Розділ 6
Ірраціональні рівняння

Ірраціональними називаються рівняння, в яких змінна знаходиться під знаком кореня.

В З.О.Ш. вони розв’язуються тільки в множині дійсних чисел.

Щоб розв’язати ірраціональне рівняння, необхідно шляхом тотожних перетворень до раціонального. Досягається це шляхом піднесення обох частин рівняння до степеня, або введенням нової змінної. Оскільки при піднесенні обох частин рівняння до парного степеня можлива поява сторонніх коренів, то для їх «від фільтрації» доцільно підставити всі знайдені значення коренів і вихідне рівняння.

Розглянемо деякі методи розв’язування ірраціональних рівнянь, а саме:

1). Введення нової змінної;

2). Застосування формул скороченого множення;

3). Введення спряжених виразів;

4). Винесення спільного множника за дужки.

Розв’язати рівняння: $\sqrt{5x-1} = x+1.$

Розв’язання:

Підносимо обидві частини рівняння до квадрату: $5x-1 = x^2+2x+1;$
$x^2-3x+2=0;$ За теоремою Вієта $x_1 = 1;$ $x_2 = 2.$ Перевірка: якщо $x=1,$ то $\sqrt{5\cdot 1-1} = 1+1;$ $2=2.$ $1-$корінь рівняння. Якщо $x=2,$ то $\sqrt{5\cdot 2-1} = 2+1;$ $3=3.$ $2-$корінь рівняння.

Відповідь: 1; 2.

Розв’язати рівняння: $\sqrt{5x-3} = \sqrt{5-3x}.$

Розв’язання:

Піднесемо обидві частини до квадрату: $5x-3=5-3x;$ $5x+3x=5+3;$ $8x=8;$ $x=1.$
Перевірка: $\sqrt{5\cdot 1-3} = \sqrt{5-3\cdot 1};$ $\sqrt{2}=\sqrt{2}-$правильна рівність. $1-$ корінь рівняння.

Відповідь: 1.

Розв’язати рівняння: $\sqrt{6x-2}-\sqrt{4x-3}-\sqrt{x-2}=0.$

Розв’язання:

$\sqrt{6x-2}-\sqrt{4x-3}-\sqrt{x-2}=0.$ Підносимо обидві частини до квадрату:
$6x-2-2\cdot\sqrt{6x-2}\cdot\sqrt{4x-3}+4x-3 = x-2;$ $10x-5-2\sqrt{(6x-2)\cdot(4x-3)} = x-2;$
$10x-5-x+2 = 2\sqrt{(6x-2)(4x-3)};$ $10x-3 = 2\cdot\sqrt{(6x-2)(4x-3)};$ Знову підносимо обидві частини рівняння до квадрату: $81x^2-54x+9 = 4\cdot(6x-2)\cdot(4x-3);$
$81x^2-54x+9 = 4(24x^2-18x-8x+6);$ $81x^2-54x+9-96x^2+72x+32x-24=0;$
$-15x^2+50x-15=0 \,|:(-5);$ $3x^2-10x+3=0;$ $D=100-36=64=8^2;$

$x_1 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3}$; $x_2 = \frac{10+8}{6} = 3$; Перевірка: якщо $x = \frac{1}{3}$, то
$\sqrt{6 \cdot \frac{1}{3} - 2} - \sqrt{4 \cdot \frac{1}{3} - 3} - \sqrt{\frac{1}{3} - 2} \neq 0$. Отже $\frac{1}{3}$ сторонній корінь. Якщо $x = 3$, то
$\sqrt{6 \cdot 3 - 2} - \sqrt{4 \cdot 3 - 3} - \sqrt{3 - 2} = 0$; $3 -$ корінь рівняння.
Відповідь: 3.
Розв'язати рівняння: $\sqrt[3]{3-x} + \sqrt[3]{3+x} = 1$.

Розв'язання:

Запишемо формулу суми кубів у такому вигляді:
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab \cdot (a+b)$; Піднесемо обидві частини рівняння до кубу і застосуємо вищезгадану тотожність:
$3 - x + 3 + x + 3 \cdot \sqrt[3]{3-x} \cdot \sqrt[3]{3+x} \cdot \left(\sqrt[3]{3-x} + \sqrt[3]{3+x}\right) = 1$; $6 + 3 \cdot \sqrt[3]{(3-x) \cdot (3+x)} \cdot 1 = 1$;
$3 \cdot \sqrt[3]{9 - x^2} = -5$; Підносимо обидві частини рівняння до кубу: $27 \cdot \left(9 - x^2\right) = -125$;
$9 - x^2 = \frac{-125}{27}$; $x^2 = 9 + \frac{125}{27}$; $x^2 = \frac{243 + 125}{27}$; $x^2 = \frac{368}{27} = \frac{16 \cdot 23}{9 \cdot 3}$; $x_2 = \frac{4}{9}\sqrt{69}$.
Відповідь: $-\frac{4}{9} \cdot \sqrt{69}$; $\frac{4}{9}\sqrt{69}$.
Розв'язати рівняння $5\sqrt[6]{x-6} = \sqrt[3]{x-6} + 6$.

Розв'язання:

Введемо нову змінну $\sqrt[6]{x-6} = t$, $\left(\sqrt[6]{x-6}\right)^2 = t^2$, $\sqrt[3]{x-6} = t^2$.
Тоді вихідне рівняння матиме вигляд $t^2 - 5t + 6 = 0$. Його корені по теоремі Вієта $t_1 = 2$; $t_2 = 3$. Тоді $\sqrt[6]{x-6} = 2$, $\left(\sqrt[6]{x-6}\right)^6 = 2^6$; $x - 6 = 64$; $x = 64 + 6$; $x = 70$;
$\sqrt[6]{x-6} = 3$; $\left(\sqrt[6]{x-6}\right)^6 = 3^6$; $x - 6 = 729$; $x = 729 + 6$; $x = 735$. Перевірка: Якщо $x = 70$, то $5 \cdot \sqrt[6]{70-6} = 5 \cdot \sqrt[6]{64} = 5 \cdot 2 = 10$; $\sqrt[3]{70-6} + 6 = \sqrt[3]{64} + 6 = 4 + 6 = 10$; $10 = 10$.
$70 -$ корінь рівняння. Якщо $x = 735$, то $5 \cdot \sqrt[6]{735-6} = 5 \cdot \sqrt[6]{729} = 5 \cdot 3 = 15$;
$\sqrt[3]{735-6} + 6 = \sqrt[3]{729} + 6 = 9 + 6 = 15$. $15 = 15$. $735 -$ корінь рівняння.
Відповідь: 70; 735.
Розв'язати рівняння : $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7$.

Розв'язання:

Позначимо $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} - \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = A$. Перемножимо вихідне рівняння та тільки що утворене. $\left(\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8}\right) \cdot \left(\sqrt{3x^2 - 2x + 15} - \sqrt{3x^2 - 2x + 8}\right) = 7A$;
$3x^2 - 2x + 15 - \left(3x^2 - 2x + 8\right) = 7A$; $3x^2 - 2x + 15 - 3x^2 + 2x - 8 = 7A$; $7A = 7$; $A = 1$.
Розв'яжемо таку систему рівнянь $\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7, \\ \sqrt{3x^2 - 2x + 15} - \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 1. \end{cases}$
Додавши ці рівняння, одержимо $2\sqrt{3x^2 - 2x + 15} = 8 |: 2$; $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} = 4$.
Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату $3x^2 - 2x + 15 = 16$;
$3x^2 - 2x - 1 = 0$; $D = 4 + 12 = 16$; $x_1 = \frac{2-4}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$; $x_2 = \frac{2+4}{6} = 1$.
Перевірка показує, що обидва знайдені числа задовольняють рівняння.

Відповідь: $-\frac{1}{3}$; 1.

Існує багато ірраціональних рівнянь, розв'язування яких значно спрощується тоді, коли підкореневий вираз розкласти на множники з наступним винесенням спільного множника за дужки. Наприклад, розв'язати рівняння $\sqrt{2x^2+7x-15}+\sqrt{2x^2-3x}=\sqrt{4x^2+4x-15}.$

Розв'язання:

$\sqrt{2x^2+7x-15}+\sqrt{2x^2-3x}-\sqrt{4x^2+4x-15}=0.$ Розкладемо кожний з підкореневих виразів $2x^2+7x-15,\quad 2x^2-3x,\quad 4x^2+4x-15.$ Для першого і третього многочленів застосуємо формулу розкладання квадратного тричлена на множники: $ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2),$ де x_1 та x_2 – корені даного тричлена.

$D=7^2+4\cdot2\cdot15=49+120=169,\quad x_1=\frac{-7-\sqrt{169}}{2\cdot2}=\frac{-7-13}{4}=-5;\quad x_2=\frac{-7+13}{4}=\frac{3}{2},$ тоді

$2x^2+7x-15=2\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot(x+5)=(2x-3)\cdot(x+5).$ $D=16+16\cdot15=256,$

$x_1=\frac{-4-16}{8}=-\frac{20}{8}=-\frac{5}{2};\quad x_2=\frac{-4+16}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2},$ тоді

$4x^2+4x-15=4\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{5}{2}\right)=2\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot2\left(x+\frac{5}{2}\right)=(2x-3)\cdot(2x+5).$

$2x^2-3x=x\cdot(2x-3).$ Рівняння набуває вигляду

$\sqrt{(2x-3)\cdot(x+5)}+\sqrt{x\cdot(2x-3)}-\sqrt{(2x-3)\cdot(2x+5)}=0.$

$\sqrt{2x-3}\cdot\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\cdot\sqrt{2x-3}-\sqrt{2x-3}\cdot\sqrt{2x+5}=0;\quad \sqrt{2x-3}\cdot\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}-\sqrt{2x+5}\right)=0;$

$\sqrt{2x-3}=0,$ або $\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}-\sqrt{2x+5}\right)=0;$

$2x-3=0;\qquad \sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{2x+5};$

$x=1{,}5;$ Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$x+5+2\sqrt{(x+5)\cdot x}+x=2x+5;\quad 2\cdot\sqrt{(x+5)\cdot x}=0;\quad \left[\begin{array}{l}x+5=0,\\ x=0\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=-5,\\ x=0.\end{array}\right.$

Перевірка показує, що при $x=0$ перший і третій радикали не мають змісту, а числа $1{,}5$ і -5 задовольняють рівняння.

Відповідь: -5; $1{,}5$.

Розв'язування рівнянь із взаємно оберненими величинами зводиться після введення нової змінної до квадратного рівняння.

Розв'язати рівняння: $\sqrt[3]{\frac{5-x}{x+3}}+\sqrt[3]{\frac{x+3}{5-x}}=2.$

Розв'язання:

О.Д.З.: $x\neq(-3);$ $x\neq5.$ Позначимо $\sqrt[3]{\frac{5-x}{x+3}}=t,$ тоді $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5-x}}=\frac{1}{t};\quad t+\frac{1}{t}=2;$

$\frac{t^2-2t+1}{t}=0;\quad \begin{cases}t^2-2t+1=0,\\ t\neq0.\end{cases}\quad \begin{cases}(t-1)^2=0,\\ t\neq0.\end{cases}\quad \begin{cases}t=1,\\ t\neq0.\end{cases}\quad \sqrt[3]{\frac{5-x}{x+3}}=1;\quad \frac{5-x}{x+3}=1;$

$5-x=x+3;\quad 5-x=x+3;\quad -2x=-2;\quad x=1.$ Перевірка показує, що 1 задовольняє вихідне рівняння.

Відповідь: 1.

Інколи корисно замінити ірраціональне рівняння системою рівнянь.
Розв'язати рівняння: $2\cdot\sqrt{3x-2}=18-2\cdot\sqrt{x+7}.$

Розв'язання:

$2\cdot\sqrt{3x-2}+2\cdot\sqrt{x+7}=18\,|:2;\quad \sqrt{3x-2}+\sqrt{x+7}=9\quad (A).$ Розв'язавши систему нерівностей, знайдемо О.Д.З. рівняння.

$\begin{cases}3x-2\ge 0,\\ x+7\ge 0.\end{cases}\quad \begin{cases}3x\ge 2,\\ x\ge -7.\end{cases}\quad \begin{cases}x\ge \frac{2}{3};\\ x\ge 7.\end{cases}\quad \left[\frac{2}{3};+\infty\right)$ – область визначення рівняння.

Введемо нові змінні, а саме: $\sqrt{3x-2}=m,\ m\ge 0.\quad \sqrt{x+7}=n,\ n\ge 0.$ Піднісши обидві частини до квадрату, одержимо: $3x-2=m^2;\quad x+7=n^2\,|\times(-3);$

$$+\begin{cases}-3x-21=-3n^2\\ 3x-2=m^2\end{cases}$$
$$-23=m^2-3n^2$$

$\begin{cases}m+n=9;\\ m^2-3n^2=-23.\end{cases}\quad \begin{cases}n=9-m;\\ m^2-3(9-m)^2+23=0.\end{cases}\quad \begin{cases}n=9-m;\\ m^2-3\cdot(81-18m+m^2)+23=0.\end{cases}$

$m_1=5;\ m_2=22;\ n_1=9-5=4;\ n_2=9-22=-13.$

Повертаємось до підстановки: $\sqrt{3x-2}=5;\ 3x-2=25;\ 3x=27;\ x=9.$

n=−13−сторонній корінь, бо не задовольняє умову $n\ge 0.$ Безпосередня перевірка показує, що число 9−корінь рівняння.

Відповідь:9.

Часто зустрічаються такі ірраціональні рівняння, для розв'язування яких достатньо замінити новою змінною лише один декількох радикалів.
Розв'язати рівняння: $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+6}=6.$

Розв'язання:

О.Д.З.: $x+6\ge 0,\ x\ge -6.$ Введемо нову змінну $\sqrt[3]{x-2}=y,$ тоді $x-2=y^3,$
$x=y^3+2,\quad \sqrt{x+6}=\sqrt{y^3+2+6}=\sqrt{y^3+8},\quad y+\sqrt{y^3+8}=6,\quad \sqrt{y^3+8}=6-y.$

Після піднесення обох частин рівняння до квадрату, одержимо:
$y^3+8=36-12y+y^2;\quad y^3-y^2+12y-28=0.$ Дільники вільного члена рівняння: $28\mathrm{M}\{\pm1,\ \pm2,\ \pm4,\ \pm7,\ \pm14;\ \pm28\}.$ Якщо $y=2,$ то $2^3-2^2+12\cdot2-28=8-4+24-28=0.$
$y=2$ – корінь рівняння.

$$\begin{array}{r|l} y^3-y^2+12y-28 & y-2 \\ \cline{2-2} -\underline{y^3-2y^2} & y^2+y+14 \\ -y^2+12y & \\ \underline{y^2-2y} & \\ -14y-28 & \\ \underline{14y-28} & \\ 0. & \end{array}$$

Рівняння $y^2+y+14=0$ дійсних коренів немає, бо його дискримінант від'ємний. $\sqrt[3]{x-2}=2,\ x-2=8,\ x=10.$ Безпосередня перевірка показує, що число 10 є коренем рівняння.

Покажемо ще один, на наш погляд, унікальний спосіб розв'язування ірраціональних рівнянь вище згаданого типу: $\sqrt[3]{x+24}=\sqrt{12-x}$.

Розв'язання:

Введемо такі позначення:

$\sqrt[3]{x+24}=y_1$; $\sqrt{12-x}=y_2$ тоді $y_1=y_2$. Підносячи першу рівність до кубу, другу до квадрату і враховуючи третю рівність, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} {y_1}^3=x+24, \\ {y_2}^2=12-x, \\ y_1=y_2. \end{cases}$$

$$+\begin{array}{l} {y_2}^3=x+24, \\ \underline{{y_2}^2=12-x} \end{array}$$

${y_2}^3+{y_2}^2=36$, ${y_2}^2+{y_2}^2-36=0.$

$\{\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm6,\ \pm9,\ \pm12,\ \pm18,\ \pm36\}$ – дільники вільного члена рівняння.

Послідовно підставляючи їх у рівняння переконуємось, що число 3 є коренем його: $3^3+3^2-36=27+9-36=0.$

${y_2}^3+{y_2}^2-36$

$$\begin{array}{r|l} {y_2}^3+{y_2}^2-36 & y_2-3 \\ \cline{2-2} -\underline{{y_2}^3-3{y_2}^2} & {y_2}^2+4y_2+12 \\ -\underline{4{y_2}^2-36} \\ \underline{4{y_2}^2-12y_2} \\ -12y_2-36 \\ \underline{12y_2-36} \\ 0. \end{array}$$

${y_2}^2+4y_2+12=0$, $D=16-48<0$, $y_2\in\varnothing.$

У другу рівність замість y_2 підставимо число 3: $\sqrt{12-x}=3$, $12-x=9$, $x=3.$

Число 3 задовольняє вихідне рівняння.

Відповідь: 3.

В деяких рівняннях корисно переносити з однієї частини в іншу тільки один член, але такий ,щоб суми коефіцієнтів при змінних в обох частинах рівняння були однаковими.

Розв'язати рівняння: $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}.$

Розв'язання:

$\sqrt{8x+1}-\sqrt{2x-2}=\sqrt{7x+4}-\sqrt{3x-5}$;   8+2=10; 7+3=10.

Після піднесення обох частин рівняння до квадрату маємо:

$8x+1-2\sqrt{(8x+1)\cdot(2x-2)}+2x-2=7x+4-2\cdot\sqrt{(7x+4)\cdot(3x-5)}+3x-5;$

$10x-1-2\sqrt{(8x+1)\cdot(2x-2)}=10x-1-2\cdot\sqrt{(7x+4)\cdot(3x-5)};$

$2\sqrt{(8x+1)\cdot(2x-2)}=-2\cdot\sqrt{(7x+4)\cdot(3x-5)};$

$\sqrt{(8x+1)\cdot(2x-2)}=\sqrt{(7x+4)\cdot(3x-5)}$; $(8x+1)\cdot(2x-2)=(7x+4)\cdot(3x-5);$

$16x^2-16x+2x-2=21x^2-35x+12x-20;$ $5x^2+9x+18=0;$ $5x^2-9x-18=0;$
D=81+360=441;
$x_1=\frac{9-21}{10}=-1{,}2;$ $x_2=\frac{9+21}{10}=3$. Безпосередньою перевіркою переконуємось, що тільки число 3 | є коренем вихідного рівняння. Відповідь: 3.

Хочеться познайомити працюючих з «Практикумом по розв'язуванню задач з елементарної математики»з оригінальним способом розв'язування ірраціональних рівнянь такого вигляду $\sqrt{x+3-4\cdot\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\cdot\sqrt{x-1}}=1.$

Розв'язання:

Введемо нову змінну $\sqrt{x-1}=y$, $y\geq 0.$ $\left(\sqrt{x-1}\right)^2=y^2;$ $x-1=y^2;$ $x=y^2+1.$
Тоді дане рівняння матиме вигляд $\sqrt{y^2+1+3-4y}+\sqrt{y^2+1+8-6y}=1;$

$$\sqrt{y^2-4y+4}+\sqrt{y2-6y+9}=1; \quad \sqrt{(y-2)^2}+\sqrt{(y-3)^2}=1;$$

$|y-2|+|y-3|=1$.Підмодульні різниці прирівняємо до нуля, розв'яжемо утворені рівняння і з
врахуванням нерівності $y\geq 0$ позначимо знайдені корені рівняння на числовому промені : $y-2=0;y=2.$ $y-3=0;$ $y=3.$
На $[0;2)$ $y-2<0,$ а тому $|y-2|=-(y-2)=2-y;$

$y-3<0,$ а тому $|y-3|=-(y-3)=3-y;$

Рівняння (1) набуває вигляду: $2-y+3-y=1;$ $-2y=-4;$ $y=2;$ $2\notin[0;2)$.
На цьому проміжку рівняння коренів не має. На проміжку $[2;3)$
$y-2>0,$ $|y-2|=y-2;$ $y-3<0,$ $|y-3|=-(y-3)=3-y.$ $y-2+3-y=1,$ $1=1$ при будь-якому значенні змінної y з $[2;3)$. $2\leq\sqrt{x-1}<3;$ $4\leq x-1<9;$ $5\leq x<10;$ $x\in[5;10)$.
На $[3;+\infty)$; $y-2>0;$ $|y-2|=y-2.$ $y-3>0;$ $|y-3|=y-3.$ $y-2+y-3=1;$ $2y=6;$ $y=3;$ $3\in[3;+\infty)$. 3 – корінь рівняння (1). $\sqrt{x-1}=3;$ $x-1=9;$ $x=10.$ Таким чином, розв'язками даного рівняння є (відрізок) $[5;10]$.
Відповідь: $[5;10]$.

Жвавий інтерес викликає спосіб розв'язування рівнянь такого типу
$\frac{10x^3-3x^2-2x+1}{\sqrt{x-2}}=0.$

Розв'язання:

З умови рівності дробу нулеві випливає така система. $\begin{cases}10x^3-3x^2-2x+1=0;\\ \sqrt{x-2}\neq 0.\end{cases}$

Неважко помітити, що $x\neq 0,$ а тому розділимо обидві частини рівняння на x^3 з наступним введенням нової змінної. $10x^3-3x^2-2x+1=0\,|:x^3;$

$10-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0$. Вводимо нову змінну $\frac{1}{x}=y;$ $10-3y-2y^2+y^3=0;$
$y^3-2y^2-3y+10=0$ (1). $10M\{\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 5;\ \pm 10\}$. Якщо $y=-2,$ то

$(-2)^3-2\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+10=-8-8+6+10=0$; 0=0; Це означає, що $y=-2$ – корінь рівняння (1). $\frac{1}{x}=-2;\;\; x=-\frac{1}{2}.$

$$\begin{array}{l|l} -\;y^3+2y^2-3y+10 & y+2 \\ \quad\underline{y^3+2y^2} & \overline{y^2+4y+5} \\ \qquad -\;-4y^2-3y & \\ \qquad\quad \underline{-4y^2-8y} & \\ \qquad\qquad -\;5y+10 & \\ \qquad\qquad\quad \underline{5y+10} & \\ \qquad\qquad\qquad 0. & \end{array}$$

$y^2-4y+5=0$; $D=16-20=-4<0$; $y\in\varnothing$ в полі R.

Перевірка: якщо $x=-\frac{1}{2}$, то $10\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=-\frac{10}{8}-\frac{3}{4}+1+1=0.$

Відповідь: $-\frac{1}{2}.$

Довести, що рівняння $\sqrt{x^4+x-2}+\sqrt[4]{x^4+x-2}=6$ має єдиний додатний корінь і знайти його.

Розв’язання:

Введемо нову змінну: $\sqrt[4]{x^4+x-2}=t;\quad \sqrt{x^4+x-2}=t^2.$ Вихідне рівняння має вигляд: $t^2+t-6=0.$ За теоремою Вієта: $t_1=-3;\;\; t_2=2.\;\; \sqrt[4]{x^4+x-2}=-3,\;\; x\in\varnothing.$

$\sqrt[4]{x^4+x-2}=2;\quad x^4+x-2=16;\quad x^4-16+x-2=0;\quad (x^2-4)\cdot(x^2+4)+(x-2)=0;$

$(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x^2+4)+(x-2)=0;\quad (x-2)\cdot((x+2)\cdot(x^2+4)+1)=0.$

$\left[\begin{array}{l} x-2=0, \\ x^3+4x+2x^2+8+1=0. \end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x^3+2x^2+4x+9=0 \end{array}\right.$ це рівняння додатних коренів не має.

Знайдемо від'ємні дільники числа 9: $\{-1;\; -3;\; -9\}.$

Якщо $x=-1,$ то $(-1)^3+2\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)+9=-1+2-4+9\neq 0.$

Якщо $x=-3,$ то $(-27)+18-12+9\neq 0.$

Якщо $x=-9,$ то $729+162-36+9\neq 0.$

Перевірка: якщо $x=2,$ то $\sqrt{2^4+2-2}+\sqrt[4]{2^4+2-2}=\sqrt{2^4}+\sqrt[4]{2^4}=4+2=6;\;\; 6=6.$

Відповідь: $x=2$ – єдиний додатний корінь.

Завдання для самостійної роботи:

Розв’язати рівняння:

6.1 $\sqrt{20-x}=7-\sqrt{x+5}.$ Відповідь: 4; 11.

6.2 $\sqrt{x-3-4+\sqrt{2x+1}}=0$ Відповідь: 4.

6.3 $\sqrt{x^2+5x-2}-\sqrt{x^2-3x+3}=3.$ Відповідь:2.

6.4 $\sqrt[3]{\dfrac{12-2x}{x-1}}+\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{12-2x}}=\dfrac{5}{2}$. Відповідь: 2; $\dfrac{97}{17}$.

6.5 $\sqrt{x^2+x-1}=x$. Відповідь: 1.

6.6 $\sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{x}$. Відповідь: 1.

6.7 $\sqrt[3]{x^3-19}=x-1$. Відповідь: $-2;\ 3$.

6.8 $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-5}$. Відповідь: 3.

6.9 $2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+12$. Відповідь: $-2;\ 3{,}5$.

6.10 $\sqrt{\dfrac{x-5}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{x-4}{x+3}}=\dfrac{7}{x+2}\cdot\sqrt{\dfrac{x+2}{x+3}}$. Відповідь: 6.

6.11 $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}-\sqrt{x-3}=\sqrt{x-6}$. Відповідь: $\varnothing$.

6.12 $\sqrt[8]{x^5}+2\sqrt{x}=3\cdot\sqrt[4]{x^3}$. Відповідь: 0; 1.

6.13 $\sqrt{x^2-3x+11}-4x^2+12x=11$. Відповідь: 1; 2.

6.14 $\dfrac{(x-1)\cdot\sqrt[3]{10-x}-(10-x)\cdot\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{10-x}}$. Відповідь: 2; 9.

6.15 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{13-x^2}}=\dfrac{5}{6}$. Відповідь: $\dfrac{-\sqrt{481}+13}{10};\ 2;\ 3$.

6.16 $\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x-13}=2$. Відповідь: $-7;\ 7$.

6.17 $\sqrt[4]{x+62}+\sqrt[4]{6-x}=3\sqrt{2}$. Відповідь: $-58;\ 2$.

6.18 $\sqrt[4]{x+14}+\sqrt[4]{3-x}=3$. Відповідь: $-13;\ 2$.

6.19 $x\cdot\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x^2+15}=2$. Відповідь: 1.

6.20 $x^2-4x+6=\sqrt{2x^2-8x+12}$. Відповідь: 2.

6.21 $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$. Відповідь: $0;\ -5$.

6.22 $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\cdot\sqrt{2x^2+5x+3}=16$. відповідь: 3.

6.23 $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$. Відповідь: 8.

6.24 $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1}{3}$. Відповідь: 64.

6.25 $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$. Відповідь: $-1;\ 1$.

6.26 $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$. Відповідь: 3.

6.27 $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(2-x)\cdot(7+x)}=3$. Відповідь: $-6;\ 1$.

6.28 $x^2+x\cdot\sqrt{x+1}-2\cdot(x+1)=0$. Відповідь: $2+2\sqrt{2};\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

6.29 $\dfrac{(x-a)\cdot\sqrt{x-a}+(x-b)\cdot\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=a-b$, якщо $a>b$.

Відповідь: $x_1=a;\ x_2=\dfrac{4a-b}{3}$.

6.30 $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3$. Відповідь: 64.

6.31 $\sqrt[3]{x+1}=\sqrt{x-3}$. відповідь: 7.

6.32 $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{27-14x}=1$. Відповідь: 1.

6.33 $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$. Відповідь: $x\in(-2;0)\cup(1;+\infty)$.

6.34 $\sqrt{x-2\cdot\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3}-4\cdot\sqrt{x-1}=1$.

Відповідь: $x\in(-\infty;-1)\cup(0;2)$.

6.35 $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$. Відповідь: 8.