Розділ 17
Доведення тригонометричних нерівностей

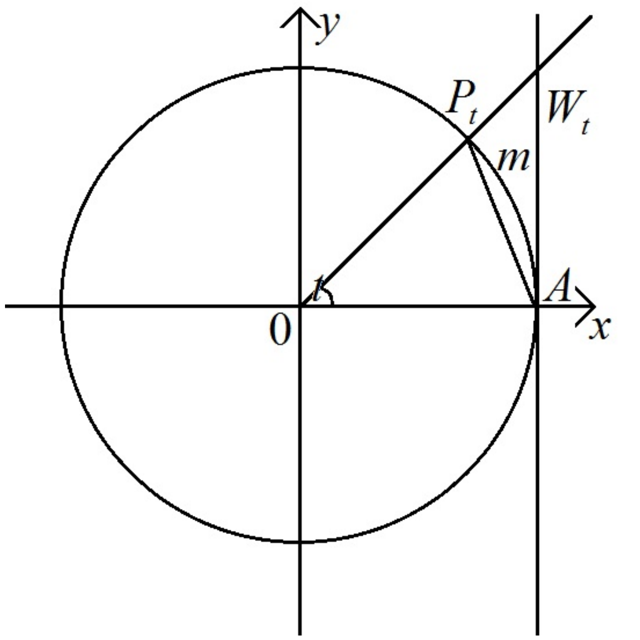
При розв'язуванні вправ на доведення тригонометричних нерівностей необхідно здійснити такі перетворення, внаслідок яких приходимо до нерівності вигляду $|\sin x| \le 1$ або $|\cos x| \le 1.$

Довести, що при $0 < t < \frac{\pi}{2}$ справедливі нерівності:

$$\sin t < t < tgt,$$

$$\cos t < \frac{\sin t}{t} < 1.$$

Доведення:



В першій чверті одиничного кола виберемо точку P_t, що відповідає дійсному числові *t*. Провівши в цю точку одиничний радіус OP_t, дістанемо $\angle P_tOA = t$ *(в радіанах)*. Порівняємо площі сектора P_tOAm і трикутника OAW_t:

пряма AW_t – вісь тангенсів, дотична до кола в точці A, а тому $OA \perp AW_r$.

$S_{OAW_t} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |AW_t| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |AW_t| = \frac{1}{2} tgt.$

$S_{AOP_t} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OP_t| \cdot \sin t = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin t = \frac{1}{2}\sin t.$

Оскільки коло - дотичне, то $r = 1,$ а його площа круга $S = \pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi.$

Її можна розглядати, як площу сектора в 2π радіан. Тоді можлива така пропорція:

$2\pi_{рад} - \pi$

$t_{рад} - x$ $\quad x = \frac{t \cdot \pi}{2\pi} = \frac{t}{2}.$ Отже, площа сектора $S_{AOMP_t} = \frac{t}{2}.$

З рисунка видно, що $S_{\Delta OAP_t} < S_{OAMP_t} < S_{\Delta OAW_t}$.

Підставивши в подвійну нерівність значення площ, дістанемо нерівність:

$$\frac{1}{2}\sin t < \frac{t}{2} < \frac{1}{2} tgt \;\Big|\cdot 2,$$

$$\sin t < t < tgt \; (A).$$

Так як функція Синус в першій координатній чверті додатний, то поділивши останню нерівність на $\sin t > 0,$ дістанемо правильну нерівність:

$$\frac{\sin t}{\sin t} < \frac{t}{\sin t} < \frac{tgt}{\sin t};$$

$$1 < \frac{t}{\sin t} < \frac{1}{\cos t} \text{ або}$$

$$\cos t < \frac{\sin t}{t} < 1.(B)$$

що й треба було довести.

Довести, що $\sin 1 > \frac{\pi}{4}$.

Доведення:

За формулами зведення $\sin 1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \cos\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right).$

Використаємо нерівність A:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) < \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. Піднесемо обидві частини до квадрата:

$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) < \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)^2$, тоді $1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) > 1 - 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)^2$;

$$1 - 2\cdot\left(\frac{\pi^2}{16} - 2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2} + 1\right) - 1 - \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{4 - \pi^2 + 4\pi}{8} = -\frac{(2-\pi)^2}{8} < 0;$$

$1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) > \frac{\pi}{4}$. Що й треба було довести.

Довести, що при $0 < t < \frac{\pi}{2}$ правильна нерівність $t - \frac{t^3}{4} < \sin t.$

Доведення

З нерівності $\frac{t}{2} < \frac{tgt}{2}$ слідує, що $\frac{t}{2} < tg\frac{t}{2}\Big|\cdot 2\cos^2\frac{t}{2},\; t\cdot\cos^2\frac{t}{2} < tg\frac{t}{2}\cdot 2\cos^2\frac{t}{2}$

$$\to t\cos^2\frac{t}{2} < \frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}\cdot 2\cos^2\frac{t}{2},\; t\cdot\cos^2\frac{t}{2} < 2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2},\; t\cdot\cos^2\frac{t}{2} < \sin t.$$

Оскільки $\sin\frac{t}{2} < \frac{t}{2}$ і $\cos^2\frac{t}{2} = 1 - \sin^2\frac{t}{2}$, то $t\cdot\left(1 - \sin^2\frac{t}{2}\right) < \sin t.$

Замінимо $\sin\frac{t}{2}$ на $\frac{t}{2}$ (в лівій частині) $t\cdot\left(1 - \frac{t^2}{2}\right) < \sin t,\; t - \frac{t^3}{2} < \sin t,$ що й треба було довести.

Довести нерівність $\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha<\frac{3}{4}.$

Доведення

$$\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha=\sin 2\alpha\cdot(\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha)=\sin 2\alpha\cdot\frac{\cos(\alpha-3\alpha)-\cos(\alpha+3\alpha)}{2}=$$

$$=\sin 2\alpha\cdot\frac{\cos\alpha-\cos 4\alpha}{2}=\sin 2\alpha\cdot\frac{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}{2}=\frac{(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha-\sin 2\alpha\cdot\cos 4\alpha)\cdot 2}{2\cdot 2}=$$

$$=\frac{2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha-2\sin 2\alpha\cdot\cos 4\alpha}{4}=\frac{\sin 4\alpha-2\cdot\frac{\sin(-2\alpha)+\sin 6\alpha}{2}}{4}=\frac{\sin 4\alpha+\sin 2\alpha-\sin 6\alpha}{4}.$$

Функція $y=\sin t$ існує при $|\sin t|\le 1.$

Якби $\sin 4\alpha=1,\ \sin 2\alpha=1,\ -\sin 6\alpha=1,$ то чисельник останнього дробу дорівнював би $1+1+1=3,$ а так як $\sin 2\alpha$ і $\sin 4\alpha$ одночасно дорівнювати одиниці не можуть, то ця сума $<3.$

Дійсно, $\sin 4\alpha=2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha,$ якщо $\sin 2\alpha=1,$ то $\sin 4\alpha=2\cdot 1\cdot 0=0\ne 1.$

Отже, $\frac{\sin 4\alpha+\sin 2\alpha-\sin 6\alpha}{4}<\frac{3}{4}.$

Довести, що нерівність $\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x-\sin x)}>8$ при $0<x<\frac{\pi}{4}.$

Доведення

Очевидно, що $\cos x\ne 0$ і тоді $\cos^3 x\ne 0.$

Розділимо чисельник і знаменник дробу на $\cos^3 x$:

$$\frac{\frac{\cos x}{\cos^3 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x\cdot\left(\frac{\cos x}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x\cdot(1-tgx)}=\frac{1+tg^2 x}{tg^2 x\cdot(1-tgx)}=\frac{(1-tgx)^2+2tgx}{tg^2 x(1-tgx)}=$$

$$=\frac{(1-tgx)^2}{tg^2 x(1-tgx)}+\frac{2tgx}{tg^2 x(1-tgx)}=\frac{1-tgx}{tg^2 x}+\frac{2}{tgx(1-tgx)}\quad (A)$$

Так як $0<x<\frac{\pi}{4},$ то $tgx>0$ і $1-tgx>0.$

При $tgx=\frac{1}{2}$ значення виразу $\frac{2}{tgx(1-tgx)}=\frac{2}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}=8.$

Значення виразу A - додатне.

Отже, $\frac{\cos x}{\sin^2 x\cdot(\cos x-\sin x)}>8$ при $0<x<\frac{\pi}{4}.$ Нерівність доведена.

Довести нерівність $\sin^8 x+\cos^8 x\ge\frac{1}{8}.$ При яких значеннях x досягається нерівність?

Розв'язання

За основною тригонометричною тотожністю $\sin^2 x+\cos^2 x=1.$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$(\sin^2 x+\cos^2 x)=1^2.$

$\sin^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x = 1;\ \ \sin^4 x + \cos^4 x \geq 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x;\ \ \sin^4 x + \cos^4 x \geq \dfrac{1}{2};$

$\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)^2 = \sin^8 x + 2\sin^4 x \cdot \cos^4 x + \cos^8 x \geq \dfrac{1}{4};\ \ \sin^8 x + \cos^8 x \geq 2\sin^4 x \cdot \cos^4 x.$

Отже, $\sin^8 x + \cos^8 x \geq \dfrac{1}{8}.$

Знак рівності досягається при $\sin x = \cos x \,|: \cos x,\ \ tgx = 1,\ \ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z.$

Довести нерівність $(x+y)\cdot(x+y+2\cos x) + 2 \geq 2\sin^2 x.$

При яких значеннях x та y досягається рівність?

$(x+y)\cdot(x+y) + (x+y)\cdot 2\cos x + 2 - 2\sin^2 x \geq 0;$

$(x+y)^2 + (x+y)2\cos x + 2\left(1 - \sin^2 x\right) \geq 0;$

$(x+y)^2 + 2(x+y)\cos x + 2\cos^2 x \geq 0;$

$\underbrace{(x+y)^2 + 2(x+y)\cos x + \cos^2 x}_{\text{квадрат двочлена}} + \cos^2 x \geq 0;$

$\big(\underbrace{(x+y) + \cos x}_{\geq 0}\big)^2 + \underbrace{\cos^2 x}_{\geq 0} \geq 0.$

Оскільки обидва доданки невід'ємні, то й їхня сума - невід'ємна. Нерівність доведена.

Рівність досягається тоді, коли

$\begin{cases} x + y + \cos x = 0, \\ \cos^2 x = 0. \end{cases} \begin{cases} x + y = 0, \\ \cos x = 0. \end{cases} \begin{cases} y = -x, \\ \cos x = 0. \end{cases}$

Розв'язуючи друге рівняння системи, дістанемо $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, y = -\dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

Відповідь: $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n; -\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z.$

Довести, що $-4 \leq \cos 2x + 3\sin x \leq 2\dfrac{1}{8}.$

Доведення

Розглянемо функцію $y = \cos 2x + 3\sin x.$ Спростимо її:

$y = \cos 2x + 3\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x + 3\sin x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x + 3\sin x = -2\sin^2 x + 3\sin x + 1.$

Це квадратична функція відносно $\sin x.$

Нехай $\sin x = t,$ тоді $y = -2t^2 + 3t + 1,\ \ -1 \leq t \leq 1,\ -2 < 0$ тому вітки параболи напрямлені донизу. Знайдемо координати вершини параболи:

$t_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-3}{-2\cdot 2} = \dfrac{3}{4};\ \ \dfrac{3}{4} \in [-1; 1]$

$y_0 = y(t_0) = -2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + 3\cdot\dfrac{3}{4} + 1 = -2\cdot\dfrac{9}{16} + \dfrac{9}{4} + 1 = -\dfrac{18}{16} + \dfrac{9}{4} + 1 = \dfrac{-18+36+16}{16} = \dfrac{34}{16} = 2\dfrac{2}{16} = 2\dfrac{1}{8};$

$2\dfrac{1}{8}$ – найбільше значення функції.

Знайдемо значення цієї функції на кінцях $[-1; 1]$:

$y(-1) = -2\cdot(-1)^2 + 3\cdot(-1) + 1 = -2 - 3 + 1 = -4;$

$y(1) = -2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 = -2 + 3 + 1 = 2.$

Отже, найменше значення функції на $[-1;1]$ дорівнює $-4,$ а найбільше значення $2\frac{1}{8}.$

Таким чином, $-4 \le \cos 2x + 3\sin x \le 2\frac{1}{8}.$

Довести, що $0 < \sin^8 x + \cos^{14} x \le 1.$

Доведення

Так як $\sin x \le 1,$ $\sin^2 x \le 1,$ $\cos x \le 1,$ $\cos^2 x \le 1$ для будь-яких x. Тоді $\sin^8 x \le \sin^2 x,$ $\cos^{14} x \le \cos^2 x.$ Додамо почленно ці нерівності: $\sin^8 x + \cos^{14} x \le \sin^2 x + \cos^2 x,$ $\sin^8 x + \cos^{14} x \le 1.$

Що й треба було довести.