Розділ 3
Степені. Корені. Логарифми

Степенем числа a з натуральним показником $n \rangle 1$ називається добуток n множників, кожний з яких дорівнює a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{\text{n множників}}$$

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \to$ значення степеня.

$\Rightarrow$ степінь

$\Rightarrow$ основа степеня

$\Rightarrow$ показник степеня.

Степенем невід'ємного числа a з невід'ємним дійсним показником $L = L_0, L_1 L_2 L_3 L_4 \ldots$ називається границя послідовності степенів числа a з раціональними показниками, які є наближеними значеннями числа L з точністю до 0,1; 0,01; 0,001… з недостачею. $a^L = \lim\limits_{n \to \infty} a^{Ln}$

За означенням маємо: $a^1 = a$; $a^0 = 1$; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$; $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$; $\begin{pmatrix} a \notin R, \\ a \neq 0, \\ n \notin N. \end{pmatrix}$

Наприклад: $5^1 = 5$; $6^0 = 1$; $7^{-3} = \dfrac{1}{7^3} = \dfrac{1}{343}$; $3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3}$.

Властивості степеня з довільним дійсним показником:

1). $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ – *множення степенів з однаковими основами;*

2). $a^x : a^y = a^{x-y}$ – *ділення степенів з однаковими основами;*

3). $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$ – *піднесення степеня до степеня;*

4). $(a \cdot в)^x = a^x \cdot в^x$ – *піднесення добутку до степеня;*

5). $\left(\dfrac{a}{в}\right)^x = \dfrac{a^x}{в^x}$ – *піднесення дробу до степеня.*

Знайти значення виразу:

3.1 а). $81^{0,75} = 81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{\left(3^4\right)^3} = 3^3 = 27.$

б). $\left(-2\dfrac{1}{2}\right)^3 \cdot 0{,}25^2 \cdot \left((-5)^{-3}\right)^{-2} \cdot \left((0{,}1)^2\right)^{-2} = \left(-\dfrac{5}{2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{5}{4}\right)^2 \cdot (-5)^6 \cdot \left(\dfrac{1}{10}\right)^{-4} = -\dfrac{5^3 \cdot 1 \cdot 1}{2^3 \cdot 2^4 \cdot 5^6} \cdot (2 \cdot 5)^4 =$

$= -\dfrac{5^3 \cdot 2^4 \cdot 5^4}{2^3 \cdot 2^4 \cdot 5^6} = -\dfrac{5^7}{2^3 \cdot 5^6} = -\dfrac{5}{8}.$

в). $\left(16^{\frac{5}{4}} - 125^{\frac{2}{3}} + 9^{\frac{3}{2}} + 27^{\frac{4}{3}} + (0{,}1)^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\left(2^4\right)^{\frac{5}{4}} - \left(5^3\right)^{\frac{2}{3}} + \left(3^2\right)^{\frac{3}{2}} + \left(3^3\right)^{\frac{4}{3}} + 10\right)^{\frac{1}{3}} =$

$= \left(2^5 - 5^2 + 3^3 + 3^4 + 10\right)^{\frac{1}{3}} = (32 - 25 + 27 + 81 + 10)^{\frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{3}} = \left(5^3\right)^{\frac{1}{3}} = 5.$

г).

$$\left(15\cdot 45^{\frac{5}{3}}\right):75^{1\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{4}}\cdot 9^{\frac{3}{8}}=\frac{15\cdot 45^{\frac{5}{3}}}{75^{1\frac{1}{3}}}+3^{\frac{1}{4}}\cdot\left(3^2\right)^{\frac{3}{8}}=\frac{3\cdot 5\cdot(9\cdot 5)^{\frac{5}{3}}}{\left(5^2\cdot 3\right)^{\frac{4}{3}}}+3^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{5\cdot 3\cdot\left(5\cdot 3^2\right)^{\frac{5}{3}}}{\left(3\cdot 5^2\right)^{\frac{4}{3}}}+3^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{3}{4}}=\frac{5\cdot 5^{\frac{5}{3}}\cdot 3\cdot 3^{\frac{10}{3}}}{3^{\frac{4}{3}}\cdot 5^{\frac{8}{3}}}+3=\frac{5^{\frac{8}{3}}\cdot 3^{\frac{13}{3}}}{3^{\frac{4}{3}}\cdot 5^{\frac{8}{3}}}+3=3^{\frac{9}{3}}+3=3^3+3=27+3=30.$$

д).

$$\left(5^{-3}\right)^0+\left(81\cdot 10^{-4}\right)^{0,25}-\left(3^{-0,8}\cdot 5^{0,5}\cdot 81^{\frac{1}{5}}\right)^{-2}+\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}=1+\left(3^4\right)^{0,25}\cdot\left(10^{-4}\right)^{0,25}-\left(3^{-\frac{4}{5}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}\cdot\left(3^4\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{-2}+\left(\frac{4}{5}\right)^2=$$

$$=1+3\cdot 10^{-1}-\left(3^{-\frac{4}{5}}\cdot 3^{\frac{4}{5}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1\frac{3}{10}-\left(1\cdot 5^{-1}\right)+\frac{16}{25}=1\frac{3}{10}-\frac{1}{5}+\frac{16}{25}=1\frac{15-10+32}{50}=1\frac{37}{50}=1{,}74.$$

е).

$$\left(\left(a^{\frac{3}{2}}\cdot в^{-\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}\cdot в^{\frac{3}{2}}\right):\left(\frac{a^2+в^2}{ав}+1\right)\right)\cdot\frac{(a-в)^{-1}}{(ав)^{-\frac{1}{2}}}=\left(\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}}{в^{\frac{3}{2}}}-\frac{в^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}\right):\frac{a^2+в^2+ав}{ав}\right)\cdot\frac{(ав)^{\frac{1}{2}}}{a-в}=$$

$$=\frac{a^3-в^3}{(ав)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{ав}{a^2+ав+в^2}\cdot\frac{(ав)^{\frac{1}{2}}}{a-в}=\frac{(a-в)\cdot\left(a^2+в^2+ав\right)\cdot(ав)^{\frac{3}{2}}}{(ав)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(a^2+в^2+ав\right)\cdot(a-в)}=1.$$

є).

$$\left(\frac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}}+в^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{в}}{a^{\frac{3}{2}}-в^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right)\cdot(ав)^{-\frac{1}{2}}=\left(\left(a^{\frac{1}{2}}+в^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}-в^{\frac{1}{2}}}{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3-\left(в^{\frac{1}{2}}\right)^3}\right)^{-1}\right)\cdot\frac{1}{(ав)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\left(a+2a^{\frac{1}{2}}в^{\frac{1}{2}}+в-\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-в^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(a+2a^{\frac{1}{2}}в^{\frac{1}{2}}+в\right)}{\left(a^{\frac{1}{2}}-в^{\frac{1}{2}}\right)}\right)\cdot\frac{1}{(ав)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(a\cdot в)^{\frac{1}{2}}}{(a\cdot в)^{\frac{1}{2}}}=1.$$

3.2 Спростити вираз та обчислити його значення при *а*=1,8; *в*=0,5

$$\frac{\left(a\cdot в^{-1}+a^{-1}в+1\right)\cdot\left(a^{-1}-в^{-1}\right)}{a^2\cdot в^{-2}+a^{-2}\cdot в^2-\left(a\cdot в^{-1}+a^{-1}\cdot в\right)}=\frac{\left(\frac{a}{в}+\frac{в}{a}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{в}\right)^2}{\frac{a^2}{в^2}+\frac{в^2}{a^2}-\left(\frac{a}{в}+\frac{в}{a}\right)}=\frac{\frac{a^2+в^2+ав}{ав}\cdot\left(\frac{в-a}{ав}\right)^2}{\frac{a^4+в^4}{a^2в^2}-\frac{a^2+в^2}{ав}}=$$

$$=\frac{\frac{\left(a^2+ав+в^2\right)\cdot(в-a)^2}{a^3в^3}}{\frac{a^4+в^4-a^3в^2-a^2в^3}{a^2в^2}}=\frac{\left(a^2+ав+в^2\right)\cdot(в-a)^2\cdot a^2в^2}{a^3в^3\left(a^4+в^4-a^3в^2-a^2в^3\right)}=\frac{\left(a^2+ав+в^2\right)\cdot(a-в)^2}{ав\cdot\left(\left(a^4-a^3в^2\right)-\left(a^2в^3-в^4\right)\right)}=$$

$$=\frac{\left(a^2+ав+в^2\right)\cdot(a-в)^2}{ав\cdot\left(a^3\cdot\left(a-в^2\right)-в^3(a-в)\right)}=\frac{\left(a^2+ав+в^2\right)\cdot(a-в)^2}{ав\cdot(a-в)\cdot\left(a^3-в^3\right)}=\frac{\left(a^2+ав+в^2\right)\cdot(a-в)\cdot(a-в)}{ав(a-в)(a-в)\left(a^2+ав+в^2\right)}=\frac{1}{ав}.$$

Якщо а=1,8; в=0,5, то $\frac{1}{ав}=\frac{1}{1{,}8\cdot 0{,}5}=\frac{1}{0{,}9}=\frac{10}{9}=1\frac{1}{9}$. Відповідь: $1\frac{1}{9}$.

Завдання для самостійної роботи:

3.3 Обчислити: $\left(\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{0}\right)^{-0,5} - 7,5\cdot\left(\sqrt[4]{4^{3}}\right)^{-2-} - 1 + 81^{0,25} - (-2)^{-4}\right.$. Відповідь: 3.

Спростити вираз: **3.4** $\left(\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{x^{2}}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}\right) : \left((1-x)^{\frac{1}{3}}\cdot(1-x)^{-2}\right)$. Відповідь: x.

3.5 $\left(\left(a^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}\cdot(a-x) - \frac{a+x}{a^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}}\right)\cdot 2(ax)^{-\frac{1}{3}}$. Відповідь: 4.

3.6 $\frac{a^{3}-a}{5a-5}\cdot\frac{a-в}{a^{2}+a}$. Відповідь: $\frac{a-1}{5}$ при $a\neq в, a\neq 0, a\neq 1$.

3.7 $\frac{a^{2}+6a+9}{2a-4} : \frac{3a+9}{a^{2}-4}$. Відповідь: $\frac{a^{2}+5a+6}{2}$ при $a\neq -3, a\neq \pm 2$.

3.8 $\frac{x^{2}-y^{2}}{x^{2}+y^{2}}\cdot\frac{x^{4}-y^{4}}{x^{2}-2xy+y^{2}}$. Відповідь: $(x+y)^{2}$ при $x\neq y$.

3.9 $\frac{x^{2}+2xy+y^{2}}{x^{2}-y^{2}}\cdot\frac{x^{3}-y^{3}}{x^{2}+xy+y^{2}}$. Відповідь: $x+y$ при $x\neq \pm y$.

3.10 $\frac{\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}}{\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}}\cdot\frac{x}{y}$. Відповідь: -1 при $x\neq \pm y; x\neq 0; y\neq 0$.

3.11 Дано: $m\rangle 0,\ n\rangle 0,\ x = a\cdot\frac{m^{3}+n^{3}}{m^{3}-n^{3}}$.

Визначити $y = \left((x+a)^{\frac{1}{3}}\cdot(x-a)^{-\frac{1}{3}} + (x+a)^{-\frac{1}{3}}\cdot(x-a)^{\frac{1}{3}} - 2\right)^{-\frac{1}{2}}$. Відповідь: $\frac{\sqrt{mn}}{m-n}$.

3.12 Дано: $k\rangle 0,\ x = 2k^{\frac{1}{2}}\cdot(1+k)^{-1}$.

Визначити $y = \left(\frac{(1-x^{2})^{-\frac{1}{2}}+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{(1-x^{2})^{-\frac{1}{2}}-1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Відповідь: $\sqrt{k-1}\cdot\left(1+\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\right)$.

3.13 Дано: $n\rangle 1,\ x = (1-n^{-1})^{\frac{1}{2}}\cdot(1+n^{-1})^{-\frac{1}{2}}$.

Визначити $y = (1+x^{-1})^{-2} + (1-x^{-1})^{-2}$. Відповідь: $n(n-1)$.

3.14 $\left(\frac{1}{a-1} + \frac{2(a-1)}{a^{2}-4} - \frac{4(a+1)}{a^{2}+a-2} + \frac{a}{a^{2}-3a+2}\right)\cdot\frac{a^{3}-a^{2}-4a+4}{a^{3}+27} : \frac{a}{a^{2}-3a+9}$.

Відповідь: $\frac{2}{a}$ при $a\neq -3,\ a\neq \pm 2;\ a\neq 1,\ a\neq 0$.

3.15 $\frac{x^{2}}{x^{2}+x+1} + \frac{x}{x^{2}+x-2} + \frac{x}{x^{3}+3x^{2}+3x+2} - \frac{1}{x^{3}-1}$. Відповідь: 1 при $x\neq -2,\ x\neq 1$.

3.16 $\dfrac{(a-в)^2+aв}{(a+в)^2-aв}:\dfrac{a^5+в^5+a^2в^3+a^3в^2}{(a^3+в^3+a^2в+aв^2)\cdot(a^3-в^3)}.$ Відповідь: $a-в$ при $a\neq\pm в.$

3.17 $\dfrac{x^3+y^3}{x+y}\cdot\left(x^2-y^2\right)^{-1}+\dfrac{2y}{x+y}-\dfrac{xy}{x^2-y^2}.$ Відповідь: 1 при $x\neq\pm y.$

Означення і властивості кореня з числа

Коренем *n*-го степеня $(n\in N,\ n\geq 2)$ з числа *a* називається число *в* , *n*-ий степінь якого дорівнює *a* . $\sqrt[n]{a}.$ Наприклад, $\sqrt{25}=\pm 5.$ $\sqrt[3]{8}=2,$ $3-$показник кореня, 8 – підкореневий вираз, 2 – значення кореня. З означення кореня випливає тотожність $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a,$ або $\sqrt[n]{a^n}=a,$ $\sqrt[n]{0}.$

Якщо *n –парне число,* то існує два значення кореня з будь-якого додатного числа. Наприклад: $\sqrt{16}=\pm 2.$ Якщо *n –непарне число*, то існує тільки одне значення кореня з будь – якого дійсного числа. Наприклад: $\sqrt[3]{-8}=-2;$ $\sqrt[3]{125}=5.$
Арифметичним коренем *n* – степеня $(n\in N,\ n\geq 2)$ з невід'ємного числа *a* називається невід'ємне число *в*, *n* – ий степінь якого дорівнює *a*.
Наприклад: $\sqrt[4]{81}=3.$
Знаходження кореня *n* – степеня називається добуванням кореня.

Властивості арифметичного кореня:

$\sqrt[n]{a\cdot в}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{в}-$корінь з добутку;

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{в}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{в}},\ (в\neq 0)-$корінь з дробу;

$\sqrt[n]{\sqrt[к]{a}}=\sqrt[n\cdot к]{a}$ – корінь з кореня.

$\sqrt[n]{a}=\sqrt[nк]{a^к}.$

Якщо $0\leq a\langle в,$ то $\sqrt[n]{a}\langle\sqrt[n]{в}.$

Якщо $a\rangle 0$ і $m\in N,$ т $\sqrt[2m]{a^{2m}}=|a|=\begin{cases}a, \text{ якщо } a\geq 0,\\ -a, \text{ якщо } a\langle 0.\end{cases}$

$\sqrt[2m+1]{a^{2m+1}}=a,$ $\sqrt[2m+1]{-a}=-\sqrt[2m+1]{a}.$ Тут 2*m* – парне число, *2m+1* – непарне число.
Покажемо застосування означення кореня з числа та його властивостей до розв'язування вправ.
Знайти значення виразу $\sqrt{75\cdot 48}.$ Розв'язання:
Розкладемо число 75 на два множники так, щоб хоча б з одного з них добувався корінь 75=25$\cdot 3.$ Число 48 розкладемо на два множники так ,щоб один з них дорівнював 3: 48=3 $\cdot 16$ Використаємо властивість кореня з добутку: $\sqrt{75\cdot 48}=\sqrt{25\cdot 3\cdot 3\cdot 16}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{3\cdot 3}\cdot\sqrt{16}=5\cdot 3\cdot 4=60.$ Відповідь:60.

$\sqrt{2\dfrac{3}{4}\cdot 1\dfrac{5}{11}}.$ Розв'язання: перетворимо кожне з «мішаних» чисел у неправильний дріб, а потім спростимо підкореневий вираз:

$\sqrt{2\dfrac{3}{4}\cdot 1\dfrac{5}{11}}==\sqrt{\dfrac{11}{4}\cdot\dfrac{16}{11}}=\sqrt{4}=2.$ Відповідь: 2.

$\sqrt[3]{0{,}27\cdot(-100)}$. Розв'язання: ні з числа 0,27, ні з числа (–100) кубічний корінь не добувається, а тому підкореневий вираз перетворимо таким чином:
$0{,}27\cdot(-100)=(-1)\cdot(0{,}27\cdot 100)=(-1)\cdot 27.$
$\sqrt[3]{0{,}27\cdot(-100)}=\sqrt[3]{(-1)\cdot 27}=\sqrt[3]{(-1)}\cdot\sqrt[3]{27}=(-1)\cdot 3=-3.$ Відповідь: –3.

$\sqrt[6]{17^2-15^2}$. Розв'язання: перетворимо підкореневий вираз, використавши формулу різниці квадратів двох чисел:
$17^2-15^2=(17-15)\cdot(17+15)=2\cdot 32=2\cdot 2^5=2^6.$
$\sqrt[6]{17^2-15^2}=\sqrt[6]{2^6}=|2|=2.$ Відповідь: 2.

$\left(\dfrac{12}{\sqrt{15}-3}-\dfrac{28}{\sqrt{15}-1}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(6-\sqrt{3}\right)$. Розв'язання:
Доцільно спочатку позбавитись від ірраціональності в знаменниках кожного з трьох дробів: $\dfrac{12}{\sqrt{15}-3}=\dfrac{12\cdot\left(\sqrt{15}+3\right)}{\left(\sqrt{15}-3\right)\cdot\left(\sqrt{15}+3\right)}=\dfrac{12\left(\sqrt{15}+3\right)}{15-9}=\dfrac{12\left(\sqrt{15}+3\right)}{6}=2\sqrt{15}+6;$
$\dfrac{28}{\sqrt{15}-1}=\dfrac{28\cdot\left(\sqrt{15}+1\right)}{\left(\sqrt{15}-1\right)\cdot\left(\sqrt{15}+1\right)}=\dfrac{28\cdot\left(\sqrt{15}+1\right)}{15-1}=\dfrac{28\cdot\left(\sqrt{15}+1\right)}{14}=2\sqrt{15}+2;$
$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{1\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}.$
$\left(2\cdot\sqrt{15}+6-2\cdot\sqrt{15}-2+2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(6-\sqrt{3}\right)=\left(6-\sqrt{3}\right)\cdot\left(6+\sqrt{3}\right)=36-3=33$. Відповідь: 33.
Заслуговує уваги такий спосіб спрощення виразів типу:
$\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$. Розв'язання: позначимо $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}=A.$
Піднесемо обидві частини цієї рівності до квадрату: 6+2

$\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{6+2\cdot\sqrt{5}}\cdot\sqrt{6-2\cdot\sqrt{5}}+6-2\cdot\sqrt{5}=A^2;$

12-2$\sqrt{\left(6+2\cdot\sqrt{5}\right)\cdot\left(6-2\cdot\sqrt{5}\right)}=A^2;$

12-2 $\sqrt{36-20}=A^2$;
12-2$\cdot 4=A^2;\ \sqrt{\sqrt{\ }}$
A$^2=4$;
A=± 2; Оскільки $\sqrt{6+2\cdot\sqrt{5}}\geq\sqrt{6-2\cdot\sqrt{5}}$, то різниця $\sqrt{6+2\cdot\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\cdot\sqrt{5}}\rangle 0.$
Отже, А=2. Відповідь: 2.

Обчислити значення виразу: **3.18** $\sqrt{\dfrac{a\cdot\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1}+\sqrt{a}}-\sqrt{\dfrac{a\cdot\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1}-\sqrt{a}}$ при *a =2,5.*

Розв'язання:

Спростимо цей вираз, звівши підкореневі вирази до спільних знаменників. Потім використаємо формулу різниці квадратів і після скорочення застосуємо поняття модуля числа.

$$\sqrt{\frac{a\cdot\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1}+\sqrt{a}}-\sqrt{\frac{a\cdot\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1}-\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{a\cdot\sqrt{a}-1+a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}}-\sqrt{\frac{a\cdot\sqrt{a}+1-a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{a}(a-1)+(a-1)}{\sqrt{a}-1}}-\sqrt{\frac{\sqrt{a}(a+1)-(a-1)}{\sqrt{a}+1}}=\sqrt{\frac{(a-1)(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}-1}}-\sqrt{\frac{(a+1)(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}+1}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}-1}}-\sqrt{\frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}+1}}=\sqrt{(\sqrt{a}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{a}-1)^2}=$$

$$=|\sqrt{a}+1|-|\sqrt{a}-1|.$$

Якщо $a=2{,}5$, то $|\sqrt{a}+1|-|\sqrt{a}-1|=\left|\underbrace{\sqrt{2{,}5}+1}_{>0}\right|-\left|\underbrace{\sqrt{2{,}5}-1}_{>0}\right|=\sqrt{2{,}5}+1-\sqrt{2{,}5}+1=2.$

Відповідь: 2.

3.19 Довести, що $\left(\frac{11}{5-\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}\right)^2=\sqrt{\frac{91}{4}+10\sqrt{3}}.$

Доведення.

$$\left(\frac{11}{5-\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}\right)^2=\left(\frac{11\cdot(5+\sqrt{3})}{(5-\sqrt{3})\cdot(5+\sqrt{3})}\right)^2-\left(\frac{(5-2\sqrt{5})\cdot(2+\sqrt{5})}{(2-\sqrt{5})\cdot(2+\sqrt{5})}\right)^2=$$

л.ч. $=\left(\frac{11\cdot(5+\sqrt{3})}{25-3}\right)^2-\left(\frac{10+5\sqrt{5}-4\sqrt{5}-10}{4-5}\right)^2=\left(\frac{11\cdot(5+\sqrt{3})}{22}\right)^2-(\sqrt{5})^2=\frac{25+10\sqrt{3}+3}{4}-5=$

$$=\frac{28+10\sqrt{3}-20}{4}=\frac{8+10\sqrt{3}}{4}=\frac{4+5\sqrt{3}}{2}.$$

п.ч. $=\sqrt{\frac{91}{4}+10\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{91+40\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{91+40\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{16+40\sqrt{3}+75}}{2}=$

$$=\frac{\sqrt{4^2+2\cdot4\cdot5\sqrt{3}+(5\sqrt{3})^2}}{2}=\frac{\sqrt{(4+5\sqrt{3})^2}}{2}=\frac{|4+5\sqrt{3}|}{2}=\frac{4+5\sqrt{3}}{2}.$$

Оскільки ліва і права частини дорівнюють одному й тому ж числові $\frac{4+5\sqrt{3}}{2}$, то рівність доведена.

В наступних двох вправах використаємо ідею піднесення до деякого степеня вибраної частини рівності і водночасі добування кореня з неї такого самого степеня .

3.20 Довести рівність $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\sqrt[3]{\frac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}}$. Доведення.

Оскільки традиційне позбавлення від ірраціональності в знаменнику дробу в цій вправі не приводить до мети, то над лівою частиною рівності виконаємо такі перетворення:

1. піднесемо її до кубу; 2. водночас і добудемо з неї корінь кубічний.

л.ч.

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)^3}=\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}-3\cdot3\cdot1+3\cdot\sqrt{3}\cdot1-1}{3\sqrt{3}+3\cdot3\cdot1+3\cdot\sqrt{3}\cdot1+1}}=\sqrt[3]{\frac{6\sqrt{3}-10}{6\sqrt{3}+10}}=\sqrt[3]{\frac{2\left(3\sqrt{3}-5\right)}{2\left(3\sqrt{3}+5\right)}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}-5}{3\sqrt{3}+5}}=\sqrt[3]{\frac{\left(3\sqrt{3}-5\right)\cdot\sqrt{3}}{\left(3\sqrt{3}+5\right)\cdot\sqrt{3}}}=\sqrt[3]{\frac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}}=\text{п.ч.}\ \textit{Рівність доведена.}$$

3.21 Довести рівність $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{5}+1\right).$

Доведення

Оскільки ліва частина виразу додатна, то для її перетворення використаємо ідею розв'язування попередньої вправи:

$$\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{\left(\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2+2\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\left(\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+2\sqrt{\left(8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\cdot\left(8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}+8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=$$

$$\text{л.ч.}=\sqrt{16+2\sqrt{8^2-\left(2\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^2}}=\sqrt{16+2\sqrt{64-4\left(10+2\sqrt{5}\right)}}=\sqrt{16+2\sqrt{64-40-8\sqrt{5}}}=$$

$$=\sqrt{16+2\cdot\sqrt{24-8\sqrt{5}}}=\sqrt{16+2\sqrt{4\cdot6-4\cdot2\sqrt{5}}}=\sqrt{16+4\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\sqrt{16+4\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}=$$

$$=\sqrt{16+4\left|\sqrt{5}-1\right|}=\sqrt{16+4\sqrt{5}-4}=\sqrt{12+4\sqrt{5}}=\sqrt{2\left(6+2\sqrt{5}\right)}=\sqrt{2\left(\sqrt{5}+1\right)^2}=\sqrt{2}\cdot\left|\underbrace{\sqrt{5}+1}_{>0}\right|=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)=\textit{п.ч.}$$

Завдання для самостійної роботи:

Знайти значення виразу: **3.22** $\sqrt[3]{64\cdot125}$. Відповідь: 20.

3.23 $\sqrt[4]{16\cdot81\cdot625}$. Відповідь: 30.

3.24 $\sqrt[6]{4\cdot16}$. Відповідь: 2.

3.25 $\sqrt[4]{313^2-312^2}$. Відповідь: 5.

3.26 $2\cdot\sqrt{40\cdot\sqrt{12}}+3\sqrt{5\cdot\sqrt{48}}-2\sqrt[4]{75}-4\sqrt{15\cdot\sqrt{27}}$. Відповідь: 0.

3.27 $\left(\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2$. Відповідь: 8.

3.28 $\frac{1}{4+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4-2\sqrt{3}}$. Відповідь: 2.

3.29 $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$. Відповідь: 0.

3.30 Спростити вираз: $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$. Відповідь: 2.

3.31 Знайти значення виразу: $\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}+\frac{25-15\sqrt{x}}{x+10\sqrt{x}+25}+\frac{10}{\sqrt{x}+5}}$ при x=26.

Відповідь: 1.

3.32 Спростити вираз: $\sqrt{9+\sqrt{32}}$; $\sqrt{6-\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$;

Довести рівності: **3.33** $\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}=2;$

3.34 $\frac{\sqrt{19}+\sqrt{3}}{2\sqrt{9-\sqrt{65}}}=\frac{2\sqrt{9-\sqrt{65}}}{\sqrt{19}-\sqrt{3}}.$

3.35 $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}.$

Визначити: **3.36** $y=\frac{2в\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$, якщо $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{в}}-\sqrt{\frac{в}{a}}\right)$, *де* $a\rangle 0,\ в\rangle 0$. Відповідь: *а*+*в*.

3.37 $y=\frac{\sqrt{(a+x)\cdot(x+в)}+\sqrt{(a-x)\cdot(x-в)}}{\sqrt{(a+x)\cdot(x+в)}-\sqrt{(a-x)\cdot(x-в)}}$, якщо $x=a\cdot в$, де $a\rangle 0,\ в\rangle 0$, $a\rangle в$.

Відповідь: $\sqrt{\frac{a}{в}}$.

3.38 $y=\frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{x}}}+\frac{1}{\sqrt{a-\sqrt{x}}}$, якщо $4\cdot(a-1)$, де $a\geq 1$.

Відповідь: $\frac{2}{2-a}$, якщо $1\leq a\langle 2$; $\frac{2\sqrt{a-1}}{a-2}$, якщо $a\rangle 2$.

3.39 $y=\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{x+в}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x-в}}$, якщо $x=\frac{1}{4}z^2+\frac{(a-в)^2}{4z^2}-\frac{a+в}{2}$, де $z\geq\sqrt{|a-в|}$.

Відповідь: $\frac{|a-в|}{a-в}$.

Означення і властивості логарифма числа

Логарифмом числа N при основі a $(a\rangle 0, a\neq 1)$ називається показник степеня , до якого треба піднести число а ,щоб одержати число N.

Залежно від їх основи логарифми можна класифікувати на три великі групи:

$$\log_a N=\begin{cases}\lg N,\ якщо\ a=10,\ -десяткові\ логарифми,\\ \ln N,\ якщо\ a=e,\ -натуральні\ логарифми,\\ \log_a N,\ якщо\ a\neq 10\ \text{ і }\ a\neq e,\ e\approx 2{,}7.\end{cases}$$

Корисні співвідношення: $log_a a=1;\quad log_a 1=0.$

Основна логарифмічна тотожність: $a^{log_a B}=B.$

Логарифми існують тільки додатних чисел і мають такі властивості:

1). $log_a(x_1\cdot x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2\ (x_1\rangle 0,\ x_2\rangle 0)-$ *логарифм добутку*;

2). $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2 (x_1 \rangle 0,\ x_2 \rangle 0)$ – *логарифм частки*;

3). $\log_a x^k = k \cdot \log_a x (x \rangle 0)$ – *логарифм степеня*;

4). $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x (x \rangle 0)$ – *логарифм кореня*;

5). $\log_a B = \frac{\log_c B}{\log_c a}$ $(c \rangle 0,\ c \neq 1)$ – *формула переходу від однієї основи логарифмів до іншої*;

6). $\log_{a^m} \left(B^p\right) = \frac{p}{m} \log_a B.$

Вираження логарифма виразу через логарифми його компонентів називається логарифмуванням. Дія, обернена до логарифмування, називається потенціюванням.

Спочатку доцільно розв’язувати вправи на застосування основної логарифмічної тотожності ,які є доброю пропедевтикою для розв’язування логарифмічних рівнянь та нерівностей.

Наприклад: $3^{\log_3 4} = 4;$

$$16^{\log_2 7} = \left(2^4\right)^{\log_2 7} = \left(2^{\log_2 7}\right)^4 = 7^4 = 2401;$$

$$2^{\log_8 125} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{\log_8 125} = \left(8^{\log_8 125}\right)^{\frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{3}} = \left(5^3\right)^{\frac{1}{3}} = 5;$$

$$4^{\log_8 27} = \left(8^{\frac{2}{3}}\right)^{\log_8 27} = \left(8^{\log_8 27}\right)^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}} = \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9.$$

Розв’язування дещо складніших вправ цього типу, наприклад, обчислити значення виразу: $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}.$

Розв’язання:

Обчислимо значення кожного з трьох членів цього виразу окремо:

$$36^{\log_6 5} = \left(6^2\right)^{\log_6 5} = \left(6^{\log_6 5}\right)^2 = 5^2 = 25;$$

$$10^{1-\lg 2} = 10 \cdot 10^{-\lg 2} = \frac{10}{10^{\lg 2}} = \frac{10}{2} = 5;$$

$$3^{\log_9 36} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_9 36} = \left(9^{\log_9 36}\right)^{\frac{1}{2}} = 36^{\frac{1}{2}} = \left(6^2\right)^{\frac{1}{2}} = 6.$$

Отже, 25+5 – 6=24. Відповідь: 24.

3.40 Обчислити: $10^{\frac{2}{\log_3 10}} + 3^{\frac{1}{\log_6 3}}.$

Розв’язання:

Використаємо формулу переходу від однієї основи логарифмів до іншої:

$\log_3 10 = \frac{\lg 10}{\lg 3} = \frac{1}{\lg 3};$ $\log_6 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 6} = \frac{1}{\log_3 6};$ Таким чином,

$10^{\frac{2}{\frac{1}{\lg 3}}} + 3^{\frac{1}{\frac{1}{\log_3 6}}} = 10^{2\lg 3} + 3^{\frac{1}{\frac{1}{\log_3 6}}} = \left(10^{\lg 3}\right)^2 + 3^{\log_3 6} = 3^2 + 6 = 9 + 6 = 15.$ Відповідь: 15.

3.41 Обчислити: $\log_2\left(2 \cdot tg1^{\circ}\right) + \log_2\left(2^3 \cdot tg3^{\circ}\right) + \log_2\left(2^5 \cdot tg5^{\circ}\right) + \ldots + \log_2\left(2^{89} \cdot tg89^{\circ}\right).$

Розв'язання

Замінимо суму логарифмів логарифмом добутку згідно властивостей логарифмів :

$$\log_2\left(2\cdot tg1^\circ\right)+\log_2\left(2^3\cdot tg3^\circ\right)+\log_2\left(2^5\cdot tg5^\circ\right)+\ldots+\log_2\left(2^{89}\cdot tg89^\circ\right)=$$

$$=\log_2\left(2\cdot tg1^\circ\cdot 2^3\cdot tg3^\circ\cdot 2^5\cdot tg5^\circ\ldots\cdot 2^{89}\cdot tg89^\circ\right)=\log_2\left(2\cdot 2^3\cdot 2^5\cdot\ldots\cdot 2^{89}\cdot tg1^\circ\cdot tg3^\circ\cdot tg5^\circ\cdot\ldots\cdot tg89^\circ\right)=$$

$$=\log_2\left(2^{1+3+5+\ldots+89}\cdot\left(tg1^\circ\cdot tg89^\circ\right)\cdot\left(tg3^\circ\cdot tg87^\circ\right)\cdot\ldots\cdot tg45^\circ\right)=$$

$$=\log_2\left(2^{1+3+5+\ldots+89}\cdot\left(\underbrace{tg1^\circ\cdot ctg1^\circ}_{1}\right)\cdot\left(\underbrace{tg3^\circ\cdot ctg3^\circ}_{1}\right)\cdot\ldots\cdot\underbrace{tg45^\circ}_{1}\right)=$$

$$=\left(1+3+5+\ldots+89\right)\underbrace{\log_2 2}_{1}+\underbrace{\log_2 1}_{0}=\frac{2\cdot 1+2\cdot(45-1)}{2}\cdot 45=$$

$$=\frac{2+2\cdot 44}{2}\cdot 45=$$

$$=\frac{2(1+44)}{2}\cdot 45=$$

$$=45\cdot 45=2025.$$

З формули *n-го* члена арифметичної прогресії

знаходимо кількість її членів:

$a_n=a_1+d(n-1);\quad a_1=1;\quad a_2=3;\quad a_n=89.$

$d=3-1=2.$

$89=1+2(n-1);\quad 2(n-1)=89-1;\quad 2(n-1)=88;$

$n-1=\frac{88}{2}=44;\quad n=44+1=45.$

Для обчислення суми n перших членів арифметичної прогресії використаємо формулу

$$Sn=\frac{2a_1+d(n-1)}{n}\cdot n.$$

Відповідь: 2025.

3.42 Дано: $\log_{70}5=a,\ \log_{70}7=b.$ Знайти $\log_{70}16.$

Розв'язання:

Перетворимо шуканий логарифм:

$$\log_{70}16=\log_{70}2^4=4\cdot\log_{70}2=4\log_{70}\frac{70}{35}=4\log_{70}\frac{70}{5\cdot 7}=4\cdot\left(\log_{70}70-\log_{70}5-\log_{70}7\right)=4\cdot(1-a-b).$$

Відповідь: $4\cdot(1-a-b).$

3.43 Дано : $\log_6 3=a,\quad \log_6 5=b.$ Знайти $\log_{15}12.$

Розв'язання:

Вираз $\log_{15}12$ замінимо логарифмом з основою 6:

$$\log_{15}12=\frac{\log_6 12}{\log_6 15}=\frac{\log_6\frac{36}{3}}{\log_6(3\cdot 5)}=\frac{\log_6\frac{6^2}{3}}{\log_6(3\cdot 5)}=\frac{\log_6 6^2-\log_6 3}{\log_6 3+\log_6 5}=\frac{2\cdot 1-\log_6 3}{\log_6 3+\log_6 5}=\frac{2-a}{a+b}.$$

Відповідь: 2.

3.44 Дано: $\log_{12}5=a,\ \log_{12}18=b.$ Знайти $\log_{40}54.$

Розв'язання:

Перейдемо до логарифмів з основою 12:

$$\log_{40} 54 = \frac{\log_{12} 54}{\log_{12} 40} = \frac{\log_{12}(18\cdot 3)}{\log_{12}(5\cdot 8)} = \frac{\log_{12} 18 + \log_{12} 3}{\log_{12} 5 + \log_{12} 8} = \frac{b + \log_{12} 3}{a + \log_{12} 2^3} =$$

$$= \frac{b + \log_{12} 3}{a + 3\log_{12} 2} = \frac{b + \log_{12} \sqrt[3]{\frac{18^2}{12}}}{a + 3\log_{12} \sqrt[3]{\frac{12^2}{18}}} = \frac{b + \frac{1}{3}\left(\log_{12} 18^2 - \log_{12} 12\right)}{a + 3\cdot\frac{1}{3}\left(\log_{12} 12^2 - \log_{12} 18\right)} =$$

$18 = 2\cdot 9 = 2\cdot 3^2;\quad 18^2 = \left(2\cdot 3^2\right)^2;$

$12 = 4\cdot 3 = 2^2\cdot 3;\quad 12^2 = \left(2^2\cdot 3\right)^2;$

$\frac{18^2}{12} = \frac{2^2\cdot 3^4}{2^2\cdot 3} = 3^3;\quad \frac{12^2}{18} = \frac{2^4\cdot 3^2}{2\cdot 3^2} = 2^3;$

$3 = \sqrt[3]{\frac{18^2}{12}};\quad 2 = \sqrt[3]{\frac{12^2}{18}}.$

$$= \frac{b + \frac{1}{3}\left(2\log_{12} 18 - \log_{12} 12\right)}{a + \left(2\log_{12} 12 - \log_{12} 18\right)} =$$

$$= \frac{b + \frac{1}{3}\cdot(2\cdot b - 1)}{a + (2\cdot 1) - b} =$$

$$= \frac{b + \frac{2b-1}{3}}{a + 2 - b} =$$

$$= \frac{5b-1}{3a-3b+6}.$$

Відповідь: $\frac{5b-1}{3a-3b+6}$.

3.45 Дано: $\log_{20} 50 = a,\quad \log_3 20 = b.$ Знайти $\log_{150} 200.$

Розв’язання:

Перейдемо до логарифмів з основою 20:

$\log_3 20 = \frac{\log_{20} 20}{\log_{20} 3} = \frac{1}{\log_{20} 3};\quad \frac{1}{\log_{20} 3} = b;\quad \log_{20} 3 = \frac{1}{b}.$

$$\log_{150} 200 = \frac{\log_{20} 200}{\log_{20} 150} = \frac{\log_{20}\left(50\cdot 2^2\right)}{\log_{20}(50\cdot 3)} = \frac{\log_{20} 50 + 2\log_{20} 20}{\log_{20} 50 + \log_{20} 3} =$$

$20 = 2^2\cdot 5;\ 50 = 5^2\cdot 2;\ 20^2 = 2^4\cdot 5^2;$

$\frac{20^2}{50} = \frac{2^4\cdot 5^2}{5^2\cdot 2} = 2^3;\ 2 = \sqrt[3]{\frac{20^2}{50}}.$

$$= \frac{a + 2\log_{20} \sqrt[3]{\frac{20^2}{50}}}{a + \frac{1}{b}} =$$

$$= \frac{a + \frac{2}{3}\cdot\left(2\log_{20} 20 - \log_{20} 50\right)}{a + \frac{1}{b}} =$$

$$= \frac{a + \frac{2}{3}\cdot\left(2\cdot 1 - \log_{20} 50\right)}{a + \frac{1}{b}} =$$

$$= \frac{a + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}a}{\frac{ab+1}{b}} = \frac{\frac{1}{3}a + \frac{4}{3}}{\frac{ab+1}{b}} = \frac{(a+4)\cdot b}{3ab+3} = \frac{ba+4b}{3ab+3}.$$ Відповідь: $\frac{ab+4b}{3ab+3}$.

Завдання для самостійної роботи:

3.46 Відомо, що *lg2* = 0,301. Обчислити $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\ldots\cdot\log_9 8\cdot\lg 9$.

Відповідь: 0,301.

Обчислити:

3.47 $20\log_4 3\cdot\log_{81}64$. Відповідь:15.

3.48 $18\cdot\dfrac{\log_4 12}{3+\log_4 27}$. Відповідь: 6

3.49 $(14\cdot\log_8 7)^4\cdot\log_{49}512$. Відповідь: 11.

3.50 $57\cdot\dfrac{\log_5 200}{6+\log_5 512}$. Відповідь: 19.

3.51 $-\log_2\left(\log_2\sqrt{\sqrt{2}}\right)$. Відповідь: 2.

3.52 $25^{\log_5 3}$. Відповідь: 9.

3.53 $3\cdot\log_{\sqrt{8}}2+2^{-2\cdot\log_{\frac{1}{2}}2}$. Відповідь: 6.

3.54 $3\cdot\log_{\sqrt{64}}8+4^{-2\cdot\log_{\frac{1}{4}}3}$. Відповідь: 11.

3.55 $(\log_4 11+\log_4 23):\log_8 253$. Відповідь: 1,5.

3.56 $\log_4 128$. Відповідь: 3,5.

3.57 $\log_4 в$, якщо $в=\sin\dfrac{\pi}{6}$. Відповідь: $-\dfrac{1}{2}$.

3.58 $3^{\log_3 8}-2\log_3 2+\log_3\left(\dfrac{9}{2}\right)$. Відповідь:9.

3.59 $\log_3\log_2\left(\sqrt[3]{2^k}\right)^{\frac{1}{2}}$, якщо $\log_3 K=10$. Відповідь: 8.

3.60 $(\log_3 8)\cdot(\log_{17}3)\cdot(\log_4 17)$. Відповідь: 1,5

3.61 $8+\dfrac{1}{2}\log_{\frac{2}{3}}\left(6-\sqrt{20}\right)+\dfrac{1}{2}\log_{\frac{2}{3}}\left(6+\sqrt{20}\right)-\log_{\frac{2}{3}}9$. Відповідь: 10.

3.62 $\log_{a\cdot b}x$, якщо $\log_a x=2,\ \log_b x=3$. Відповідь: 1,2.

3.63 $\log_{\frac{5}{a}}25$, якщо $\log_a 5=2$. Відповідь: 4.

3.64 $(\log_3 2+\log_2 81+4)\cdot(\log_3 2-2\log_{18}2)\cdot\log_2 3-\log_3 2$. Відповідь: 2.

Знайти *x*, якщо:

3.65 $\log_{\sqrt[3]{32}}x=-1{,}5$. Відповідь: $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$.

3.66 $\log_x\sqrt[4]{\dfrac{27}{6561}}=-0{,}75$. Відповідь: $3\cdot\sqrt[3]{9}$.

3.67 $x=\log_{\sqrt[3]{2}}8\cdot\sqrt[4]{8}$. Відповідь: 11,25.

3.68 Дано: $\log_{14}7=a,\ \log_{14}5=b$. Знайти $\log_{35}28$. Відповідь: $\dfrac{2-a}{a+b}$.

3.69 Дано: $\log_{10}16=a$. Знайти $\log_{50}25$. Відповідь: $\dfrac{8-2a}{8-a}$.

3.70 Дано: $\log_7 12 = a$, $\log_{12} 24 = b$. Знайти $\log_{168} 54$. Відповідь: $\frac{8a - 5ab}{ab + 1}$.

3.71 Дано: $\lg 225 = a$, $\lg 60 = b$. Знайти $\lg 5$. Відповідь: $\frac{a - 2b + 4}{4}$.

3.72 Дано: $\lg 225 = a$, $\lg 60 = b$. Знайти $\lg 2$. Відповідь: $\frac{2b - a}{4}$.

3.73 Знайти $\log_{54} 168$, якщо $\log_7 12 = a$, $\log_{12} 24 = b$. Відповідь: $-\frac{1}{ab}$.

3.74 Знайти $\log_5 6{,}125$, якщо $\log_{25} 7 = a$, $\log_2 5 = b$. Відповідь: $\frac{4ab - 3}{b}$.

3.75 Знайти $\log_{30} 18$, якщо $\log_3 2 = a$, $\log_5 3 = b$. Відповідь: $\frac{ab + 2b}{1 + b + ab}$.

3.76 Знайти $\lg 45$, якщо $\log_2 3 = a$, $\log_5 2 = b$. Відповідь: $\frac{1 + 2ab}{b + 1}$.

3.77 Знайти $\log_8 9{,}8$, якщо $\lg 2 = a$, $\lg 7 = b$. Відповідь: $\frac{a + 2b - 1}{3a}$.