Розділ 7
Показникові рівняння

Сьогодні важко переоцінити роль і місце показникових рівнянь у курсі математики не тільки як теоретичної, а й прикладної науки. Розв'язування показникових рівнянь для тих, хто їх розв’язує, дає можливість краще повторити багато розділів математики. Крім того, конкретно і свідомо закріплюються властивості показникової функції, що полегшує їх застосування до розв'язування задач прикладного характеру.
Показниковим називається рівняння вигляду $a^x = в,$ де a>0 і a $\neq 1.$
Перед розв’язуванням показникових рівнянь слід добре засвоїти таку теорему: якщо a>0 і $a \neq 1.$ то з рівності $a^m = a^n$ випливає рівність $m = n.$
Розв'язування найпростіших показникових рівнянь доцільно зводити до однієї основи.

Наприклад, розв’язати рівняння $0{,}5^x = \dfrac{1}{128}.$

Розв’язання:

Ліву і праву частини рівняння зводимо до основи $\dfrac{1}{2}$: $0{,}5 = \dfrac{1}{2};\quad \dfrac{1}{128} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^7,$ тоді

рівняння матиме вигляд: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^7 \Rightarrow x = 7.$

Таким самим способом розв’язуються рівняння вигляду $\left(\dfrac{9}{4}\right)^x \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-2} = \left(\dfrac{8}{27}\right)^{3-5x}.$

Розв’язання:

Виконаємо тотожні перетворення виразів:
$\left(\dfrac{9}{4}\right)^x = \left(\dfrac{3^2}{2^2}\right)^x = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2x};\quad \left(\dfrac{8}{27}\right)^{3-5x} = \left(\dfrac{2^3}{3^3}\right)^{3-5x} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{9-15x}$, тоді

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-2} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2x} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{9-15x};\quad \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-2-2x} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{9-15x};$ В силу монотонності показникової

функції маємо: $-2 - x = 9 - 15x;\ 14x = 11;\ x = \dfrac{11}{14}.$

Відповідь: $x = \dfrac{11}{14}.$

Покажемо розв'язування трохи складніших показникових рівнянь:
$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1} = \dfrac{4}{2-\sqrt{3}}.$

Розв’язання:

Помножимо обидві частини рівняння на такий вираз: $\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x} > 0.$
Тоді:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}=\frac{4}{2-\sqrt{3}}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}.$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}+\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}}{2-\sqrt{3}}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}=$$

$$=\frac{4\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}{2-\sqrt{3}}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x};$$

$$\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}\right)^2\cdot(4-3)+(4-3)^{x^2-2x}=4\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x};\quad \left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}\right)^2\cdot 1-4\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}+1=0.$$

Заміна: $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}=t>0,$ тоді $t^2-4t+1=0.\quad D=16-4=12=4\cdot 3.$

$$t_1=\frac{4-\sqrt{4\cdot 3}}{2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1};\quad t_2=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}.$$

Утворюється сукупність рівнянь: $\left[\begin{array}{l}\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1},\\ \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}=\left(2+\sqrt{3}\right).\end{array}\right.$

Оскільки показникова функція монотонна, то розв'яжемо таку сукупність рівнянь: $\left[\begin{array}{l}x^2-2x=-1,\\ x^2-2x=1.\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x^2-2x+1=0,\\ x^2-2x-1=0.\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}(x-1)^2=0,\\ D=4+4=8=4\cdot 2.\end{array}\right.$

$$x_1=1;\quad x_2=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2};\quad x_3=1+\sqrt{2}.$$

Відповідь: $1-\sqrt{2};\ 1;\ 1+\sqrt{2}.$

Рівняння такого типу $3^{x+1}+3^{x-1}+3^{x-2}=5^x+5^{x-1}+5^{x-2}$, розв'язуються способом винесення спільного множника за дужки.

Розв'язання:

$5^{x-1}=5^x:5=\frac{1}{5}\cdot 5^x;\quad 5^{x-2}=5^x\cdot 5^{-2}=\frac{1}{25}\cdot 5^{-x};$ Тоді рівняння можна переписати так:

$$5^x\cdot 3+3^x\cdot\frac{1}{3}+3^x\cdot\frac{1}{3}+3^x\cdot\frac{1}{25}=\left(5^x+5^x\cdot\frac{1}{5}+5^x\cdot\frac{1}{25}\right);\quad 3^x\cdot\left(3+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)=5^x\cdot\left(5+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}\right)=3^x\cdot\frac{31}{9}=5^x\cdot\frac{31}{25}\Big|:\left(5^x\cdot\frac{31}{25}\right);$$

$$\frac{3^x\cdot\frac{31}{9}}{5^x\,\frac{31}{25}}=1;\quad\left(\frac{25}{9}\right)^x\cdot\frac{25}{9}=1;\quad\left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{9}{25};\quad\left(\frac{3}{5}\right)^x=\left(\frac{3}{5}\right)^2;\quad x=2.$$

Відповідь: 2.

Інколи функцію, яка містить змінну в показнику степеня, називають ***експонентою***, а закон, який вона характеризує називається ***експоненціальним***. Так по експоненціальному закону відбувається розмноження бактерій та радіоактивний розпад ядер урану. Експоненціальний закон допомагає у вивчені анодних характеристик електронних ламп. Диференціальні рівняння гармонічних коливань знаходяться в основі електро-радіо техніки. Природа показникових рівнянь обумовила величезну увагу до них, а це сприяє виникненню все нових і нових способів їх розв'язування.

Розв’язати рівняння: $25^x - 10^x = 2^{2x+1}.$

Розв’язання:

$25^x - 10^x = 4^x \cdot 2 \,|: \left(4^x\right);$ $\dfrac{25^x}{4^x} - \dfrac{10^x}{4^x} = \dfrac{4^x \cdot 2}{4^x};$ $\dfrac{\left(5^2\right)^x}{\left(2^2\right)^x} - \left(\dfrac{5}{2}\right)^x = 2;$ $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{2x} - \left(\dfrac{5}{2}\right)^x = 2;$

Позначимо $\left(\dfrac{5}{2}\right)^x = y,$ тоді рівняння матиме вигляд: $y^2 - y - 2 = 0;$ $y_1 = 2,$ $y_2 = (-1);$

$\left(\dfrac{5}{2}\right)^x > 0,$ а тому рівняння $\left(\dfrac{5}{2}\right)^x = (-1)$ – не має дійсних коренів. $\left(\dfrac{5}{2}\right)^x = 2.$

Про логарифмуємо обидві частини з основою $\dfrac{5}{2};$ $\log_{\frac{5}{2}}\left(\dfrac{5}{2}\right)^x = \log_{\frac{5}{2}} 2;$ $x \cdot 1 = \log_{\frac{5}{2}} 2.$

Відповідь: $\log_{\frac{5}{2}} 2.$

Розглянемо таке комбіноване рівняння: $10^{\sin^2 x} + 10^{\cos^2 x} = 11.$

Розв’язання:

Після деяких тотожних перетворень дане рівняння набуває вигляду:

$10^{\cos^2 x} = 10^{1-\sin^2 x} = \dfrac{10}{10^{\sin^2 x}};$ $10^{\sin^2 x} + \dfrac{10}{10^{\sin^2 x}} = 11;$ Введемо таку складну заміну:

$10^{\sin^2 x} = y > 0;$ $y + \dfrac{10}{y} - 11y = 0;$ $y^2 - 11y + 10 = 0;$ $y_1 = 1;$ $y_2 = 10.$

Розглянемо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} 10^{\sin^2 x} = 1; \\ 10^{\sin^2 x} = 10. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 10^{\sin^2 x} = 10^0; \\ 10^{\sin^2 x} = 1. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sin^2 x = 0; \\ \sin^2 x = 11. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi \cdot n,\ n \in Z; \\ \sin^2 x = 11; \\ \sin^2 x = -1. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi \cdot n; \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n; \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\pi \cdot n;$ $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n;$ $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n;$ $n \in Z.$

Процес розв'язування деяких логарифмічних рівнянь значно спрощується, якщо вихідне рівняння замінити відповідним показниковим рівнянням.

$\dfrac{1}{2} \cdot \lg x + 3 \cdot \lg \cdot \sqrt{2+x} = \lg \cdot \sqrt{x \cdot (x+2)} + 2.$

Розв’язання:

Знайдемо О.Д.З.: $\left[\begin{array}{l} x > 0; \\ \sqrt{2+x} > 0. \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x > 0; \\ 2 + x > 0. \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x > 0; \\ x > -2. \end{array}\right.$ $x > 0.$

$\dfrac{1}{2} \cdot \lg x + 3 \cdot \lg \cdot \sqrt{2+x} = \lg \cdot \sqrt{x \cdot (x+2)} + 2.$

$\dfrac{1}{2} \cdot \lg x + 3 \cdot \lg \cdot \sqrt{2+x} - \dfrac{1}{2}\lg\sqrt{x} - \lg\sqrt{x+2} = 2;$

$3 \cdot \lg\sqrt{2+x} - 2\lg\sqrt{x+2} = 2;$

$\lg\sqrt{x+2} = 1;$ $\sqrt{x+2} = 10^1;$ $x + 2 = 100;$ $x = 100 - 2;$ $x = 98.$

Відповідь: 98.

Шлях розв'язування деяких рівнянь значно скорочується, якщо в них своєчасно перейти від однієї основи логарифмів до іншої.

Наприклад: $\sqrt{1+\log_x \sqrt{27}} \cdot \log_3 x + 1 = 0.$

Розв'язання:

Переходимо до основи логарифмів 3: $\log_3 \sqrt{27} = \dfrac{\log_3 \sqrt{27}}{\log_3 x} = \dfrac{\log_3 3^{\frac{3}{2}}}{\log_3 x} = \dfrac{3}{2 \cdot \log_3 x}.$

Тоді рівняння набуватиме такого вигляду: $\sqrt{1+\dfrac{3}{2\log_3 x}} \cdot \sqrt{(\log_3 x)^2} + 1 = 0;$

$\sqrt{\log_3{}^2 x + \dfrac{3}{2}\log_3 x} + 1 = 0;\quad \log_3{}^2 x + \dfrac{3}{2}\log_3 x = (-1)^2;\quad \log_3{}^2 x + \dfrac{3}{2}\log_3 x = 1;$

$\log_3{}^2 x + \dfrac{3}{2}\log_3 x - 1 = 0 \Big| \cdot 2;\quad 2\log_3{}^2 x + 3\log_3 x - 2 = 0;\quad D = 9 + 16 = 25;$

$\log_3 x = \dfrac{-3-5}{4} = -2;\quad x = 3^{-2} = \dfrac{1}{9};\quad \log_3 x = \dfrac{-3+5}{2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2};\quad x = \sqrt{3}.$

Безпосередня перевірка показує, що число $\sqrt{3}$ не задовольняє вихідного рівняння, а $\dfrac{1}{9}$ задовольняє його. Отже, відповідь $\dfrac{1}{9}$.

Відповідь: $\dfrac{1}{9}$.

Розв'язати рівняння: $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0.$

Розв'язання:

$3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0 \Big| : 6^x;\quad \dfrac{3^{2x+4}}{3^x \cdot 2^x} + \dfrac{45 \cdot 6^x}{6^x} - 9 \cdot \dfrac{2^{2x+2}}{3x \cdot 2x} = 0;\quad \dfrac{3^{2x+4}}{2^x} + 45 - 9 \cdot \dfrac{2^{2x+2-x}}{3x} = 0;$

$\dfrac{3^x \cdot 3^4}{2^x} + 45 - 9 \cdot \dfrac{2^{2x+2}}{3x} = 0;\quad 81 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^x - 9 \cdot 4 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 0.$

Заміна $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = y$ приводить до рівняння:

$81y - 36 \cdot \dfrac{1}{y} + 45 = 0 \Big| \cdot y;\quad 81y^2 + 45y - 36 = 0 \Big| : 9;\quad 9y^2 + 5y - 4 = 0;\quad D = 25 + 144 = 169,$

$y_1 = \dfrac{-5-13}{18} = -1;\quad y_2 = \dfrac{-5+13}{18} = \dfrac{4}{9}.\quad \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = -1,\ x \in \varnothing$ в полі R.

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \dfrac{4}{9};\quad \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \left(\dfrac{9}{4}\right)^{-1};\quad \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2};\quad x = -2.$ Відповідь: -2.

При розв'язуванні показникових рівнянь доброю підоймою є формула куба різниці записана у такому вигляді: $(a-b)^3 = (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab \cdot (a-b).$

Проілюструємо сказане на розв'язуванні такого рівняння:

$2^{3x} - 2^{3-3x} = 1 + 6 \cdot \left(2^x - \dfrac{1}{2^{x-1}}\right).$

Розв'язання:

$2^{3x} = (2^x)^3;\quad 2^{3-3x} = (1-2^{1-x})^3;\quad \dfrac{1}{2^{x-1}} = 2^{1-x};$ Тоді вихідне рівняння матиме вигляд:

$\left(2^x\right)^3-\left(2^{1-x}\right)^3=1+6\cdot\left(2^x-2^{1-x}\right);\quad \left(2^x\right)^3-\left(2^{1-x}\right)^3-6\cdot\left(2^x-2^{1-x}\right)=1;\quad 6=3\cdot2=3\cdot\underbrace{2^x\cdot2^{1-x}}_{2^{x+1-x}=2^1=2}$

$\left(2^x\right)^3-\left(2^{1-x}\right)^3-3\cdot2^x\cdot2^{1-x}\cdot\left(2^x-2^{1-x}\right)=1;$ Отже, $\left(2^x-2^{1-x}\right)^3=1;\quad 2^x-\frac{2}{2x}=\frac{(2x)^2-2}{2x};\quad 2^x>0.$

$\left(\frac{\left(2^x\right)^2-2}{2^x}\right)^3=1^3;\quad \frac{\left(2^x\right)^2-2}{2^x}1;\quad \left(2^x\right)^2-2^x-2=0;$ Позначимо $2^x=y,$ тоді зведене квадратне рівняння матиме вигляд: $y^2-y-2=0$ його корені $y_1=-1,\ y_2=2.$
Повертаючись до заміни, маємо: $2^x=-1,\ x\in\varnothing.\quad 2^x=2\Rightarrow x=1.$
Відповідь: 1.
Показникові рівняння типу $4^x+6^x=9^x,$ після нескладних перетворень зводяться до квадратних рівнянь.

Розв'язання:

Враховуючи, що $4^x=2^{2x};\quad 6^x=2^x\cdot3^x;\quad 9^x=3^{2x}.$ Маємо: $2^{2x}+2^x\cdot3^x-3^{2x}=0.$
Розділивши обидві частини цього рівняння на 3^{2x} прийдемо до квадратного рівняння відносно $\left(\frac{2}{3}\right)^x$: $\frac{2^{2x}}{3^{2x}}+\frac{2^x\cdot3^x}{3^{2x}}-\frac{3^{2x}}{3^{2x}};\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+\left(\frac{2}{3}\right)^x-1=0;\ D=1+4=5;$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2\cdot1}$ - це менше нуля, тому $x\in\varnothing$ в R. $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<0,\ x=\log_{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$

Відповідь: $x=\log_{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$

Цікаво розв'язуються рівняння типу: $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4.$

Розв'язання:

Неважко помітити, що підкореневі вирази є спряженими числами.
Розглянемо добуток коренів $\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{4-3}=1.$ Це дає можливість виразити один член рівняння через інший: $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$ Підставивши його у вихідне рівняння матимемо: $\left(\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4.$ Введемо нову змінну: $y=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x,\quad y>0;\quad \frac{1}{y}+y=4.$ Помноживши обидві частини рівняння на y, дістанемо: $y^2-4y+1=0;\quad D=16-4=12;\quad y_1=\frac{4-\sqrt{12}}{2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3};$

$y_2=2+\sqrt{3}.$ Якщо $y=2-\sqrt{3}$, то $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2-\sqrt{3};\quad \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=2+\sqrt{3};\quad \frac{x}{2}=1;\quad x=2.$

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=\frac{1}{2+\sqrt{3}};\quad \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1};\quad \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1};\quad \frac{x}{2}=-1;\quad x=-2.$

Якщо $y=2+\sqrt{3},$ то $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2+\sqrt{3};\quad \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=2+\sqrt{3};\quad \frac{x}{2}=1;\quad x=2.$

Відповідь: $-2;\ 2.$

Завдання для самостійної роботи:

7.1 $3^x = 81.$ Відповідь: 4.

7.2 $3^{x^2-\frac{5}{7}x} = \sqrt[7]{9}.$ Відповідь: $-\frac{2}{7}$; 1.

7.3 $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{1}{27}.$ Відповідь: 1,5.

7.4 $3^{2x+2} + 3^{2x} = 30.$ Відповідь: $\frac{1}{2}.$

7.5 $3^{6-x} = 5^{3x-2}.$ Відповідь: 2.

7.6 $3^{2x} - 6\cdot 5^x + 5 = 0.$ Відповідь: 0; 1.

7.7 $6^x = 1.$ Відповідь: 0.

7.8 $3\cdot 16^x + 2\cdot 81 = 5\cdot 36^x.$ Відповідь: 0; 0,5.

7.9 $e^x = 1.$ Відповідь: 0.

7.10 $(x+3)^{x^2-3} = (x+3)^{x^2}.$ Відповідь: -2; -1; 3.

7.11 $0{,}4^x = 2{,}5.$ Відповідь: $-4.$

7.12 $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6.$ Відповідь: 1,5.

7.13 $\sqrt{2^x\cdot 3^x} = 36.$ Відповідь: 4.

7.14 $6^{2x+4} = 2^{x+8}\cdot 3^{3x}.$ Відповідь: 4.

7.15 $\sqrt{3^x} = 9.$ Відповідь: 4.

7.16 $\sqrt[x]{5^{5\sqrt{x}}} = 5^{\sqrt{x-4}} = 6.$ Відповідь: 25.

7.18 $2{,}56^{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{4\sqrt{x}+1}.$ Відповідь: $\frac{1}{36}.$

7.19 $(x^2-x-1)^{x^2-1} = 1.$ Відповідь: -1; 1; 2.

7.20 $4^{x+1,5} + 2^{x+2} = 4.$ Відповідь: $-1.$

7.21 $3\cdot 4^x - 5\cdot 6^2 + 2\cdot 9^x = 0.$ Відповідь: 0; 1.

7.22 $3^{3x+1} - 4\cdot 27^{x-1} + 9^{1,5x-1} = 80.$ Відповідь: 1.

7.23 $0{,}25^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}.$ Відповідь: $x = 3.$

7.24 $7^{3^x} = \sqrt[9]{7}.$ Відповідь: $x = -2.$

7.25 $3^{2x} = 4\cdot\sqrt[x]{9}.$ Відповідь: 2; $-\frac{\lg 3}{\lg 2}.$

7.26 $7^{1-x} = 7^{x-1}.$ Відповідь: 1.

7.27 $8^x + 18^x - 2\cdot 27^x = 0.$ Відповідь: 0.

7.28 $4\cdot 9^x - 7\cdot 12^x + 3\cdot 16^x = 0.$ Відповідь: 0; 1.

7.29 $3^{2x-1} - 2\cdot 15^x - 5^{2x+1} = 0.$ Відповідь: $-1.$

7.30 $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 14\cdot\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x.$ Відповідь: $-2.$

7.31 $3\cdot 16^x + 2\cdot 81^x - 5\cdot 36^x = 0.$ Відповідь: $\frac{1}{2}$; 0.

7.32 $5^x \cdot \sqrt[x]{8^{x-1}} = 500.$ Відповідь: 3.

7.32.1 $5^{2x-3} = 2 \cdot 5^{x-2} + 3.$ Відповідь: 2.

7.33 $(x-2)^{x^2-x} = (x-2)^{12}.$ Відповідь: $-3;\ 3;\ 4.$

7.33.1 $\left(x^{x+y}\right) = x^{4.}$ Відповідь: 1.

7.34 $\dfrac{(0{,}5)^{x-3}}{(0{,}125)^{2-x}} = 128^x \cdot \sqrt[3]{(0{,}25)^{x-1}}.$ Відповідь: $\dfrac{25}{31}.$

7.35 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3x-1} \cdot \left(\dfrac{8}{27}\right)^{1-x} = \left(\dfrac{9}{4}\right)^x.$ Відповідь: 1.

7.36 $4^{x+1} - 5^{x-1{,}5} = 5^{x+0{,}5} - 2^{2x-4}.$ Відповідь: 2,5.

7.37 $\left(\sqrt[3]{\sqrt{48}-5}\right)^{2x} - \left(\sqrt[3]{\sqrt{26}+5}\right)^{2x} = 10.$ Відповідь: $-1{,}5.$

7.38 $(1{,}4)^{x-8} \cdot \left(1\dfrac{11}{14}\right)^{x-8} = 6\dfrac{1}{4}.$ Відповідь: 10.

7.39 $64^{tg^2 x} + 8 = 9 \cdot 8^{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}.$ Відповідь: $-\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{4} + \pi n;\ \pi n;\ n \in Z.$

7.40 $x^{\log_2 x + 2} = 256.$ Відповідь: $\dfrac{1}{16};\ 4.$

7.41 $4^{x+1} + 4^{x-2} = 260.$ Відповідь: 3.

7.42 $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x.$ Відповідь: $0;\ 0{,}5.$

7.43 $\left(2^{x-4}\right)^{x+3} = 0{,}5^x \cdot 4^{x+6}.$ Відповідь: $-4;\ 16.$

7.44 $3^{x+3} + 5 \cdot 3^{x+2} - 8 \cdot 3^{x+1} = 1\dfrac{7}{9}.$ Відповідь: $-3.$

7.45 $4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x = 0.$ Відповідь: $\{0;\ 1\}.$

7.46 $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0.$ Відповідь: $\{1;\ 2\}.$

7.47 $5 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0.$ Відповідь: $\{0;\ 1\}.$

7.48 $7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0.$ Відповідь: $\{-1;\ 0;\ 1\}.$

7.49 $4^{x+1{,}5} + 9^x = 6^{x+1}.$ Відповідь: $\left\{\log_{\frac{2}{3}} \dfrac{1}{4};\ \log_{\frac{2}{5}} \dfrac{1}{2}\right\}.$

7.50 $3 \cdot 16^x + 37 \cdot 36^x = 26 \cdot 81^x.$ Відповідь: $\{0{,}5\}.$