Раздел 6
Иррациональные уравнения

Иррациональными называются уравнения, в которых переменная находится под знаком корня.

В ООШ они решаются только в множестве действительных чисел.

Чтобы решить иррациональное уравнение, необходимо путем тождественных преобразований свести его к рациональному. Достигается это путем возвидения обеих частей уравнения в степень, или введением новой переменной. Поскольку при возведении обеих частей уравнения в четную степени возможно появление посторонних корней, то для их «отфильтрации» целесообразно подставить все найденные значения корней в исходное уравнение.

Рассмотрим некоторые методы решения иррациональных уравнений, а именно:

1). Введение новой переменной;

2). Применение формул сокращенного умножения;

3). Введение сопряженных выражений;

4). Вынесение общего множителя за скобки.

Решить уравнение: $\sqrt{5x-1}=x+1.$

Решение:

Возводим обе части уравнения в квадрат: $5x-1=x^2+2x+1;\ \ x^2-3x+2=0;$

По теореме Виета $x_1=1;\ \ x_2=2.$

Проверка: если $x=1,$ то $\sqrt{5\cdot 1-1}=1+1;\ \ 2=2.$

$1-$ корень уравнения. Если $x=2,$ то $\sqrt{5\cdot 2-1}=2+1;\ \ 3=3.$

$2-$ корень уравнения.

Ответ: 1; 2.

Решить уравнение: $\sqrt{5x-3}=\sqrt{5-3x}.$

Решение:

Возведем обе части в квадрат: $5x-3=5-3x;\ \ 5x+3x=5+3;\ \ 8x=8;\ \ x=1.$

Проверка: $\sqrt{5\cdot 1-3}=\sqrt{5-3\cdot 1};\ \ \sqrt{2}=\sqrt{2}-$ верное равенство.

$1-$ корень уравнения.

Ответ: 1.

Решить уравнение: $\sqrt{6x-2}-\sqrt{4x-3}-\sqrt{x-2}=0.$

Решение:

$\sqrt{6x-2}-\sqrt{4x-3}-\sqrt{x-2}=0.$ Возведем обе части в квадрат:

$6x-2-2\cdot\sqrt{6x-2}\cdot\sqrt{4x-3}+4x-3=x-2;\ \ 10x-5-2\sqrt{(6x-2)\cdot(4x-3)}=x-2;$

$10x-5-x+2=2\sqrt{(6x-2)(4x-3)};\ \ 10x-3=2\cdot\sqrt{(6x-2)(4x-3)};$

Снова возводим обе части уравнения в квадрат:

$81x^2-54x+9=4\cdot(6x-2)\cdot(4x-3);\ \ 81x^2-54x+9=4(24x^2-18x-8x+6);$

$81x^2-54x+9-96x^2+72x+32x-24=0;\ \ -15x^2+50x-15=0\,|:(-5);\ \ 3x^2-10x+3=0;$

$D = 100 - 36 = 64 = 8^2;\quad x_1 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3};\ x_2 = \frac{10+8}{6} = 3;$ Проверка: если $x = \frac{1}{3},$ то $\sqrt{6\cdot\frac{1}{3}-2} - \sqrt{4\cdot\frac{1}{3}-3} - \sqrt{\frac{1}{3}-2} \neq 0.$ Значит $\frac{1}{3}$ посторонний корень.

Если $x = 3,$ то $\sqrt{6\cdot 3-2} - \sqrt{4\cdot 3-3} - \sqrt{3-2} = 0;\quad 3-$ корень уравнения.

Ответ: 3.

Решить уравнение: $\sqrt[3]{3-x} + \sqrt[3]{3+x} = 1.$

Решение:

Запишем формулу суммы кубов в таком виде:

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab\cdot(a+b);$

Возведем обе части уравнения в куб и применим вышеупомянутое тождество: $3 - x + 3 + x + 3\cdot\sqrt[3]{3-x}\cdot\sqrt[3]{3+x}\cdot\left(\sqrt[3]{3-x} + \sqrt[3]{3+x}\right) = 1;$

$6 + 3\cdot\sqrt[3]{(3-x)\cdot(3+x)}\cdot 1 = 1;\quad 3\cdot\sqrt[3]{9-x^2} = -5;$

Возводим обе части уравнения в куб: $27\cdot(9-x^2) = -125;\quad 9 - x^2 = \frac{-125}{27};$

$x^2 = 9 + \frac{125}{27};\quad x^2 = \frac{243+125}{27};\quad x^2 = \frac{368}{27} = \frac{16\cdot 23}{9\cdot 3};\quad x_2 = \frac{4}{9}\sqrt{69}.$

Ответ: $-\frac{4}{9}\cdot\sqrt{69};\quad \frac{4}{9}\sqrt{69}.$

Решить уравнение $5\sqrt[6]{x-6} = \sqrt[3]{x-6} + 6.$

Решение:

Введем новую переменную $\sqrt[6]{x-6} = t,\ \left(\sqrt[6]{x-6}\right)^2 = t^2,\ \sqrt[3]{x-6} = t^2.$

Тогда исходное уравнение будет иметь вид $t^2 - 5t + 6 = 0.$

Его корни по теореме Виета $t_1 = 2;\ t_2 = 3.$ Тоді $\sqrt[6]{x-6} = 2,\ \left(\sqrt[6]{x-6}\right)^6 = 2^6;$

$x - 6 = 64;\quad x = 64 + 6;\quad x = 70;$

$\sqrt[6]{x-6} = 3;\ \left(\sqrt[6]{x-6}\right)^6 = 3^6;\quad x - 6 = 729;\quad x = 729 + 6;\quad x = 735.$

Проверка: Если $x = 70,$ то $5\cdot\sqrt[6]{70-6} = 5\cdot\sqrt[6]{64} = 5\cdot 2 = 10;$

$\sqrt[3]{70-6} + 6 = \sqrt[3]{64} + 6 = 4 + 6 = 10;\ 10 = 10.$

$70-$ корень уравнения. Если $x = 735,$ то $5\cdot\sqrt[6]{735-6} = 5\cdot\sqrt[6]{729} = 5\cdot 3 = 15;$

$\sqrt[3]{735-6} + 6 = \sqrt[3]{729} + 6 = 9 + 6 = 15.\ 15 = 15.\quad 735-$ корень уравнения.

Ответ: $70;\ 735.$

Решить уравнение : $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7.$

Решение:

Обозначим $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} - \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = A.$ Перемножим исходное уравнение и только что образовавшееся:

$\left(\sqrt{3x^2-2x+15} + \sqrt{3x^2-2x+8}\right)\cdot\left(\sqrt{3x^2-2x+15} - \sqrt{3x^2-2x+8}\right) = 7A;$

$3x^2 - 2x + 15 - (3x^2 - 2x + 8) = 7A;\quad 3x^2 - 2x + 15 - 3x^2 + 2x - 8 = 7A;\quad 7A = 7;\quad A = 1.$

Решим следующую систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7,\\ \sqrt{3x^2 - 2x + 15} - \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 1.\end{cases}$

Добавив эти уравнения, получим $2\sqrt{3x^2 - 2x + 15} = 8 \mid : 2;\quad \sqrt{3x^2 - 2x + 15} = 4.$

Возведем обе части уравнения в квадрат $3x^2-2x+15=16;$

$3x^2-2x-1=0;\quad D=4+12=16;\quad x_1=\dfrac{2-4}{6}=-\dfrac{2}{6}=-\dfrac{1}{3};\quad x_2=\dfrac{2+4}{6}=1.$

Проверка показывает, что оба найденные числа удовлетворяют уравнение.

Ответ: $-\dfrac{1}{3};\ 1.$

Существует много иррациональных уравнений, решение которых значительно упрощается тогда, когда подкоренное выражение разложить на множители с последующим вынесением общего множителя за скобки.

Например, решить уравнение:

$\sqrt{2x^2+7x-15}+\sqrt{2x^2-3x}=\sqrt{4x^2+4x-15}.$

Решение:

$\sqrt{2x^2+7x-15}+\sqrt{2x^2-3x}-\sqrt{4x^2+4x-15}=0.$ Разложим каждый из подкоренных выражений $2x^2+7x-15,\quad 2x^2-3x,\quad 4x^2+4x-15.$ Для первого и третьего многочленов применим формулу разложения квадратного трехчлена на множители: $ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2),$ где x_1 и x_2- корни данного трехчлена.

$D=7^2+4\cdot2\cdot15=49+120=169,\quad x_1=\dfrac{-7-\sqrt{169}}{2\cdot2}=\dfrac{-7-13}{4}=-5;\quad x_2=\dfrac{-7+13}{4}=\dfrac{3}{2},$

тогда

$2x^2+7x-15=2\cdot\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\cdot(x+5)=(2x-3)\cdot(x+5).\ D=16+16\cdot15=256,$

$x_1=\dfrac{-4-16}{8}=-\dfrac{20}{8}=-\dfrac{5}{2};\quad x_2=\dfrac{-4+16}{8}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2},$ тогда

$4x^2+4x-15=4\cdot\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\cdot\left(x+\dfrac{5}{2}\right)=2\cdot\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\cdot2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)=(2x-3)\cdot(2x+5).$

$2x^2-3x=x\cdot(2x-3).$ Уравнение приобретает вид

$\sqrt{(2x-3)\cdot(x+5)}+\sqrt{x\cdot(2x-3)}-\sqrt{(2x-3)\cdot(2x+5)}=0.$

$\sqrt{2x-3}\cdot\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\cdot\sqrt{2x-3}-\sqrt{2x-3}\cdot\sqrt{2x+5}=0;\quad \sqrt{2x-3}\cdot\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}-\sqrt{2x+5}\right)=0;$

$\sqrt{2x-3}=0,$ або $\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}-\sqrt{2x+5}\right)=0;$

$2x-3=0;\qquad \sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{2x+5};$

$x=1{,}5;$ Возведем обе части уравнения в квадрат: $x+5+2\sqrt{(x+5)\cdot x}+x=2x+5;$

$2\cdot\sqrt{(x+5)\cdot x}=0;\quad \left[\begin{array}{l}x+5=0,\\x=0\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}x=-5,\\x=0.\end{array}\right.$

Проверка показывает, что при $x=0$ первый и третий радикалы не имеют смысла, а числа $1{,}5$ и -5 удовлетворяют уравнение.

Ответ: $-5;\ 1{,}5.$

Решение уравнений с взаимно обратными величинами сводится после введения новой переменной к квадратному уравнению.

Решить уравнение: $\sqrt[3]{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{5-x}}=2.$

Решение:

О.Д.З.: $x \neq (-3);\ x \neq 5.$ Обозначим $\sqrt[3]{\frac{5-x}{x+3}} = t,$ тогда $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5-x}} = \frac{1}{t};\quad t + \frac{1}{t} = 2;$

$\frac{t^2 - 2t + 1}{t} = 0;\quad \begin{cases} t^2 - 2t + 1 = 0, \\ t \neq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} (t-1)^2 = 0, \\ t \neq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} t = 1, \\ t \neq 0. \end{cases} \quad \sqrt[3]{\frac{5-x}{x+3}} = 1;\quad \frac{5-x}{x+3} = 1;$

$5 - x = x + 3;\quad 5 - x = x + 3;\quad -2x = -2;\quad x = 1.$

Проверка показывает, что 1 удовлетворяет исходное уравнение.

Ответ: 1.

Иногда полезно заменить иррациональное уравнение системой уравнений.

Решить уравнение: $2 \cdot \sqrt{3x-2} = 18 - 2 \cdot \sqrt{x+7}.$

Решение:

$2 \cdot \sqrt{3x-2} + 2 \cdot \sqrt{x+7} = 18 \mid : 2;\quad \sqrt{3x-2} + \sqrt{x+7} = 9 \quad (A).$

Решив систему неравенств, найдем О.Д.З. уравнения.

$\begin{cases} 3x - 2 \geq 0, \\ x + 7 \geq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 3x \geq 2, \\ x \geq -7. \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq \frac{2}{3}; \\ x \geq 7. \end{cases} \quad \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$ – область определения уравнения.

Введем новые переменные, а именно: $\sqrt{3x-2} = m,\ m \geq 0.\quad \sqrt{x+7} = n,\ n \geq 0.$

Возведя обе части в квадрат, получим: $3x - 2 = m^2;\quad x + 7 = n^2 \mid \times (-3);$

$$\begin{cases} -3x - 21 = -3n^2 \\ +\ 3x - 2 = m^2 \end{cases}$$

$-23 = m^2 - 3n^2$

$\begin{cases} m + n = 9; \\ m^2 - 3n^2 = -23. \end{cases} \quad \begin{cases} n = 9 - m; \\ m^2 - 3(9-m)^2 + 23 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} n = 9 - m; \\ m^2 - 3 \cdot (81 - 18m + m^2) + 23 = 0. \end{cases}$

$m_1 = 5;\ m_2 = 22;\ n_1 = 9 - 5 = 4;\ n_2 = 9 - 22 = -13.$

Возвращаемся к подстановке: $\sqrt{3x-2} = 5;\ 3x - 2 = 25;\ 3x = 27;\ x = 9.$ $n = -13$ – посторонний корень, потому что не удовлетворяет условию $n \geq 0.$

Непосредственная проверка показывает, что число 9 – корень уравнения.

Ответ:9.

Часто встречаются такие иррациональные уравнения, для решения которых достаточно заменить новой переменной только один из нескольких радикалов. Решить уравнение: $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+6} = 6.$

Решение:

О.Д.З.: $x + 6 \geq 0,\ x \geq -6.$ Введем новую переменную $\sqrt[3]{x-2} = y,$ тогда $x - 2 = y^3,$

$x = y^3 + 2,\quad \sqrt{x+6} = \sqrt{y^3 + 2 + 6} = \sqrt{y^3 + 8},\quad y + \sqrt{y^3 + 8} = 6,\quad \sqrt{y^3 + 8} = 6 - y.$

После возведения обеих частей уравнения в квадрат, получим:

$y^3 + 8 = 36 - 12y + y^2;\quad y^3 - y^2 + 12y - 28 = 0.$

Делители свободного члена уравнения:

$28 \vdots \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 7,\ \pm 14;\ \pm 28\}.$ Если $y = 2,$ то $2^3 - 2^2 + 12 \cdot 2 - 28 = 8 - 4 + 24 - 28 = 0.$

$y = 2$ – корень уравнения.

$$\begin{array}{r|l} y^3 - y^2 + 12y - 28 & y - 2 \\ \hline -y^3 - 2y^2 & y^2 + y + 14 \end{array}$$

$$
\begin{array}{r}
-\begin{array}{l} y^2+12y \\ \underline{y^2-2y} \end{array} \\
-\begin{array}{r} 14y-28 \\ \underline{14y-28} \end{array} \\
0.
\end{array}
$$

Уравнение $y^2+y+14=0$ действительных корней нет, потому что его дискриминант отрицательный. $\sqrt[3]{x-2}=2,\ \ x-2=8,\ \ x=10.$ Непосредственная проверка показывает, что число 10 является корнем уравнения.

Покажем еще один, на наш взгляд, уникальный способ решения иррациональных уравнений вышеупомянутого типа: $\sqrt[3]{x+24}=\sqrt{12-x}.$

Решение:

Введем следующие обозначения:

$\sqrt[3]{x+24}=y_1;\quad \sqrt{12-x}=y_2$ тоді $y_1=y_2.$ Возведя первое равенство в куб, второе в квадрат и учитывая третье равенство, получим систему уравнений:

$$
\begin{cases}
y_1^{\ 3}=x+24, \\
y_2^{\ 2}=12-x, \\
y_1=y_2.
\end{cases}
$$

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{l} y_2^{\ 3}=x+24, \\ \underline{y_2^{\ 2}=12-x} \end{array} \\
y_2^{\ 3}+y_2^{\ 2}=36,\quad y_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}-36=0.
\end{array}
$$

$\{\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm6,\ \pm9,\ \pm12,\ \pm18,\ \pm36\}-$ делители свободного члена уравнения.

Последовательно подставляя их в уравнение убеждаемся, что число 3 является его корнем: $3^3+3^2-36=27+9-36=0.$

$y_2^{\ 3}+y_2^{\ 2}-36$

$$
\begin{array}{r|l}
y_2^{\ 3}+y_2^{\ 2}-36 & y_2-3 \\ \cline{2-2}
-\underline{y_2^{\ 3}-3y_2^{\ 2}} & y_2^{\ 2}+4y_2+12 \\
-\begin{array}{r} 4y_2^{\ 2}-36 \\ \underline{4y_2^{\ 2}-12y_2} \end{array} & \\
-\begin{array}{r} 12y_2-36 \\ \underline{12y_2-36} \end{array} & \\
0. &
\end{array}
$$

$y_2^{\ 2}+4y_2+12=0,\quad D=16-48<0,\quad y_2\in\varnothing.$

Во второе равенство вместо y_2 подставим число 3: $\sqrt{12-x}=3,\ \ 12-x=9,\ \ x=3.$

Число 3 удовлетворяет исходное уравнение.

Ответ: 3.

В некоторых уравнениях полезно переносить из одной части в другую только один член, но такой, чтобы суммы коэффициентов при переменных в обеих частях уравнения были одинаковыми.

Решить уравнение: $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}$.

Решение:

$\sqrt{8x+1}-\sqrt{2x-2}=\sqrt{7x+4}-\sqrt{3x-5};$ 8+2=10; 7+3=10.

После возведения обеих частей уравнения в квадрат имеем:

$8x+1-2\sqrt{(8x+1)\cdot(2x-2)}+2x-2=7x+4-2\cdot\sqrt{(7x+4)\cdot(3x-5)}+3x-5;$

$10x-1-2\sqrt{(8x+1)\cdot(2x-2)}=10x-1-2\cdot\sqrt{(7x+4)\cdot(3x-5)};$

$2\sqrt{(8x+1)\cdot(2x-2)}=-2\cdot\sqrt{(7x+4)\cdot(3x-5)};$

$\sqrt{(8x+1)\cdot(2x-2)}=\sqrt{(7x+4)\cdot(3x-5)};\ (8x+1)\cdot(2x-2)=(7x+4)\cdot(3x-5);$

$16x^2-16x+2x-2=21x^2-35x+12x-20;\ 5x^2+9x+18=0;\ 5x^2-9x-18=0;$

$D=81+360=441;$

$x_1=\frac{9-21}{10}=-1,2;\ x_2=\frac{9+21}{10}=3.$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что только число 3 является корнем исходного уравнения.

Ответ: 3.

Хочется познакомить работающих с «Практикум по решению задач по элементарной математике» с оригинальным способом решения иррациональных уравнений такого вида $\sqrt{x+3-4\cdot\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\cdot\sqrt{x-1}}=1.$

Решение:

Введем новую переменную $\sqrt{x-1}=y,\ y\geq 0.\quad \left(\sqrt{x-1}\right)^2=y^2;\ x-1=y^2;\ x=y^2+1.$

Тогда данное уравнение будет иметь вид:

$\sqrt{y^2+1+3-4y}+\sqrt{y^2+1+8-6y}=1;$

$\sqrt{y^2-4y+4}+\sqrt{y2-6y+9}=1;$

$\sqrt{(y-2)^2}+\sqrt{(y-3)^2}=1;$

$|y-2|+|y-3|=1.$

Подмодульные разницы приравняем к нулю, решим образовавшиеся уравнения и с учетом неравенства $y\geq 0$ обозначим найденные корни уравнения на числовом луче :

$y-2=0;\ y=2.$

$y-3=0;\ y=3.$

На $[0;2)\quad y-2<0,$ а потому $|y-2|=-(y-2)=2-y;\ y-3<0,$

а потому $|y-3|=-(y-3)=3-y;$

Уравнение (1) принимает вид: $2-y+3-y=1;\quad -2y=-4;\quad y=2;\quad 2\notin[0;2).$

На этом промежутке уравнение корней не имеет. На промежутке $[2;3)$

$y-2>0,\ |y-2|=y-2;\quad y-3<0,\ |y-3|=-(y-3)=3-y.\quad y-2+3-y=1,\quad 1=1$ при любом значении переменной y с $[2;3).\ 2\leq\sqrt{x-1}<3;\ 4\leq x-1<9;\ 5\leq x<10;\ x\in[5;10).$

На $[3;+\infty);\quad y-2>0;\ |y-2|=y-2.\quad y-3>0;\ |y-3|=y-3.\quad y-2+y-3=1;\quad 2y=6;$

$y=3;\quad 3\in[3;+\infty).\ 3-$ корень уравнения (1). $\sqrt{x-1}=3;\ x-1=9;\quad x=10.$ Таким образом, решениями данного уравнения является (відрізок) $[5;10].$

Ответ: $[5;10]$.

Живой интерес вызывает способ решения уравнений такого типа

$$\frac{10x^3-3x^2-2x+1}{\sqrt{x-2}}=0.$$

Решение:

Из условия равенства дроби нулю следует такая система. $\begin{cases}10x^3-3x^2-2x+1=0;\\ \sqrt{x-2}\neq 0.\end{cases}$

Нетрудно заметить, что $x\neq 0,$ а потому разделим обе части уравнения на x^3 с последующим введением новой переменной. $10x^3-3x^2-2x+1=0 \mid :x^3;$

$10-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0$. Вводим новую переменную $\frac{1}{x}=y;\quad 10-3y-2y^2+y^3=0;$

$y^3-2y^2-3y+10=0$ (1). $10\vdots\{\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 5;\ \pm 10\}$. Если $y=-2,$ то $(-2)^3-2\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+10=-8-8+6+10=0;$ 0=0; Это означает, что $y=-2-$ корень уравнения (1). $\frac{1}{x}=-2;\ \ x=-\frac{1}{2}.$

$$\begin{array}{l|l} y^3+2y^2-3y+10 & y+2 \\ \hline y^3+2y^2 & y^2+4y+5 \\ \hline \quad -4y^2-3y & \\ \quad -4y^2-8y & \\ \hline \qquad 5y+10 & \\ \qquad 5y+10 & \\ \hline \qquad 0. & \end{array}$$

$y^2-4y+5=0$; $D=16-20=-4<0;\ \ y\in\varnothing$ в области R.

Проверка: если $x=-\frac{1}{2},$ то $10\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=-\frac{10}{8}-\frac{3}{4}+1+1=0.$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Доказать, что уравнение $\sqrt{x^4+x-2}+\sqrt[4]{x^4+x-2}=6$ имеет единственный положительный корень и найти его.

Решение:

Введем новую переменную: $\sqrt[4]{x^4+x-2}=t;\ \ \sqrt{x^4+x-2}=t^2.$

Исходное уравнение имеет вид: $t^2+t-6=0.$ По теореме Виета: $t_1=-3;\ \ t_2=2.$

$\sqrt[4]{x^4+x-2}=-3,\ \ x\in\varnothing.\ \ \sqrt[4]{x^4+x-2}=2;\ \ x^4+x-2=16;\ \ x^4-16+x-2=0;$

$(x^2-4)\cdot(x^2+4)+(x-2)=0;$

$(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x^2+4)+(x-2)=0;\ \ (x-2)\cdot((x+2)\cdot(x^2+4)+1)=0.$

$\left[\begin{array}{l}x-2=0,\\ x^3+4x+2x^2+8+1=0.\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x^3+2x^2+4x+9=0\end{array}\right.$ це рівняння додатних коренів не має.

Найдем отрицательные делители числа 9: $\{-1;\ -3;\ -9\}$.

Если $x=-1,$ то $(-1)^3+2\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)+9=-1+2-4+9\neq 0.$

Если $x=-3,$ то $(-27)+18-12+9\neq 0.$

Если $x=-9,$ то $729+162-36+9\neq 0.$

Проверка: если $x=2,$ то $\sqrt{2^4+2-2}+\sqrt[4]{2^4+2-2}=\sqrt{2^4}+\sqrt[4]{2^4}=4+2=6;\ \ 6=6.$

Ответ: $x=2-$ единственный положительный корень.

Задания для самостоятельной работы:

Решить уравнение:

6.1 $\sqrt{20-x}=7-\sqrt{x+5}.$ Ответ: 4; 11.

6.2 $\sqrt{x-3-4+\sqrt{2x+1}}=0$ Ответ: 4.

6.3 $\sqrt{x^2+5x-2}-\sqrt{x^2-3x+3}=3.$ Ответ:2.

6.4 $\sqrt[3]{\dfrac{12-2x}{x-1}}+\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{12-2x}}=\dfrac{5}{2}.$ Ответ: 2; $\dfrac{97}{17}.$

6.5 $\sqrt{x^2+x-1}=x.$ Ответ: 1.

6.6 $\sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{x}.$ Ответ: 1.

6.7 $\sqrt[3]{x^3-19}=x-1.$ Ответ: $-2;\ 3.$

6.8 $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-5}.$ Ответ: 3.

6.9 $2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+12.$ Ответ: $-2;\ 3{,}5.$

6.10 $\sqrt{\dfrac{x-5}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{x-4}{x+3}}=\dfrac{7}{x+2}\cdot\sqrt{\dfrac{x+2}{x+3}}.$ Ответ: 6.

6.11 $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}-\sqrt{x-3}=\sqrt{x-6}.$ Ответ: $\varnothing.$

6.12 $\sqrt[8]{x^5}+2\sqrt{x}=3\cdot\sqrt[4]{x^3}.$ Ответ: 0; 1.

6.13 $\sqrt{x^2-3x+11}-4x^2+12x=11.$ Ответ: 1; 2.

6.14 $\dfrac{(x-1)\cdot\sqrt[3]{10-x}-(10-x)\cdot\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{10-x}}.$ Ответ: 2; 9.

6.15 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{13-x^2}}=\dfrac{5}{6}.$ Ответ: $\dfrac{-\sqrt{481}+13}{10};\ \ 2;\ 3.$

6.16 $\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x-13}=2.$ Ответ: $-7;\ 7.$

6.17 $\sqrt[4]{x+62}+\sqrt[4]{6-x}=3\sqrt{2}.$ Ответ: $-58;\ 2.$

6.18 $\sqrt[4]{x+14}+\sqrt[4]{3-x}=3.$ Ответ: $-13;\ 2.$

6.19 $x\cdot\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x^2+15}=2.$ Ответ: 1.

6.20 $x^2-4x+6=\sqrt{2x^2-8x+12}.$ Ответ: 2.

6.21 $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2.$ Ответ: $0;\ -5.$

6.22 $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\cdot\sqrt{2x^2+5x+3}=16.$ Ответ: 3.

6.23 $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2.$ Ответ: 8.

6.24 $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1}{3}.$ Ответ: 64.

6.25 $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2.$ Ответ: $-1;\ 1.$

6.26 $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$. Ответ: 3.

6.27 $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(2-x)\cdot(7+x)}=3$. Ответ: $-6;\ 1$.

6.28 $x^2+x\cdot\sqrt{x+1}-2\cdot(x+1)=0$. Ответ: $2+2\sqrt{2};\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

6.29 $\dfrac{(x-a)\cdot\sqrt{x-a}+(x-b)\cdot\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=a-b$, якщо $a>b$. Ответ: $x_1=a;\ x_2=\dfrac{4a-b}{3}$.

6.30 $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3$. Ответ: 64.

6.31 $\sqrt[3]{x+1}=\sqrt{x-3}$. Ответ: 7.

6.32 $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{27-14x}=1$. Ответ: 1.

6.33 $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$. Ответ: $x\in(-2;0)\cup(1;+\infty)$.

6.34 $\sqrt{x-2\cdot\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3}-4\cdot\sqrt{x-1}=1$. Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup(0;2)$.

6.35 $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$. Ответ: 8.