt{10}-5}{5}\right)^4-\left(\dfrac{2\sqrt{10}-5}{5}\right)^2}{6}=\frac{\left(\dfrac{40-20\sqrt{10}+25}{25}\right)^2-\dfrac{40-20\sqrt{10}+25}{25}}{6}=$$

$$=\frac{\left(\dfrac{65-20\sqrt{10}}{25}\right)^2-\left(\dfrac{65-20\sqrt{10}}{25}\right)}{6}=\frac{\dfrac{4225-2600\sqrt{10}+4000}{625}-\dfrac{56-20\sqrt{10}}{25}}{6}=$$

$$=\frac{8295-2600\sqrt{10}-1625+500\sqrt{10}}{625\cdot 6}=\frac{6600-2100\sqrt{10}}{3750}=\frac{660-210\sqrt{10}}{375}=$$

$$=\frac{132-42\sqrt{10}}{75}=\frac{44-14\sqrt{10}}{25}.$$

Відповідь: $(0;0),(2;2),\left(\frac{21-6\sqrt{10}}{25};\frac{44-14\sqrt{10}}{25}\right).$

$$\frac{y+z-x}{4}=\frac{x+z-y}{16}=\frac{x+y-z}{4}=xyz.$$

Розв'язання:

Введемо нову змінну: $\frac{y+z-x}{4}=\frac{x+z-y}{16}=\frac{x+y-z}{4}=xyz=t.$

Утворимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y+z-x=4t, & (1) \\ x+z-y=16t, & (2) \\ x+y-z=4t, & (3) \\ xyz=t. & (4) \end{cases}$$

Додамо рівняння *(1), (2), (3)*:

$x+y+z=24t$ (5)

Віднімемо *(1)* від *(5)*: $2x=20t,\ x=10t.$

Віднімемо *(2)* від *(5)*: $2y=8t,\ y=4t.$

Віднімемо *(3)* від *(5)*: $2z=20t,\ z=10t.$

Знайдені значення x, y і z підставимо в рівняння *(4)*:

$10t\cdot 4t\cdot 10t=t;\ \ 400t^3-t=0,\ \ t\cdot\left(400t^2-1\right)=0;$

$t_1=0,\ \ x_1=0,\ \ y_1=0,\ \ z_1=0.$

$t^2=\frac{1}{400};\ \ x_2=-\frac{1}{2},\ \ y_2=-\frac{1}{5},\ \ z_2=-\frac{1}{2}.$

$t_2=-\frac{1}{20};\ \ x_3=\frac{1}{2},\ \ y_3=\frac{1}{5},\ \ z_3=\frac{1}{2}.$

$t_3=\frac{1}{20}.$

Відповідь: $(0;0;0),\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{5};-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2};\frac{1}{5};\frac{1}{2}\right).$

Завдання для самостійної роботи:

$\begin{cases} x^2+xy=15, \\ y^2+xy=10. \end{cases}$ Відповідь: $(3;2),(-3;-2).$

$\begin{cases} y^2+xy=231, \\ x^2+xy=210. \end{cases}$ Відповідь: $(10;11),(-10;-11).$

$\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x+y=5. \end{cases}$ Відповідь: $(2;3),(3;2),(-2;-3),(-3;-2).$

$$\begin{cases} x \cdot y = 12, \\ xz = 15, \\ yz = 20. \end{cases}$$ Відповідь: $(3; 4; 5), (-3; -4; -5)$.

$$\begin{cases} xy + xz = 7, \\ xy + yz = 15, \\ yz + xz = 16. \end{cases}$$ Відповідь: $(1; 3; 4), (-1; -3; -4)$.

$$\begin{cases} x^2 + xy - xz = 2, \\ y^2 + xy - yz = 3, \\ z^2 - xy - yz = 4. \end{cases}$$ Відповідь: $\left(\frac{2}{3}; 1; -\frac{4}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}; -1; \frac{4}{3}\right)$.

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{xz}{x+z} = \dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{yz}{y+z} = \dfrac{15}{8}. \end{cases}$$ Відповідь: $(1; 3; 5)$.

$$\begin{cases} x + y + z = 11, \\ xy + xz + yz = 36, \\ xyz = 36. \end{cases}$$ Відповідь: $(2; 3; 6), (2; 6; 3), (3; 2; 6), (3; 6; 2), (6; 2; 3), (6; 3; 2)$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ xy + xz + yz = 47, \\ (z - x) \cdot (z - y) = 2. \end{cases}$$

Відповідь: $(-4; -3; -5), (-3; -4; -5), (4; 3; 5), (3; 4; 5)$,

$\left(\frac{7-\sqrt{113}}{2}; \frac{7+\sqrt{113}}{2}; 9\right), \left(\frac{7+\sqrt{113}}{2}; \frac{7-\sqrt{113}}{2}; 9\right)$,

$\left(\frac{-7-\sqrt{113}}{2}; \frac{-7+\sqrt{113}}{2}; -9\right), \left(\frac{-7+\sqrt{113}}{2}; \frac{-7-\sqrt{113}}{2}; -9\right)$.

$$\begin{cases} x^2 - 6xy + 6y^2 = -2, \\ x^2 - 6xz + 11z^2 = 3, \\ y^2 - 4yz + 3z^2 = 0. \end{cases}$$

Відповідь: $(-6; -1; -1), (-2; -1; -1), (2; 1; 1), (6; 1; 1), (-4; -3; -1), (4; 3; 1)$,

$\left(-\frac{46}{\sqrt{337}}; -\frac{15}{\sqrt{337}}; -\frac{5}{\sqrt{337}}\right), \left(\frac{46}{\sqrt{337}}; \frac{15}{\sqrt{337}}; \frac{5}{\sqrt{337}}\right)$.

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-2}{2}, \\ x + 2y - z = 12. \end{cases}$$ Відповідь: $(6; 5; 4)$.

$$\begin{cases} x + \sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{2}{y}, \\ y - x = 3. \end{cases}$$ Відповідь: $\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right), (-4; -1)$.

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\dfrac{5}{2}\sqrt[6]{xy},\\ x+y=65.\end{cases}$$ Відповідь: $(1;64),(64;1)$.

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1,\\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=78.\end{cases}$$ Відповідь: $(4;9),(9;4)$.

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=\dfrac{5}{2},\\ xy=x+y.\end{cases}$$ Відповідь: $\left(3;\dfrac{3}{2}\right),\left(\dfrac{24}{23};24\right)$.

$$\begin{cases}\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}=-3,\\ 2x+y+\dfrac{1}{y}=8.\end{cases}$$ Відповідь: $(3;1),(5;-1),\left(4+\sqrt{10};3-\sqrt{10}\right),\left(4-\sqrt{10};3+\sqrt{10}\right)$.

$$\begin{cases}\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{17}{4},\\ x\cdot(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4}=52.\end{cases}$$ Відповідь: $(5;4),(-5;-4),(15;-12),(-15;12)$.

$$\begin{cases}x^2+y\cdot\sqrt[3]{x^2y}=68,\\ y^2+x\cdot\sqrt[3]{xy^2}=17.\end{cases}$$ Відповідь: $(8;1),(-8;-1),(8;-1),(-8;1)$.

$$\begin{cases}11y+\sqrt[5]{x+9y}=7x,\\ \sqrt[3]{x+y}=7x-11y.\end{cases}$$ Відповідь: $(0;0),(5;3),(-5;-3),\left(\dfrac{10}{243};-\dfrac{1}{243}\right),\left(-\dfrac{10}{243};\dfrac{1}{243}\right)$.

$$\begin{cases}\log_2(x+y)=2,\\ \log_{\sqrt{3}}y+\log_{\sqrt{3}}x=2.\end{cases}$$ Відповідь: $(3;1),(1;3)$.

$$\begin{cases}2^x\cdot3^y=24,\\ 2^y\cdot3^x=54.\end{cases}$$ Відповідь: $(3;1)$.