Розділ 11
Рівняння з параметрами

Чи ненайбільше труднощів виникає при розв'язуванні рівнянь з параметрами. Це обумовлено багатьма причинами, серед них: а) недостатньо широке і повне трактування поняття параметра; б) відсутність чіткого означення параметра; в) дуже слабка методика розв'язування рівнянь з параметрами.

Поняття параметра виникло в техніці, де воно характеризує певну істотну властивість параметра (наприклад, параметри електричних ламп), площу, явища, тощо. Потім воно "перекочувало" в інші науки, в тому числі, і в математику, де воно трактується, як інша змінна в рівнянні відмінна від тієї, значення якої потрібно знайти. В рівнянні $\frac{3x+2}{a-1}=8,$ $\begin{matrix} x-\text{аргумент}, \\ a-\text{параметр}, \end{matrix}$ тобто, величина, що характеризує, встановлює допустимі значення.

Розв'язати рівняння з параметрами - це означає знайти всі розв'язки цього рівняння для певних допустимих значень параметрів.

$$\frac{3}{ax+2}-\frac{2}{3x+a}=0.$$

Розв'язання:

Помножимо обидві частини рівняння на вираз: $(3x+a)(ax+2)$:

$$\frac{3\cdot(3x+a)(ax+2)}{ax+2}-\frac{2\cdot(3x+a)(ax+2)}{3x+a}=0;$$

$$3(3x+a)-2(ax+2)=0.$$

Виражаємо аргумент x через параметр a:

$$9x+3a-2ax-4=0;\ 9x-2ax=4-3a;\ x(9-2a)=4-3a;$$

$$x=\frac{4-3a}{9-2a}=\frac{-(3a-4)}{-(2a-9)}=\frac{3a-4}{2a-9}.$$

Легко встановити, при яких значеннях параметра *a* останнє і, природньо дане рівняння коренів не мають - прирівняти знаменник $2a-9$ до нуля, тобто $2a-9=0,\ 2a=9,\ a=4{,}5.$

Отже, при $a=4{,}5$ $x\in\varnothing.$

На наступному етапі розв'язування встановлюємо, при яких значеннях параметра *a* рівняння має корені. Це відбувається при $a\neq 4{,}5,$ тоді $2a\neq 9$ і рівняння має один корінь $x=\frac{3a-4}{2a-9}.$ Оскільки в правій частині цієї рівності знаходиться багатозначний параметр *a*, то необхідно визначити ті значення цього параметра, при яких $x=\frac{3a-4}{2a-9}$ є коренем даного рівняння. Це будуть ті значення *a*, які не перетворюють знаменників вихідного рівняння в нуль, тобто, при яких $ax+2\neq 0$ і $3x+a\neq 0.$

В ці нерівності підставимо $x=\frac{3a-4}{2a-9}$:

$ax+2=a\cdot\frac{3a-4}{2a-9}+2=\frac{3a-4a+4a-18}{2a-9}=\frac{3a^2-18}{2a-9}=\frac{3\left(a^2-6\right)}{2a-9}\neq 0;\ \frac{3\left(a^2-6\right)}{2a-9}\neq 0,$ тоді коли $a^2-6\neq 0\quad a^2\neq 6;\ \left[\begin{array}{l}a\neq-\sqrt{6};\\ a\neq\sqrt{6}.\end{array}\right.$

Аналогічно $3x+a=3\cdot\frac{3a-4}{2a-9}+a=\frac{9a-12+2a^2-9a}{2a-9}=\frac{2a^2-12}{2a-9}=\frac{2\left(a^2-6\right)}{2a-9}\neq 0$ при $a\neq\pm\sqrt{6}.$

Відповідь: при $a=4{,}5; a=-\sqrt{6}; a=\sqrt{6}\quad x\in\varnothing;$ при $a\neq 4{,}5; a\neq-\sqrt{6}; a\neq\sqrt{6}\quad x=\frac{3a-4}{2a-9}.$

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

Розв'язання:

В цьому рівнянні x - аргумент, a і b - параметри.

При умові, що $a\neq 0$ і $b\neq 0$ помножимо обидві частини рівняння на вираз: $(x-a)\cdot(x-b)\cdot a\cdot b$:

$$\frac{1\cdot(x-a)\cdot(x-b)\cdot a\cdot b}{x-a}+\frac{1\cdot(x-a)\cdot(x-b)\cdot a\cdot b}{x-b}=\frac{1\cdot(x-a)\cdot(x-b)\cdot a\cdot b}{a}+\frac{1\cdot(x-a)\cdot(x-b)\cdot a\cdot b}{b};$$

$$(x-b)\cdot a\cdot b-(x-a)\cdot a\cdot b=(x-a)\cdot(x-b)\cdot b+(x-a)\cdot(x-b)\cdot a;$$

$$xab-ab^2+xab-a^2b=x^2b-xb^2-axb+ab^2+ax^2-abx-a^2b+a^2b;$$

Згрупуємо члени рівняння так, щоб можна було з однієї групи за дужки винести x^2, з другої - x і третя група була б без аргументу, тобто утворити квадратне рівняння:

$$\left(-x^2b-ax^2\right)+\left(xab+xab+xab+xab+xb^2+a^2x\right)-ab^2-a^2b-ab^2-a^2b=0;$$

$$-(a+b)\cdot x^2+\left(a^2+b^2+4ab\right)\cdot x-2ab(a+b)=0\,\Big|\cdot(-1);$$

$$(a+b)\cdot x^2-\left(a^2+b^2+4ab\right)x+2ab\cdot(a+b)=0.\ (A)$$

Щоб квадратне рівняння існувало, необхідно, щоб його старший коефіцієнт був відмінним від нуля, тобто $a+b\neq 0$:

1). Нехай $b=-a.$ Тоді вихідне рівняння набуде вигляду $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{a}+\frac{1}{-a};$

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a};\ \frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=0;$$

$\frac{x+a+x-a}{(x-a)\cdot(x+a)}=0;\ 2x=0;\ x=0-$ корінь рівняння.

2). Нехай $a+b\neq 0$, тобто $b\neq-a,$ тоді рівняння *(A)* - квадратне:

$$D=\left(a^2+b^2+4ab\right)^2-4(a+b)\cdot ab\cdot(a+b)=$$

$$=a^4+b^4+16a^2b^2+2a^2b^2+8a^3b+8ab^3-8ab\left(a^2+2ab+b^2\right)=$$

$$=a^4+b^4+16a^2b^2+2a^2b^2+8a^3b+8ab^3-8a^3b-16a^2b^2-8ab^3=$$

$$=a^4+b^4+2a^2b^2=\left(a^2+b^2\right)^2.$$

$$x_1=\frac{a^2+b^2+4ab-\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2}}{2(a+b)}=\frac{a^2+b^2+4ab-\left|a^2+b^2\right|}{2(a+b)}=\frac{a^2+b^2+4ab-a^2-b^2}{2(a+b)}=\frac{2a-b}{a+b};$$

$$x_2=\frac{a^2+b^2+4ab+a^2+b^2}{2(a+b)}=\frac{2a^2+2b^2+4ab}{2(a+b)}=\frac{2(a+b)^2}{2(a+b)}=a+b;$$

Відповідь: Якщо $a\neq b, b\neq 0, |b|\neq |a|,$ то $x_1=\dfrac{2ab}{a+b};$ $x_2=a+b;$

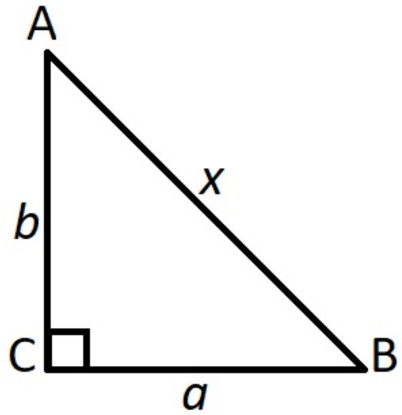
Якщо $b=-a,$ то $x=0;$ Якщо $a=0$ або $b=0,$ то $x\in\varnothing.$

Покажемо застосування рівнянь з параметрами до розв'язування, наприклад, геометричних задач: Сума гіпотенузи і одного з катетів дорівнює m, а сума гіпотенузи та іншого катета дорівнює n.

Знайти гіпотенузу.

Розв'язання:

Нехай x – гіпотенуза трикутника, тоді $a\neq x=m, b+x=n.$ Звідси $a=m-x, b=n-x.$



За теоремою Піфагора маємо:

$x^2=a^2+b^2$; $x^2=(m-x)^2+(n-x)^2;$

Оскільки $a>0, b>0, x>0$ як довжини відрізків, то $m>n, n>0,\ 0<x<m,\ 0<x<n.$

Розв'язуємо утворене рівняння:

$x^2=m^2-2mx+x^2+n^2-2nx+x^2;$

$x^2-2\cdot(m+n)\cdot x+\left(m^2+n^2\right)=0;$

$D=4\cdot(m+n)^2-4\cdot\left(m^2+n^2\right)=$

$=4m^2+8mn+4n^2-4m^2-4n^2=8mn.$

Так як $8mn>0,$ то рівняння має два корені:

$$x_1=\frac{2(m+n)-\sqrt{8mn}}{2}=\frac{2(m+n)-2\sqrt{2mn}}{2}=m+n-\sqrt{2mn};$$

$x_2=m+n+\sqrt{2mn}$ – не задовольняє умову задачі, бо $m+n+\sqrt{2mn}>m.$

З'ясуємо, при якій умові корінь $x_2>0.$

$x_2<m,\ x_2<n,$ тобто

$m+n-\sqrt{2mn}<m,$	$m+n-\sqrt{2mn}<n,$
$n-\sqrt{2mn}<0,$	$m-\sqrt{2mn}<0,$
$n<\sqrt{2mn},$	$m<\sqrt{2mn},$
$n^2<2mn\,\vert : n,$	$m^2<2mn\,\vert : m$
$n<2m\,\vert : 2,$	$m<2n\ (B)$;
$\dfrac{n}{2}<m\ (C);$	

З нерівностей *(B)* і *(C)* випливає нерівність $\dfrac{n}{2}<m<2n\Big|: n,\ \dfrac{1}{2}<\dfrac{m}{n}<2.$

Відповідь: при $\dfrac{1}{2}<\dfrac{m}{n}<2$ задача має єдиний розв'язок $x=m+n-\sqrt{2mn}.$

$\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{2x+a-b}.$

Розв’язання:

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо:

$x+a+2\sqrt{(x+a)\cdot(x-b)}+x-b=2x+a-b;$

$2\sqrt{(x+a)\cdot(x+b)}=0,\ \sqrt{(x+a)\cdot(x+b)}=0.$

Після піднесення до квадрата маємо:

$(x+a)\cdot(x+b)=0\ \left[\begin{array}{l} x+a=0, \\ x-b=0 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x_1=-a, \\ x_2=b. \end{array}\right.$

Необхідно з’ясувати при яких a і b x_1 і x_2 будуть коренями даного рівняння.

Підставимо $-a$ і b в рівняння:

$\sqrt{-a+a}+\sqrt{-a-b}=\sqrt{-2a+a-b};\ 0+\sqrt{-a-b}=\sqrt{-a-b}.$ Ліва і права частини рівняння мають зміст при $-a-b\geq 0,\ -a\geq b|:(-1),\ a\leq -b.$ Отже, при $a\leq -b$ $x=-a-$корінь рівняння.

$\sqrt{b+a}+\sqrt{b-b}=\sqrt{2b+a-b}, \sqrt{b+a}=\sqrt{b+a},\ b+a\geq 0,\ a\geq -b,\ x=b-$корінь рівняння.

Відповідь: при $a\leq -b,\ x=-a;$ при $a\geq -b,\ x=b.$

$a^x+a^{-x}=2c.$

Розв’язання:

$a>0, a\neq 1.\ a\in(0;1)\cup(1;+\infty),\quad c\in R.$

Це рівняння показникові, $x-$аргумент, a і $c-$ параметри.

$a^x+a^{-x}=2c|\cdot a^2,\ (a^x)^2+1=2c\cdot a^2,\ (a^x)^2-2c\cdot a^x+1=0.$ Утворилось квадратне рівняння відносно a^x. Позначимо $a^x=t.$

$t^2-2ct+1=0;\ D=(-2c)^2-4\cdot 1=4\cdot(c^2-1)\geq 0.$

Рівняння має корені:

$t_1=\dfrac{2c-\sqrt{4(c^2-1)}}{2}=c-\sqrt{c^2-1}$ і $t_2=c+\sqrt{c^2-1}.$

Враховуючи підстановку, маємо сукупність рівнянь:

$\left[\begin{array}{l} a^x=c-\sqrt{c^2-1}, \\ a^x=c+\sqrt{c^2-1}. \end{array}\right.$ З’ясуємо, при яких значеннях параметра C сукупність, а також вихідне рівняння мають розв’язки.

При $c<1$ сукупність розв’язків не має.

При $c>1$ сукупність має два розв’язки:

$\log_a a^x=\log_a\left(c-\sqrt{c^2-1}\right);\ x_1=\log_a\left(c-\sqrt{c^2-1}\right);$

$\log_a a^x=\log_a\left(c+\sqrt{c^2-1}\right);\ x_1=\log_a\left(c+\sqrt{c^2-1}\right);$

При $c=1$

$a^x=1-\sqrt{1^2-1};\ a^x=1;\ a^x=a^0;\ x=0;$

$a^x=1+\sqrt{1^2-1};\ a^x=1;\ x=0;$

Відповідь: при $c<1,\ x\in\varnothing;$ при $c>0,\ x_1=\log_a\left(c-\sqrt{c^2-1}\right);\ x_2=\log_a\left(c+\sqrt{c^2-1}\right);$ при $c=1,\ x=0,$

$\dfrac{\log_{a^2\sqrt{x}} a}{\log_{2x} a}+\log_{ax} a\cdot\log_{\frac{1}{a}} 2x=0.$

Розв'язання:

$a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$. Зведемо всі логарифми рівняння до основи *a:*

$$\log_{a^2\sqrt{x}} a = \frac{\log_a a}{\log_a a^2\sqrt{x}} = \frac{1}{\log_a a^2\sqrt{3}};\ \ \log_{2x} a = \frac{\log_a a}{\log_a 2x} = \frac{1}{\log_a 2x};$$

$$\log_{ax} a = \frac{\log_a a}{\log_a ax} = \frac{1}{\log_a ax};\ \ \log_{\frac{1}{a}} 2x = \frac{\log_a 2x}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a 2x}{\log_a a^{-1}} = -\log_a 2x.$$

Тоді вихідне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{1}{\log_a a^2\sqrt{3}} : \frac{1}{\log_a ax} + \frac{1}{\log_a ax}\cdot\left(-\log_a 2x\right) = 0;$$

$$\frac{\log_a 2x}{\log_a a^2\sqrt{3}} - \frac{\log_a 2x}{\log_a ax} = 0;\ \ \frac{\log_a 2x}{\log_a a^2 + \log_a \sqrt{3}} - \frac{\log_a 2x}{\log_a a + \log_a x} = 0;$$

$$\frac{\log_a 2x}{2+\frac{1}{2}\log_a 3} - \frac{\log_a 2x}{1+\log_a x} = 0 \Big|\cdot\frac{1}{\log_a 2x};\ \ \frac{1}{2+\frac{1}{2}\log_a 3} - \frac{1}{1+\log_a x} = 0;$$

$\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}\log_a 3} = \dfrac{1}{1+\log_a x}$; Звідси випливає, що $1+\log_a x = 2+\frac{1}{2}\log_a 3;$

$$\log_a x = 1+\frac{1}{2}\log_a 3;\ \ \log_a x = \log_a a + \log_a \sqrt{3};\ \ \log_a x = \log_a a\sqrt{3},\ \ x = a\sqrt{3}.$$

Відповідь: при $a = (0;1)\cup(1;\infty)$, $x = a\sqrt{3}.$

$\sin(x-\alpha) - \sin x = \sin\alpha;$

Розв'язання:

$$\sin(x-\alpha) - \sin x - \sin\alpha = 0;\ \ \sin\alpha\cdot\frac{x-\alpha}{2} - (\sin x + \sin\alpha) = 0;$$

$$2\sin\frac{x-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{x-\alpha}{2} - 2\sin\frac{x+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{x-\alpha}{2} = 0;$$

$$2\cos\frac{x-\alpha}{2}\cdot\left(\sin\frac{x-\alpha}{2} - \sin\frac{x+\alpha}{2}\right) = 0;$$

$$2\cos\frac{x-\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\frac{x-\alpha}{2}+\frac{x+\alpha}{2}}{2}\cdot\sin\frac{\frac{x-\alpha}{2}+\frac{x+\alpha}{2}}{2} = 0;$$

$$4\cdot\cos\frac{x-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = 0;\ \ -4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{x-\alpha}{2} = 0;\ \ -4 \neq 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\frac{\alpha}{2} = 0,\\ \cos\frac{\alpha}{2} = 0,\\ \cos\frac{x-\alpha}{2} = 0.\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\frac{\alpha}{2} = k\pi,\\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n.\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\alpha = 2k\pi,\\ \alpha = \pi + 2k\pi,\\ x = \pi + 2k\pi + \alpha\end{array}\right.\quad x = \alpha + \pi(2k+1).$$

Відповідь: при $\alpha = 0$ $\ x = (2k+1)\cdot\pi$, при $\alpha \neq 0$ $\ x = \alpha + (2k+1)\cdot\pi,\ k \in Z.$

$$a\sin x - b\cos\frac{x}{2} = 0.$$

Розв’язання:

$$a2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-b\cos\frac{x}{2}=0;\ \cos\frac{x}{2}\left(2a\sin\frac{x}{2}-b\right)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=0,\\ 2a\sin\frac{x}{2}-b=0\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ \frac{x}{2}=(-1)^n\arcsin\frac{b}{2a}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=\pi+2\pi n,\\ x=2\cdot(-1)^n\arcsin\frac{b}{2a}+2\pi n.\end{array}\right.$$

Якщо $\left|\frac{b}{2a}\right|\le 1,$ тобто $|b|\le 2|a|,$ то $x=(-1)^n\cdot 2\arcsin\frac{b}{2a}+2\pi n.$

Якщо $\left|\frac{b}{2a}\right|>0,$ то $x\in\varnothing.$

Відповідь: якщо $a\ne 0$ і $|b|\le 2a,$ то $x=(2n+1)\pi$ і $x=(-1)^n 2\arcsin\frac{b}{2a}+2\pi n.$

Вступникам до вузів нерідко пропонуються рівняння з параметрами, які важко розв’язати вищезгаданим способом. Тут на допомогу може прийти такий спосіб: параметр вважати аргументом, а змінну вважати коефіцієнтом.

Наприклад: $\frac{1}{2n+nx}-\frac{1}{2x-x^2}=\frac{2(n+3)}{x^3-4x}.$

Розв’язання:

Параметр n вважається змінною, а змінну $x-$коефіцієнтом. Дане рівняння перепишемо так:

$$\frac{1}{n(2+x)}-\frac{2(n+3)}{x(x^2-4)}=\frac{1}{2x-x^2};\ \frac{1}{n(x+2)}-\frac{2(n+3)}{x(x-2)(x+2)}=\frac{1}{2x-x^2};$$

ОДЗ: $x\ne 0,\ x\ne 2,\ x\ne -2.$

$\frac{x(x-2)-2n(n+3)}{nx(x-2)(x+2)}=\frac{1}{2x-x^2};$ Скористаємось основною властивістю пропорції:

$$x(x-2)(2x-x^2)-2n(n+3)(2x-x^2)=nx(x-2)(x+2);$$
$$x(x-2)(2x-x^2)=nx(x-2)(x+2)+2n(n+3)(2x-x^2);$$
$$x(x-2)x(2-x)=nx(x^2-4)+2nx(n+3)(2-x);$$
$$-x^2(x-2)^2=nx(x^2-4)-2nx(n+3)(x-2);$$
$$-x^2(x-2)^2=nx^3-4nx+(-2n^2x-6nx)(x-2);$$
$$-x^2(x-2)^2=nx^3-4nx-2n^2x^2+4n^2x+6nx^2-12nx;$$
$$-x^2(x-2)^2=nx^3+6nx^2-2n^2x^2-16nx+4n^2x;$$
$$-x^2(x-2)^2=nx^3+6nx^2-16nx+4n^2x-2n^2x^2;$$
$$-x^2(x-2)^2=(4n^2x-2n^2x^2)+nx^3+6nx^2-16nx;$$
$$-x^2(x-2)^2=2(2x-x^2)n^2+(x^3+6x^2-16x)n;$$
$$2(2x-x^2)n^2+(x^3+6x^2-16x)n+x^2(x-2)^2=0.$$

Утворилось квадратне рівняння відносно n.

$$D=(x^3+6x^2-16x)^2-4\cdot 2\cdot(2x-x^2)\cdot x^2(x-2)^2=$$
$$=x^6+36x^4+256x^2+12x^5-32x^4-192x^3-(16x^3+8x^4)(x^2-4x+4)=$$
$$=x^6+4x^4+12x^5-192x^3+256x^2-16x^5+64x^4-64x^3-8x^6+32x^5-32x^4=$$
$$=-7x^6+28x^5+36x^4-256x^3+256x^2=x^2(-7x^4-64x^3+36x^2-256x+256).$$

$$\frac{1}{n(x+2)}-\frac{1}{x(2-x)}-\frac{2(n+3)}{x(x-2)(x+2)}=0;$$
$$\frac{x(x-2)+n(x+2)-2n(n+3)}{nx(x+2)(x-2)}=0;$$
$$\begin{cases} x^2-2x+nx+2n-2n^2-6n=0, \\ nx(x+2)(x-2)\neq 0 \end{cases} \quad -2n^2+(x-4)n+x^2-2x=0;$$
$$x^2+(n-2)x-2n^2-4n=0.$$
$$D=(n-2)^2-4(-2n^2-4n)=n^2-4n+4+8n^2+16n=9n^2+12n+4=(3n+2)^2;$$
$$x_1=\frac{2-n-(3n+2)}{2}=\frac{2-n-3n-2}{2}=\frac{-4n}{2}=-2n;$$
$$x_2=\frac{2-n+3n+2}{2}=\frac{2n+4}{2}=n+2.$$

Відповідь:
$$\begin{aligned} &x\neq 0, -2n\neq 0, n\neq 0, x_1=-2n; x_2=n+2; \\ &x+2\neq 0, -2n+2\neq 0, n\neq 1, x_1=-2n; x_2=n+2; \\ &2-x\neq 0, 2+2n\neq 0, n\neq -1, x_1=-2n; x_2=n+2; \\ &n=0, x\in\varnothing. \end{aligned}$$

Немало рівнянь з параметрами пропонується вступникам до ВУЗів, які дуже важко розв'язати традиційним способом. Роботу значно полегшує прийом, який полягає в тому, що параметр вважають невідомою змінною, а невідоме – коефіцієнтом. Цей прийом особливо раціональний тоді, коли степінь рівняння вищий двох.

$$x^4-2mx^2-x+m^2-m=0.$$

Розв'язання:

Це рівняння четвертого степеня. Застосуємо даний прийом:
$$x^4-2mx^2-m-x+m^2=0;$$
$$x^4-(2x^2+1)m-x+m^2=0;$$
Перепишемо це рівняння як квадратне відносно m:
$$m^2-(2x^2+1)m+x^4-x=0;$$
$$D=(2x^2+1)^2-4\cdot 1(x^4-x)=4x^4+4x^2+1-4x^4+4x=4x^2+4x+1=(2x+1)^2;$$
$$m_1=\frac{2x^2+1-(2x+1)}{2}=\frac{2x^2+1-2x-1}{2}=\frac{2x^2-2x}{2}=x^2-x;$$
$m_2=x^2+x+1.$ Розглянемо таку сукупність рівнянь:
$$\left[\begin{aligned} &x^2-x=m, \\ &x^2+x+1=m \end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} &x^2-x-m=0, \\ &x^2+x+1-m=0 \end{aligned}\right. \quad \begin{aligned} &D=1+4m, \\ &D=1-4+4m=4m-3. \end{aligned}$$
$$x_1=\frac{1-\sqrt{1+4m}}{2};\ 1+4m\geq 0,\ 4m\geq -1,\ m\geq -\frac{1}{4};$$
$$x_2=\frac{1+\sqrt{1+4m}}{2};\ \text{при}\ m\geq -\frac{1}{4};$$
$$x_3=\frac{-1-\sqrt{4m-3}}{2};\ \text{при}\ 4m-3\geq 0, 4m\geq 3, m\geq\frac{3}{4};$$
$$x_4=\frac{-1+\sqrt{4m-3}}{2};\ \text{при}\ m\geq\frac{3}{4}.$$

Відповідь: при $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$ $x \in \varnothing$; при $m = -\frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$; при $a \in \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$ $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$; $x = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$; при $m = \frac{3}{4}$, $x = -\frac{1}{2}$; при $m \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$ $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4m}}{2}$.

В деяких рівняннях доцільно самим вводити параметр, щоб полегшити процес розв'язування:

$$\left(x^2-1\right)^2 + \left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(4x-\sqrt{3}-1\right) = 0.$$

Розв'язання:

Перетворимо вираз в третіх дужках:

$4x - \sqrt{3} - 1 = 4x - \left(\sqrt{3}+1\right)$. Тоді рівняння буде мати вигляд:

$$\left(x^2-1\right)^2 + \left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(4x-\left(\sqrt{3}+1\right)\right) = 0.$$

Введемо параметр $t = \sqrt{3}+1$.

$\left(x^2-1\right)^2 + t\cdot(4x-t) = 0$; Це рівняння четвертого степеня відносно змінної x. Його доцільно розв'язувати попереднім способом: t розглядати як змінну, а x як коефіцієнт.

$$t\cdot(4x-t) + \left(x^2-1\right)^2 = 0;$$

$$4tx - t^2 + \left(x^2-1\right)^2 = 0 \,\Big|\cdot(-1)$$

$$t^2 - 4xt - \left(x^2-1\right)^2 = 0;$$

$$D = (-4x)^2 + 4\cdot 1\cdot\left(x^2-1\right)^2 = 16x^2 + 4x^4 - 8x^2 + 4 = 4x^4 + 16x^2 + 4 = 4\cdot\left(x^4+4x^2+1\right) = 4\cdot\left(x^2+1\right)^2;$$

$$t_1 = \frac{4x - \sqrt{4\left(x^2+1\right)^2}}{2} = \frac{4x - 2\left(x^2+1\right)}{2} = 2x - \left(x^2+1\right);$$

$$t_2 = 2x + \left(x^2+1\right).$$

Розглянемо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} 2x - x^2 - 1 = t, \\ 2x + x^2 + 1 = t \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} -x^2 + 2x - 1 - t = 0 \,\Big|\cdot(-1), \\ x^2 + 2x + 1 - t = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 + t = 0, \\ x^2 + 2x + 1 - t = 0. \end{array}\right.$$

Враховуючи, що $t = \sqrt{3}+1$, маємо нову сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 + \sqrt{3} + 1 = 0, \\ x^2 + 2x + 1 - \sqrt{3} - 1 = 0. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + \sqrt{3} + 2 = 0, \\ x^2 + 2x - \sqrt{3} = 0. \end{array}\right.$$

$$D = (-2)^2 - 4\left(\sqrt{3}+2\right) = 4 - 4\sqrt{3} - 8 = -4\sqrt{3} - 4 < 0,\ x \in \varnothing.$$

$$D = 4 - 4\cdot\left(-\sqrt{3}\right) = 4 + 4\sqrt{3} = 4\cdot\left(1+\sqrt{3}\right) > 0,$$

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{4\left(1+\sqrt{3}\right)}}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{1+\sqrt{3}}}{2} = -1 - \sqrt{1+\sqrt{3}};$$

$$x_2 = -1 + \sqrt{1+\sqrt{3}}.$$

Відповідь: $-1-\sqrt{1+\sqrt{3}}$; $-1+\sqrt{1+\sqrt{3}}$.

Завдання для самостійної роботи:

$b \cdot x = 0.$ Відповідь: при $b \neq 0,\ x = 0.$

$c \cdot x = c.$ Відповідь: при $c = 0,\ x \in R;$ при $c \neq 0,\ x = 1.$

$x - ax = -2.$ Відповідь: при $a = 1,\ x \in \varnothing;$ при $a \neq 1,\ x = \dfrac{2}{a-1}.$

$(a^2 - 1)x = 2a^2 + a - 3.$ Відповідь: при $a = 1,\ x \in R;$ при $a = -1,\ x \in \varnothing;$ при $a \neq 1,\ x = \dfrac{2a+3}{a+1}.$

$ax = x + 3.$ Відповідь: при $a \neq 1,\ x = \dfrac{3}{a-1};$ при $a = 1,\ x \in \varnothing.$

$4 + ax = 3x + 1.$ Відповідь: при $a \neq 3,\ x = \dfrac{3}{3-a};$ при $a = 3,\ x \in \varnothing.$

$\dfrac{10}{5x - m} = \dfrac{3}{mx - 2}.$ Відповідь: при $m = 1{,}5$ і $m = \pm\sqrt{10}$ $x \in \varnothing;$ при $m \neq 1{,}5$ і $m \neq \pm\sqrt{10}$ $x = \dfrac{20 - 3m}{10m - 15}.$

$\dfrac{mx - 4}{3x - m} = \dfrac{3}{5}.$ Відповідь: при $m \neq 1{,}8$ і $m \neq \pm\sqrt{18}$ $x = \dfrac{2x - 3m}{5m - 9};$ при $m = 1{,}8$ і $m = \pm\sqrt{18}$ $x \in \varnothing.$

$\dfrac{x+a}{x+b} - \dfrac{x+b}{x+a} + \dfrac{4ab}{a^2 - b^2} = 0.$ Відповідь: при $|a| \neq |b|,\ a \neq 0,\ b \neq 0,$ то $x = -\dfrac{a^2 + b^2}{2a};$ $x = -\dfrac{a^2 + b^2}{2b}.$

Якщо $a = 0,\ b \neq 0,$ то $x = -2a;$

Якщо $b = a \neq 0,$ то $x = 0;$

Якщо $b = 0,$ або $a = 0,$ то $x \in \varnothing.$

$\dfrac{1}{2n + nx} - \dfrac{1}{2x - x^2} = \dfrac{2(n+3)}{x^3 - 4x}.$

Відповідь: при $n = 0,\ x \in \varnothing.$

при $n \neq 0,\ x_1 = -2n; x_2 = n + 2;$

при $n \neq 1,\ x_1 = -2n; x_2 = n + 2;$

при $n \neq -1,\ x_1 = -2n; x_2 = n + 2.$

$x^3 + 2ax^2 + a^2x + a - 1 = 0.$

Відповідь:

при $a \in (-3; 1)$ $x \in \varnothing;$

при $a = -3$ і $a = 1$ $x = \dfrac{-1 - a}{2};$

при $a \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ $x = -1 - a \pm \sqrt{a^2 + 2a - 3}.$

$$a=\frac{1}{a}+\frac{a-1}{a(x-1)}.$$

Відповідь:

при $a\neq\pm1$ і $a\neq0$ $x=\frac{a+2}{a+1}$;

при $a=1$ $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$;

при $a=-1$ і $a=0$ $x\in\varnothing$.

$$\frac{2(a+1)x}{a}=\frac{7}{a}+3(x+1).$$

Відповідь: при $a\neq2$ і $a\neq0$ $x=\frac{7+3a}{2-a}$; при $a=0$ і $a=2$ $x\in\varnothing$.

$$\frac{a+3}{a+2}=\frac{2}{x}-\frac{5}{(a+2)x}.$$

Відповідь: при $a\neq-3$ і $a\neq-2$ і $a\neq0{,}5$ $x=\frac{2a-1}{a+3}$; при $a=-3$, $a=-2$, $a=0{,}5$ $x\in\varnothing$.

$\frac{1+x}{1-x}=\frac{a}{c}$. Відповідь: при $a+c\neq0$ і $c\neq0$ $x=\frac{a-c}{a+c}$; при $a=-c$, $c=0$ $x\in\varnothing$.

$\frac{5}{ax-4}=\frac{1}{9x-a}$. Відповідь: $x=\frac{5a-4}{45-a}$ при $a\pm45$ і $a\neq\pm6$; при $a=4{,}5$ і $a=\pm6$ $x\in\varnothing$.

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-6}=1+\frac{1}{6}.$$

Відповідь: $x_1=b+1$, $x_2=\frac{2b}{b+1}$ при $b\neq-1$, $b\neq0$, $b\neq1$; $x\in\varnothing$ при $b=0$.

$$\frac{1}{2n+nx}-\frac{1}{2x-x^2}=\frac{2(n+3)}{x^3-4x}.$$

Відповідь:
$$\begin{aligned}&x\neq0,-2n\neq0,n\neq0,x_1=-2n;x_2=n+2;\\&x+2\neq0,-2n+2\neq0,n\neq1,x_1=-2n;x_2=n+2;\\&2-x\neq0,2+2n\neq0,n\neq-1,x_1=-2n;x_2=n+2;\\&n=0,x\in\varnothing.\end{aligned}$$