Розділ 19
Знаходження найбільшого або найменшого значення квадратного тричлена

Щоб знайти найбільше або найменше значення квадратного тричлена потрібно:

1) по знакові старшого коефіцієнта a квадратного тричлена визначити напрям віток параболи (при $a > 0$ вітки напрямлені вгору, при $a < 0$ – вітки вниз);
2) при $a > 0$ функція має найменше значення, при $a < 0$ – найбільше значення;
3) за формулою $m = -\frac{b}{2a}$ знайти абсцису вершини параболи;
4) за формулою $n = y(m)$ знайти ординату вершини параболи;
5) значення ординати вершини параболи і буде найбільшим або найменшим значенням квадратного тричлена.

Знайти найменше або найбільше значення функції $y = x^2 - 6x + 5.$

Розв'язання:

$a = 1,\ 1 > 0,$ а тому вітки параболи напрямлені вгору - функція має найменше значення.

$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3;$ – абсциса вершини параболи.

$n = y(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$ – ордината параболи.

Найменше значення функції $y_{найм} = -4.$

Відповідь: $-4.$

$y = -x^2 - 6x + 1.$

Розв'язання:

$a = -1,\ -1 < 0,$ вітки параболи напрямлені донизу - функція має найбільше значення.

$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot (-1)} = -3;\ n = y(-3) = -(-3)^2 - 6 \cdot (-3) + 1 = -9 + 18 + 1 = 10.$

$(-3; 10)$ – вершина параболи.

Найбільше значення функції $y_{найб} = 10.$

На наш погляд, цей спосіб дещо раціональніший, ніж спосіб виділення квадрата двочлена.

Заслуговує уваги і такий спосіб розв'язування вправ на знаходження найбільшого або найменшого значення функції.

$y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$.

Розв'язання:

Використовуючи основну властивість пропорції, дістанемо:

$y\cdot\left(x^2+2x+1\right)=x^2+x+1,$

$yx^2+2xy+y-x^2-x-1=0,$

$\left(yx^2-x^2\right)+\left(2xy-x\right)+\left(y-1\right)=0,$

$\left(y-1\right)\cdot x^2+\left(2y-1\right)\cdot x+y-1=0.$

Це рівняння має корені тоді, коли $D\geq 0,\ D=b^2-4ac,$

$D=\left(2y-1\right)^2-4\cdot\left(y-1\right)\cdot\left(y-1\right)=4y^2-4y+1-y^2\cdot 4+4y+4y-4=4y-3;\ \ 4y-3\geq 0,$

$4y\geq 3,\ \ y\geq\dfrac{3}{4}.$

Функція має найменше значення, рівне $\dfrac{3}{4}$.

Відповідь: $\dfrac{3}{4}$.

$f\left(x\right)=\dfrac{8}{x^2+4\pi x+41}+\cos x.$

Розв'язання:

Розглянемо знаменник дробу $x^2+4\pi x+41,\ a=1,\ 1>0,$ вітки вгору, цей тричлен має найменше значення, а дріб $\dfrac{8}{x^2+4\pi x+41}$ має найбільше значення.

Функція $f\left(x\right)=\dfrac{8}{x^2+4\pi x+41}+\cos x$ має найбільше значення, яке підсилюється тоді, коли $\cos x$ приймає найбільше значення.

$m=-\dfrac{b}{2a};\ m=-\dfrac{4\pi}{2\cdot 1}=-2\pi-$ абсциса вершини параболи.

$y\left(m\right)=y\left(-2\pi\right)=\left(-2\pi\right)^2+4\pi\cdot\left(-2\pi\right)+41=4\pi^2-8\pi^2+41=41-4\pi^2.$

Найменше значення функції $\varphi\left(x\right)=x^2-4\pi x+41$ дорівнює $41-\pi n^2$.

Воно ж - найбільше значення дробу $\dfrac{8}{x^2+4\pi x+41}$.

Найбільше значення функції $y=\cos x$ дорівнює 1.

Отже, найбільше значення функції $f\left(x\right)$ при $x=-2\pi$.

$f\left(-2\pi\right)=\dfrac{8}{\left(-2\pi\right)^2+4\pi\left(-2\pi\right)+41}+\cos\left(-2\pi\right)=\dfrac{8}{4\pi^2-8\pi^2+41}+\cos 2\pi=\dfrac{8}{41-4\pi^2}+1=$

$=\dfrac{8+41-4\pi^2}{41-4\pi^2}=\dfrac{49-4\pi^2}{41-4\pi^2}.$

Відповідь: $\dfrac{49-4\pi^2}{41-4\pi^2}$.

Знайти найбільше значення функції $f\left(\alpha\right)=\dfrac{1}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$ при $0\leq\alpha\leq 2\pi$.

Розв'язання:

Перетворимо вираз $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$:

Можна застосувати формулу суми кубів у такому вигляді

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3=(\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1})^3-3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=$$

$$=1-3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot 1=1-3\cdot\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cdot 2}=1-\frac{3}{4}(\sin 2\alpha)^2=1-\frac{3}{4}\cdot\sin^2 2\alpha=$$

$$=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4\alpha}{2}=1-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 4\alpha}{2}\right)=1-\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cos 4\alpha=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4\alpha=\frac{5+3\cos 4\alpha}{8}.$$

Розглядаючи початок і кінець цієї математичної фрази, бачимо, що

$$\frac{1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha}=\frac{8}{5+3\cos 4\alpha}.$$

Останній вираз зручний для аналізу. Він набуває найбільшого значення тоді, коли знаменник $5+\cos 4x$ найменше значення, тобто, при $\cos 4\alpha=-1$,

$$4\alpha=\pi+2\pi n;\ \ f(\alpha)=\frac{8}{5+3\cdot(-1)}=\frac{8}{5-3}=\frac{8}{2}=4.\ \ \alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$$

Відповідь: 4.

Ідею знаходження найбільшого або найменшого значення квадратного тричлена можна використати при розв'язуванні рівнянь типу

$$2^{2\lg x}-2\sin y+2{,}5=2^{\lg x+1}+\frac{1}{2}\cos 2y.$$

Розв'язання:

$$2^{2\lg x}-2^{2\lg x+1}=\frac{1}{2}\cos 2y+2\sin y-2{,}5;$$

$$(2\lg x)^2-2\cdot 2^{\lg x}=\frac{1}{2}(\cos^2 y-\sin^2 y)+2\sin y-2{,}5;$$

$$\underbrace{(2^{\lg x})^2-2\cdot 2^{\lg x}+1}_{1}-1=\frac{1}{2}(1-\sin^2 y-\sin^2 y)+2\sin y-2{,}5;$$

$$(2^{\lg x}-1)^2-1=\frac{1}{2}(1-2\sin^2 y)+2\sin y-2{,}5;$$

$$(2^{\lg x}-1)^2=\frac{1}{2}-\sin^2 y+2\sin y-2{,}5+1;$$

$$(2^{\lg x}-1)^2=-(\sin^2 y+2\sin y+1);$$

$$(2^{\lg x}-1)^2=-(\sin y-1)^2;$$

$$(2^{\lg x}-1)^2+(\sin y-1)^2=0;$$

Ліва частина рівняння дорівнює нулю тоді, коли кожний з доданків дорівнює нулю:

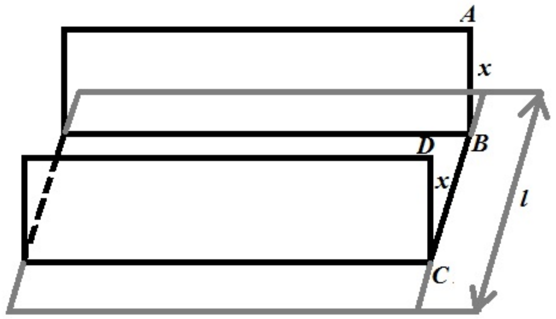
$$(2^{\lg x}-1)^2=0;\ \ 2^{\lg x}-1=0;\ \ 2^{\lg x}=1;\ \ 2^{\lg x}=2^0;\ \ \lg x=0;\ \ x=1.$$

$$(\sin y-1)^2=0;\ \ \sin y=1;\ \ y=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Відповідь: $\left(1;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right), k\in Z.$

Задача. З прямокутного листа жерсті шириною l треба вигнути жолоб з найбільшою площею прямокутного перерізу. Визначити висоту бортів жолоба.

Розв'язання:



Нехай $AB = x$, тоді $CD = x$, а $BC = l - 2x$. Прямокутний переріз жолоба має площу $S = AB \cdot BC$, $S = x \cdot (l - 2x)$.

$S = lx - 2x^2 = -2x^2 + lx.$

$S = -2x^2 + lx$ – квадратична функція. Графіком є парабола, напрямлена вітками вниз. Тому функція $S = -2x^2 + lx$ має найбільше значення.

$m = -\frac{b}{2a}$; $m = -\frac{l}{-2 \cdot 2} = \frac{l}{4}$; $x = \frac{l}{4}$ – висота борта.

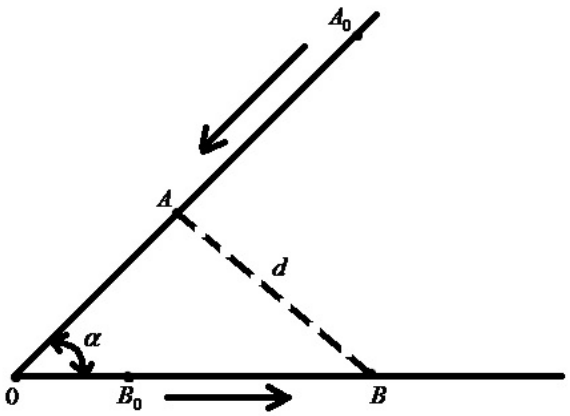
Відповідь: $\frac{l}{4}$.

Дві точки A і B рухаються по прямих, що перетинаються і утворюють кут $\alpha = \frac{\pi}{3}$. У початковий момент часу $t = 0$ точки займали положення A_0 і B_0.

$A_0O = 8$ м, $B_0O = 2$ м. Рух показано стрілками.

Через скільки секунд відстань d між точками A і B буде найменшою, якщо швидкості точок $\vartheta_A = 2$ м/сек, $\vartheta_B = 3$ м/сек. Знайти найменшу відстань між точками A і B.

Розв'язання:



Нехай пройшло t (с) від початку руху точок. Тоді шлях $A_0A = \vartheta_A \cdot t = 2 \cdot t$ *(м)*.

$B_0B = \vartheta_B \cdot t = 3 \cdot t$ *(м)*. Шлях

$AO = A_0O - A_0A = (8 - 2t)м.$

$BO = OB_0 + B_0B = (2 + 3t)м.$

Застосуємо теорему косинусів до трикутника AOB:

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB;$

$$d^2 = (8 - 2t)^2 + (2 + 3t)^2 - 2 \cdot (8 - 2t) \cdot (2 + 3t)\cos\frac{\pi}{3} =$$

$$= 64 - 32t + 4t^2 + 4 + 12t + 9t^2 - (32 + 48t + 8t + 12t^2) \cdot \frac{1}{2} = 19t^2 - 40t + 52.$$

$19 > 0$, а тому функція $d^2 = 19t^2 - 40t + 52$ набуває найменшого значення.

$m = -\frac{b}{2a} = \frac{20}{9}$; $t = \frac{20}{19}$ *сек*.

$$n=d^2(m)=\frac{19}{1}\cdot\left(\frac{20}{19}\right)^2-\frac{40}{1}\cdot\frac{20}{19}+52=\frac{400}{19}-\frac{800}{19}+52=-\frac{400}{19}+\frac{52}{1}=\frac{-400+988}{19}=\frac{588}{19};$$

$$d_{найм}=\sqrt{\frac{588}{19}}\,(м)\approx 5{,}6\,(м).$$

Відповідь: $1\frac{1}{19}$ *сек,* $\approx 5{,}6\,(м)$.

Знайти всі пари чисел *(x* і *y)*, які задовольняють рівняння:

$$16\sin^2 x\cdot\sin^2 y+tg^2x\cdot tg^2y+18=24\cdot\sin x\cdot\sin y+6tgx\cdot tgy.$$

Розв'язання:

$$16\sin^2 x\cdot\sin^2 y-24\cdot\sin x\cdot\sin y+3^2+tg^2x\cdot tg^2y-6tgx\cdot tgy+9=0;$$

$$(4\sin x\cdot\sin y-3)^2+(tgx\cdot tgy-3)^2=0.$$

Ця рівність можлива тільки при

<table>
<tr>
<td>

$(4\sin x\cdot\sin y-3)^2=0;$

$4\sin x\cdot\sin y-3=0;$

$\sin x\cdot\sin y=\frac{3}{4};$

Розв'яжемо таку систему рівнянь:

$+\begin{cases}\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{4},\\ \sin x\cdot\sin y=\frac{3}{4}.\end{cases}$

$\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y=1;$

$\cos(x-y)=1.$

$x-y=2\pi m,\ m\in Z.$

$+\begin{cases}x-y=2\pi m,\\ x+y=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n.\end{cases}$

$2x=\pm\frac{2}{3}\pi m+2\pi n\ \ |:2$

$x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(m+n),m,n\in Z.$

</td>
<td>

$(tgx\cdot tgy-3)^2=0;$

$tgx\cdot tgy-3=0;$

$\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin y}{\cos y}=3;$

$\cos x\cdot\cos y=\frac{\sin x\cdot\sin y}{3};$

$\cos x\cdot\cos y=\frac{\frac{3}{4}}{3}=\frac{1}{4};$

$-\begin{cases}\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{4},\\ \sin x\cdot\sin y=\frac{3}{4}.\end{cases}$

$\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y=-\frac{1}{2};$

$\cos(x+y)=-\frac{1}{2}.$

$x+y=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n,\ n\in Z.$

$-\begin{cases}x-y=2\pi n,\\ x+y=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n.\end{cases}$

$-2y=2\pi n-2m\pi\pm\frac{2\pi}{3}\ \ |:(-2)$

$x=\pi(n-m)\pm\frac{\pi}{3},n,m\in Z.$

</td>
</tr>
</table>

Відповідь: $\left(\pm\frac{\pi}{3}+\pi(m+n);\ \pi(n-m)\pm\frac{\pi}{3}\right),n,m\in Z.$

$$\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)\cdot\left(1+\sin^2(x+y)\right)=1+7\cos^2(x+y).$$

Розв'язання:

Скористаємось співвідношенням між середнім арифметичним і середнім геометричним двох виразів:

$$\frac{x^2+\frac{16}{x^2}}{2}\ge\sqrt{x^2\cdot\frac{16}{x^2}};\ \ \frac{x^4+16}{2x^2}\ge\sqrt{16};\ \ \frac{x^4+16}{2x^2}\ge 4;\ \ x^4-8x^2+16\ge 0.$$

$y(x)=x^4-8x^2+16=(x^2-4)^2$. Функція має найменше значення 0 при $x^2-4=0$,

$(x-2)\cdot(x+2)=0,\ \left[\begin{array}{l}x-2=0,\\x+2=0.\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x=2,\\x=-2.\end{array}\right.$

При цих значеннях *x* вираз $x^2+\frac{16}{x^2}=2^2+\frac{16}{2^2}=4+4=8.$ $1+\sin^2(x+y)\ge 1.$

Отже, ліва частина рівності $\ge 8,$ тобто, її найменше значення дорівнює *8*.

Права частина $1+7\cos^2(x+y)\le 8.$ А тому рівняння рівносильне системі:

$\begin{cases}x=\pm 2,\\\sin^2(x+y)=0,\\\cos^2(x+y)=1.\end{cases}$ Ця система еквівалентна сукупності систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2,\\\sin^2(x+y)=0,\\\cos^2(x+y)=1.\end{cases}\ \begin{cases}x=2,\\x+y=\pi n\end{cases}\ \begin{cases}x=2,\\2+y=\pi n\end{cases}\ \begin{cases}x=2,\\y=-2+\pi n.\end{cases}\\\begin{cases}x=-2,\\\sin^2(x+y)=0,\\\cos^2(x+y)=1.\end{cases}\ \begin{cases}x=-2,\\x+y=\pi n\end{cases}\ \begin{cases}x=-2,\\-2+y=\pi n\end{cases}\ \begin{cases}x=-2,\\y=2+\pi n.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(2;\ -2+\pi n),\ (2;\ 2+\pi n)\},\ n\in Z.$

$$\cos^4 x+\sin^4 x-\frac{3}{2}\sin^2 2x=-2y^2+4y-3.$$

Розв'язання:

$(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x-\frac{3}{2}\sin^2 2x=-2(y^2-2y+1{,}5);$

$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x-\frac{3}{2}\sin^2 2x=-2\cdot(y^2-2y+1+0{,}5);$

$1-2\sin^2 2x=-2\cdot(y-1)^2-1,\ \ 2-2\sin^2 2x-2(y-1)^2=0,$

$2(1-\sin^2 x)+2(y-1)^2=0,\ \ 2\cos^2 x+2(y-1)^2=0\ \ |:2\ \ \cos^2 x+(y-1)^2=0.$

$\cos x=0,$

$y-1=0,$

$y=1.$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n.$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ 1\right).$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)\cdot\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\cos 2x=-2y^2+12y-19.$$

Розв'язання:

$\sin 2x\cdot\cos x-(-\sin x)\cdot\cos 2x=-2(y^2-6y+9{,}5);$

$\sin 2x\cdot\cos x+\sin x\cdot\cos 2x=-2((y^2-6y+9)+0{,}5);$

$\sin(2x+x)=-2((y-3)^2-1);$

$\sin 3x+1+2(y-3)^2=0;$

$$\frac{2tg\frac{3x}{2}}{1+tg^2\frac{3x}{2}}+1+2(y-3)^2=0;$$

$$\frac{2tg\frac{3x}{2}+1+tg^2\frac{3x}{2}}{1+tg^2\frac{3x}{2}}+2(y-3)^2=0;$$

$$\frac{\left(tg\frac{3x}{2}+1\right)^2}{1+tg^2\frac{3x}{2}}+2(y-3)^2=0,\quad \left[\begin{array}{l}\left(tg\frac{3x}{2}+1\right)^2=0,\\ 2(y-3)^2=0.\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}tg\frac{3x}{2}+1=0,\\ y-3=0.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}tg\frac{3x}{2}=-1,\\ y=3.\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\frac{3}{2}x=-arctg1+\pi n,\\ y=3.\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\frac{3}{2}x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\\ y=3.\end{array}\right.$$

$$x=-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\pi n;\quad x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi n.$$

Відповідь: $\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi n;\ 3\right),\ n\in Z.$

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=y^2-4y+5.$$

Розв'язання:

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=(y^2-4y+4)+1;\quad \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}-1-(y-2)^2=0;\quad \frac{2tg\frac{x}{2}-1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}-(y-2)^2=0;$$

$$\frac{-\left(tg\frac{x}{2}-1\right)^2}{1+tg^2\frac{x}{2}}-(y-2)^2=0;\quad \frac{-\left(tg\frac{x}{2}-1\right)^2}{1+tg^2\frac{x}{2}}-(y-2)^2=0\ \Big|\cdot(-1);\quad \frac{\left(tg\frac{x}{2}-1\right)^2}{1+tg^2\frac{x}{2}}+(y-2)^2=0;$$

$$tg\frac{x}{2}-1=0;\quad tg\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n;\quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 2\right),\ n\in Z.$

Щоб розв'язати рівняння другого степеня з двома змінними доцільно користуватися таким алгоритмом:

1) звести ліву і праву частини рівняння до квадратного двочлена, подбавши про те, щоб різні частини рівняння мали протилежні знаки;

2) зібрати всі члени рівняння в лівій його частині, а праву зробити нулем;

3) виходячи з істини, що коли сума квадратів дорівнює нулеві, то кожний з доданків дорівнює нулеві, знайти всі значення змінних, що задовольняють вихідне рівняння.

$$\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=2y^2-4y+3.$$

Розв'язання:

$$\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=2\left(y^2-4y+1{,}5\right),\quad \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=2(y-1)^2+1;\quad \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}-1-2(y-1)^2=0;$$

$$\frac{1-tg^2\frac{x}{2}-1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}-2(y-1)^2=0;\quad \frac{-2tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}-2(y-1)^2=0\ \Big|:(-2);\quad \frac{tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+(y-1)^2=0;$$

$$\frac{tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=0;\quad tg^2\frac{x}{2}=0,\quad tg\frac{x}{2}=0,\quad \frac{x}{2}=\pi n,\quad x=2\pi n.$$

Відповідь: $(2\pi n;\ 1)$.

Завдання для самостійної роботи:

Знайти найменше значення функції $y=x^2-8x+12$.
Відповідь: -4.

Знайти найбільше значення функції $y=-x^2-8x+20$.
Відповідь: 4.

Знайти найбільше значення виразу $\dfrac{tg\alpha-tg\alpha}{\cos 4\alpha+1}$ при $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$.
Відповідь: 2 при $\alpha=\dfrac{\pi}{8}$.

Знайти всі значення *x* та *y*, які задовольняють рівняння
$\cos^4 x+\sin^4 x-\dfrac{3}{2}\sin^2 2x=-2y^2+4y-3.$
Відповідь: $\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\ 1\right)$, $n\in Z$.

$$\frac{2tg\frac{3}{2}x}{1+tg^2\frac{3}{2}x}=2y^2-8y+9.$$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3};\ 2\right),\ n\in Z.$

З усіх прямокутників даного периметра *2P* знайти той, у якого площа найбільша.

Відповідь: *квадрат із стороною* $\frac{P}{2}.$

Із дротини завдовжки *l см* треба виготовити модель прямокутного паралелепіпеда найбільшого об'єму. Визначити довжини ребер паралелепіпеда.

Відповідь: *куб з ребром* $\frac{l}{12}.$

Знайти всі значення x та y, що задовольняють рівняння $\frac{2tg\frac{3}{2}x}{1+tg^2\frac{3}{2}x}=2y^2-8y+9.$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi n;\ 2\right),\ n\in Z.$