Розділ 15
Показникові нерівності

Нерівності, які містять змінну в показнику степеня, називаються *показниковими.* Розв'язування показникових нерівностей при $a > 0, a + 1$ ґрунтуються на монотонності показникової функції, тобто:

1). Якщо $0 < a < 1$, то з нерівності $a^{x_1} > a^{x_2}$ слідує, що $x_1 < x_2$.

2). Якщо $a > 1$, то з нерівності $a^{x_1} > a^{x_2}$ слідує $x_1 > x_2$.

Продемонструємо це на прикладах:

$2^x < \frac{1}{4}.$

Розв'язання:

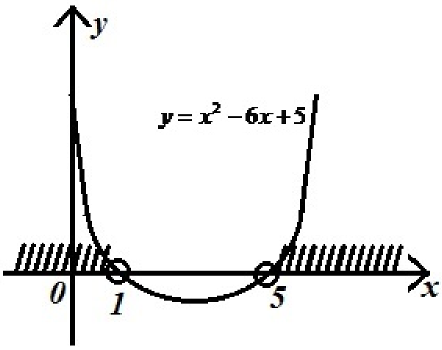
$2^x < \frac{1}{2^2}$; $2^x < 2^{-2}$. Оскільки $2 > 1$, то $x < -2$.

Відповідь: $(-\infty;-2)$.

$(0{,}36)^{-x^2+6x} > (0{,}36)^5.$

Розв'язання:

Так як $0 < 0{,}36 < 1$, то $-x^2 + 6x < 5 \big| \cdot (-1)$ $x^2 - 6x + 5 > 0$, $x_1 = 1$; $x_2 = 5$.



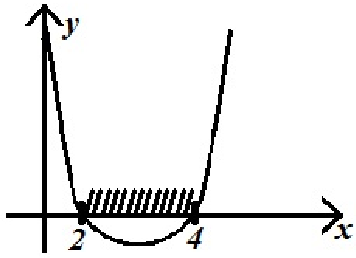
Відповідь: $(-\infty;1) \cup (5;+\infty)$.

$4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0.$

Розв'язання:

$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$; За теоремою Вієта, маємо:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 2, \\ 2^x = 4. \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2. \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} 2 < 2^x < 4, \\ 2^1 < 2^x < 2^2, \\ 1 < x < 2. \end{array}$$



Відповідь: $(1; 2)$.

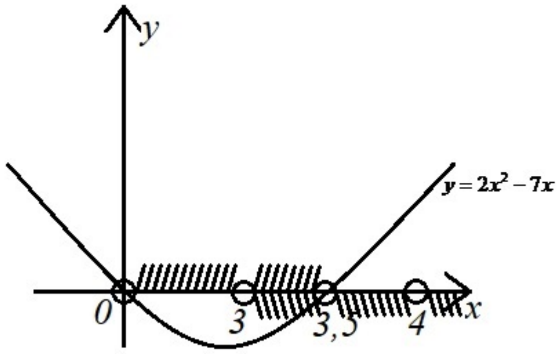
$(x-3)^{2x^2-7x} > 1.$

Розв'язання:

Можна розглядати два випадки.

1). $0 < x-3 < 1,\ (x-3)^{2x^2-7x} > (x-3)^0,\ 2x^2 - 7x < 0.$

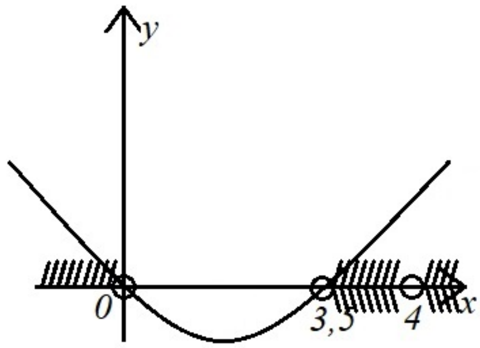
$\begin{cases} 0 < x-3 < 1 \,|+3 \\ 2x^2 - 7x < 0. \end{cases}$ $\begin{cases} 3 < x < 4, \\ x(2x-7) < 0. \end{cases}$



$x \in (3; 3{,}5).$

2). $x - 3 > 1,\ x > 4.\ (x-3)^{2x^2-7x} > (x-3)^0,\ 2x^2 - 7x > 0.$

$\begin{cases} x > 4, \\ 2x^2 - 7x > 0. \end{cases}$



$(4; +\infty).$

Відповідь: $(3; 3{,}5) \cup (4; +\infty).$

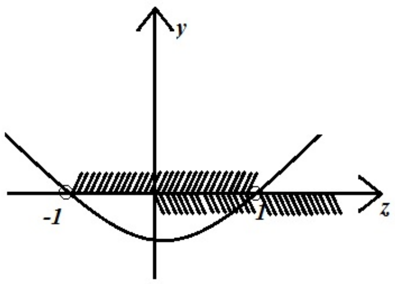
$4^x - 2\cdot 5^{2x} < 10^x.$

Розв'язання:

$4^x - 2\cdot 5^{2x} < 10^x \,|:10^x,\ \frac{4^x}{10^x} - \frac{2\cdot 25^x}{10^x} < \frac{10^x}{10^x};\ \left(\frac{2}{5}\right)^x - 2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^x < 1;$

Позначимо $z = \left(\frac{2}{5}\right)^x, z > 0.\ z - \frac{2}{z} - 1 < 0,\ \frac{z^2 - z - 2}{z} < 0.$

Оскільки $z > 0,\ z^2 - z - 2 < 0,\ z^2 - z - 2 = 0,\ z_1 = 2,\ z_2 = -1.$



$a < \left(\frac{2}{5}\right)^x < 2;\;\; 0 < (0{,}4)^x < 2;\;\; x\log_{0,4} 0{,}4 > \log_{0,4} 2;\;\; x > \log_{0,4} 2.$

Відповідь: $(\log_{0,4} 2; +\infty)$.

$2^{3x-1} < \sqrt[4]{8}.$

Розв'язання:

$2^{3x-1} < 2^{\frac{3}{4}};\;\; 2 > 1,\; 3x-1 < \frac{3}{4};\;\; 3x < 1\frac{3}{4};\;\; 3x < \frac{7}{4}\Big|:3,\;\; x < \frac{7}{12}.$

Відповідь: $\left(-\infty; \frac{7}{12}\right)$.

$\frac{15}{2^x+1} + \frac{4}{2^{x-1}-3} > \frac{12}{2^{x+1}}.$

Розв'язання:

Нехай $2^x = t,\; t > 0,$ тоді $\frac{15}{t+1} + \frac{4}{\frac{t}{2}-3} > \frac{12}{t\cdot 2};\;\;\; \frac{15}{t+1} + \frac{8}{t-6} - \frac{12}{2t} > 0;\;\; \frac{15}{t+1} + \frac{8}{t-6} - \frac{6}{t} > 0;$

$\frac{15t\cdot(t-6) + 8t\cdot(t+1) - 6\cdot(t+1)\cdot(t-6)}{(t-6)\cdot t\cdot(t+1)} > 0;\;\; \frac{15t^2 - 90t + 8t^2 + 8t - 6t^2 + 36t - 6t + 36}{(t-6)\cdot t\cdot(t+1)} > 0;$

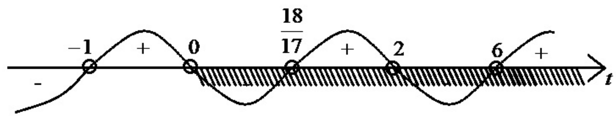
$\frac{17t^2 - 52t + 36}{(t-6)\cdot t\cdot(t+1)} > 0.$

Розкладемо чисельник на множники $D = 2704 - 2448 = 256 = 16^2.$

$t_1 = \frac{52-16}{34} = \frac{36}{34} = \frac{18}{17};\;\; t_2 = \frac{52+16}{34} = \frac{68}{34} = 2.$

$\frac{14\cdot\left(t - \frac{18}{17}\right)\cdot(t-2)}{(t-6)\cdot t\cdot(t+1)} > 0.$

Цю нерівність розв’яжемо методом «змійки»:



$t \in (-1; 0) \cup \left(\frac{18}{17}; 2\right) \cup (6; +\infty).$

Враховуючи, що $t > 0,$ дістанемо:

$t \in \left(\frac{18}{17}; 2\right) \cup (6; +\infty).$

Повернемось до заміни $t = 2^x,\;\; \frac{18}{17} < 2^x < 2$ або $2^x > 6.$

$\log_2 \frac{18}{17} < x\log_2 2 < \log_2 2, \ \log_2 \frac{18}{17} < x < 1.$

$\log_x 2^x > \log_2 6, \ x\log_2 2 > \log_2 6, \ x > \log_2 6.$

Відповідь: $\left(\log_2 \frac{18}{17}; \ 1\right) \cup \left(\log_2 6; \ +\infty\right).$

$3\cdot\left(x^2\cdot 2^{\sqrt{x-2}} + x + 2\right) < 9x^2 + x\cdot 2^{\sqrt{x-2}} + 2^{\sqrt{x-2}+1}.$

Розв'язання:

$3x^2\cdot 2^{\sqrt{x-2}} + 3x + 6 < 9x^2 + x\cdot 2^{\sqrt{x-2}} + 2^{\sqrt{x-2}+1};$

$3x^2\cdot 2^{\sqrt{x-2}} - x\cdot 2^{\sqrt{x-2}} - 2^{\sqrt{x-2}+1}\cdot 2 + 3x + 6 - 9x^2 < 0;$

$2^{\sqrt{x-2}}\cdot\left(3x^2 - x - \cdot 2\right) - 3\cdot\left(3x^2 - x - 2\right) < 0;$

$\left(3x^2 - x - \cdot 2\right)\cdot\left(2^{\sqrt{x-2}} - 3\right) < 0;$ Ця нерівність рівносильна такій сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x^2 - x - 2 < 0, & D = 25, \ x_1 = -\frac{2}{3}; \ x_2 = 1, \\ 2^{\sqrt{x-2}} - 3 > 0. & x - 2 \ge 0, \ x \ge 2. \end{cases} \quad \begin{cases} x \in \left(-\frac{2}{3}; \ 1\right) \\ x \in [2; +\infty) \end{cases} \ \varnothing \\ \begin{cases} 3x^2 - x - 2 > 0, \\ 2^{\sqrt{x-2}} - 3 < 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty), \\ 2^{\sqrt{x-2}} < 3, \ x \ge 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

$\log_2 2^{\sqrt{x-2}} < \log_2 3, \ \sqrt{x-2}\log_2 2 < \log_2 3, \ \sqrt{x-2} < \log_2 3.$

Піднесемо обидві частини останньої нерівності до квадрату:

$0 < x - 2 < \log_2^2 3 \ \big| + 2 \qquad 2 < x < \log_2^2 3 + 2.$

Відповідь: $\left(2; \ 2 + \log_2^2 3\right).$

$\left(2x^2 + x + 1\right)^{2x^2 + x - 1} < 1.$

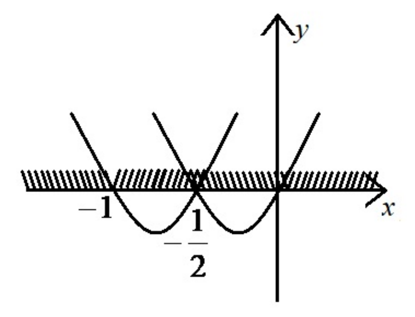
Розв'язання:

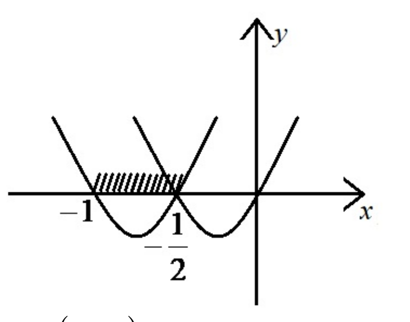
Вираз $2x^2 + x + 1 > 0,$ бо $D = 1 - 8 = -7 < 0$ і вітки параболи напрямлені вгору.

Це дає можливість замінити одиницею: $1 = \left(2x^2 + x + 1\right)^0.$

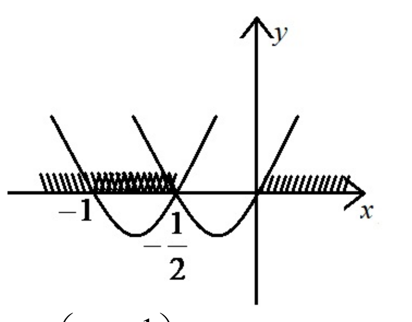
$\left(2x^2 + x + 1\right)^{2x^2 + x - 1} < \left(2x^2 + x + 1\right)^0;$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2 + x + 1 < 1, \\ 2x^2 + x - 1 > 0. \end{cases} \begin{cases} 2x^2 + x < 1, \\ D = 1 + 8 = 9. \end{cases} \begin{cases} x(2x+1) < 0, \\ x_1 = \frac{-1-3}{4} = -1; \ x_2 = -\frac{1}{2}. \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2 + x + 1 > 1, \\ 2x^2 + x - 1 < 0. \end{cases} \begin{cases} x(2x+1) > 0, \\ \end{cases} \end{array}\right.$$





$x \in (1; +\infty)$



$x \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right).$

Відповідь: $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

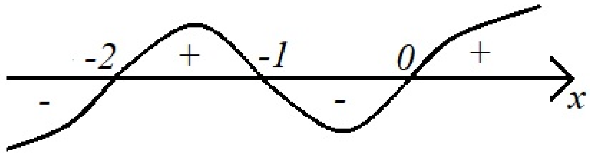
$\sqrt[x+1]{0{,}25^x} > 4^x$.

Розв'язання:

$\sqrt[x+1]{\left(\frac{25}{100}\right)^x} > 4^x$, $\sqrt[x+1]{\left(\frac{1}{4}\right)^x} > 4^x$, $\sqrt[x+1]{\left(4^{-1}\right)^x} > 4^x$, $\sqrt[x+1]{4^{-x}} > 4^x$, $4^{-\frac{x}{x+1}} > 4^x$. Так як $4>1$, то $-\frac{x}{x+1} > x$, $-\frac{x}{x+1} - x > 0, \Big|\cdot(-1)$ $\frac{x}{x+1} + x < 0$, $\frac{x+x^2+x}{x+1} < 0$, $\frac{x^2+2x}{x+1} < 0 \Big|\cdot(x+1)^2$, бо $(x+1)^2 > 0$, $\quad x+1 \neq 0$.

Тоді дістанемо нерівність, рівносильну даній нерівності в області визначення:

$(x+1)\cdot\left(x^2+2\right) < 0$, $(x+1)\cdot x\cdot(x+2) < 0$.



Відповідь: $(-\infty;-2)\cup(-1;0)$.

<u>Логарифмічні нерівності</u>

Нерівність, яка містить змінну під знаком логарифма, називається *логарифмічною.*

При розв’язуванні логарифмічних нерівностей необхідно враховувати такі два фактори:

1). Монотонність логарифмічної функції;

2). Областю визначення логарифмічної функції є множина додатних чисел.

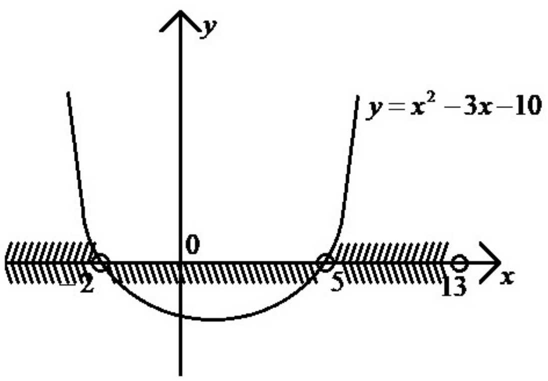
$\log_2\left(x^2-4x+3\right) > \log_2(13-x)$.

Розв'язання:

Ця нерівність рівносильна такій системі нерівностей:

$\begin{cases} x^2-4x+3 > 13-x, \\ 13-x > 0. \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-4x+3-13+x > 0, \\ x < 13. \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-3x+-10 > 0, \\ x < 13. \end{cases}$

$x_1 = 5$, $x_2 = -2$.



Відповідь: $(-\infty;-2)\cup(5;13)$.

$\frac{1}{2}\lg(x-1)+\lg\sqrt{2x+1}<1+\lg 0{,}3.$

Розв'язання:

$\lg\sqrt{x-1}+\lg\sqrt{2x+1}<\lg 10+\lg 3-\lg 10;$

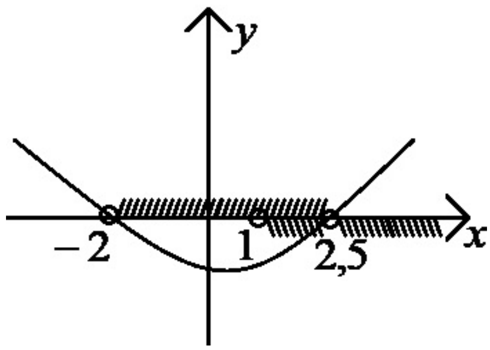
$\lg\sqrt{(x-1)(2x+1)}<\lg 3;$

Оскільки $10>3,$ то в силу монотонності логарифмічної функції маємо: $\sqrt{(x-1)(2x+1)}<3.$ Після піднесення до квадрату утвориться нерівність: $(x-1)(2x+1)<9.$ Розглянемо систему нерівностей:

$$\begin{cases} x-1>0, \\ 2x+1>0, \\ (x-1)\cdot(2x+1)<9 \end{cases} \quad \begin{cases} x>1, \\ x>\frac{1}{2}, \\ 2x^2+x-2x-1-9<0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>1, \\ 2x^2-x-10<0. \end{cases}$$

$D=1+80=81,\ \ x_1=\frac{1-9}{4}=-2-$ не задовольняє умову $x>1.$

$x_1=\frac{1+9}{4}=2{,}5>1.$



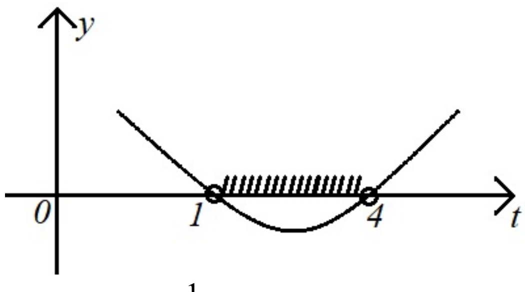
Відповідь: $(1;\ 2{,}5).$

$\log_{\frac{1}{2}} x+5\log_2 x+4<0.$

Розв'язання:

$\log^2_{\frac{1}{2}} x+5\cdot\frac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}} 2}+4<0,\ \ \log^2_{\frac{1}{2}} x+5\cdot\frac{\log_{\frac{1}{2}} x}{-1}+4<0,\ \ \log^2_{\frac{1}{2}} x-5\cdot\log_{\frac{1}{2}} x+4<0.$

Нехай $\log_{\frac{1}{2}} x=t,$ тоді $t^2-5t+4<0,\ \ t_1=1,\ \ t_2=4.$



$1<\log_{\frac{1}{2}} x<4,\ \ 1<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{2}} x<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16},\ \ x>0.$

Оскільки $0 < \frac{1}{2} < 1,$ то в силу монотонності логарифмічної функції, маємо

$\frac{1}{2} > x > \frac{1}{16},$ або $\frac{1}{16} < x < \frac{1}{2}.$

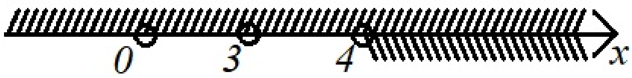
Відповідь: $\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{2}\right).$

$\frac{\log_a x^2}{\log_a(x-3)} < 2$ при $a > 1.$

Розв'язання:

$\frac{\log_a x^2}{\log_a(x-3)} - -2 < 0.$ Знайдемо область визначення лівої частини цієї нерівності.

$$\begin{cases} x^2 > 0, \\ x-3 > 0, \\ x-3 \neq 1. \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty), \\ x \in (3; +\infty), \\ x \neq 4. \end{cases}$$



Область визначення цієї функції $(3;4) \cup (4;+\infty).$

Позначимо $f(x) = \frac{\log_a x^2}{\log_a(x-3)} - 2.$

Знайдемо нулі цієї функції, розв’язавши таке рівняння:

$\frac{\log_a x^2}{\log_a(x-3)} - 2 = 0;$ За умовою $a > 1,$ а тому можна звести до спільного знаменника:

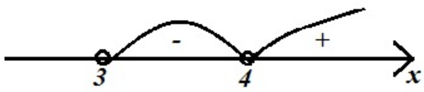
$\frac{\log_a x^2 - 2\log_a(x-3)}{\log_a(x-3)} = 0;$ $\begin{cases} \log_a x^2 - \log_a(x-3) = 0, \\ \log_a(x-3) \neq 0. \end{cases}$ $\log_a x^2 = \log_a(x-3)^2.$

В силу монотонності логарифмічної функції маємо: $x^2 = (x-3)^2;$ $x^2 = x^2 - 6x + 9,$

$x^2 - x^2 + 6x = 9,$ $6x = 9,$ $x = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$

$\frac{3}{2} \notin D(f).$ Значить, функція $f(x)$ не має коренів, а тому вона зберігає свій знак на кожному з інтервалів, що належать її області визначення.

Визначимо знак функції f на кожному з проміжків:



$$f(3{,}5) = \frac{\log_a 3{,}5}{\log_a(3{,}5-3)} - 2 = \frac{\log_a 3{,}5}{\log_a(3{,}5-3)} - 2 = \frac{2\log_a 3{,}5 - 2\log_a 0{,}5}{\log_a 0{,}5} = \frac{\log_a 3{,}5^2 - \log_a 0{,}5^2}{\log_a 0{,}5} =$$

$$= \frac{\log_a \frac{12{,}25}{0{,}25}}{\log_a 0{,}5} = \frac{\log_a 49}{\log_a 0{,}5} < 0;$$

$$f(10) = \frac{\log_a 10^2}{\log_a(10-3)} - 2 = \frac{\log_a 100 - 2\log_a 7}{\log_a 7} = \frac{\log_a \frac{100}{49}}{\log_a 7} = \frac{\log_a 2\frac{2}{49}}{\log_a 7} > 0.$$

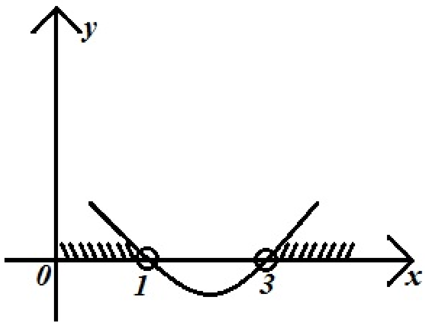
Відповідь: $(3;4)$.

$\log_{(x-3)}\left(x^2-4x+3\right)<0.$

Розв'язання:

Нехай $f(x)=\log_{(x-3)}\left(x^2-4x+3\right)$. Знайдемо область визначення функції $f(x)$: $x^2-4x+3>0$, $x_1=1$; $x_2=3$ – корені квадратного тричлена.

$D(f)=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.



$\log_{(x-3)}\left(x^2-4x+3\right)<\log_{(x-3)}1.$

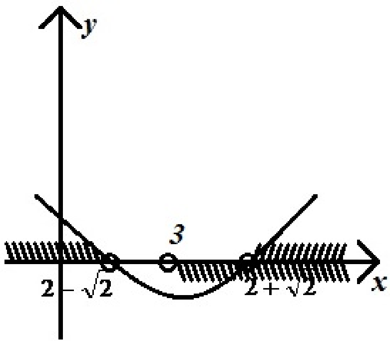
Розв'язання:

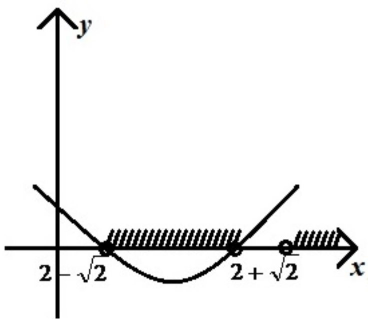
Ця нерівність рівносильна такій сукупності систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-4x+3>1,\\ 0<x-3<1.\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-4x+3<1,\\ x-3>1.\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-4x+2>0,\\ 3<x<4.\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-4x+2<0,\\ x>4.\end{cases}\end{array}\right.$$

Для розв'язування цих систем використаємо графічну ілюстрацію:

$D=16-8=8=4\cdot 2;\ \ x_1=\dfrac{4-\sqrt{4\cdot 2}}{2}=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-2\sqrt{2};\ \ x_2=2+2\sqrt{2}.$

<table>
<tr>
<td>

$x\in\left(2+\sqrt{2};4\right)\in D(f)0.$</td>
<td>

$\varnothing$</td>
</tr>
</table>

Відповідь: $\left(2+\sqrt{2};4\right)$.

$\log_x(2{,}5-x)<-1.$

Розв'язання:

$f(x)=\log_x(2{,}5-x),\ \ 2{,}5-x>0,\ \ x<2{,}5.$

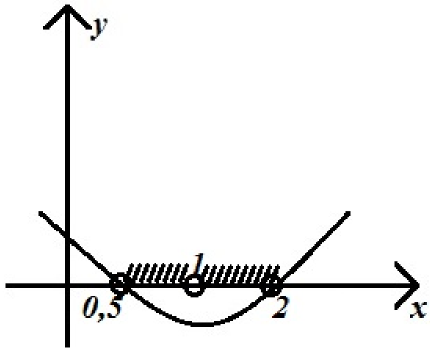
$x > 0,\ \ x \neq 1.$ $\begin{cases} 0 < x < 2{,}5, \\ x \neq 1. \end{cases}$ $D(f) = (0;1) \cup (1;2{,}5).$

$-1 = \log_x x^{-1} = \log_x \dfrac{1}{x}$; Тоді $\log_x (2{,}5 - x) < \log_x \dfrac{1}{2}.$

В силу монотонності логарифмічної функції при $0 < x < 1,\ \ 2{,}5 - x > \dfrac{1}{x},$

$2{,}5 - x - \dfrac{1}{x} > 0,\ \ x^2 - 2{,}5x + 1 < 0,\ \ D = 6{,}25 - 4 = 2{,}25 = 1{,}5^2.$

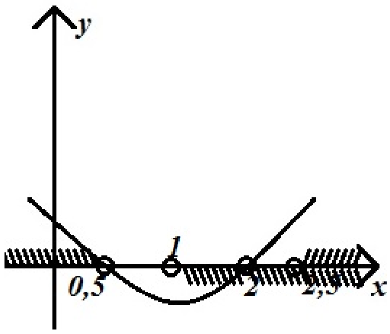
$x_1 = \dfrac{2{,}5 - 1{,}5}{2} = 0{,}5;\ \ x_2 = \dfrac{2{,}5 + 1{,}5}{2} = 2.$



$x \in (0{,}5;1).$

При $x > 1,\ 2{,}5 - x < \dfrac{1}{2},\ \ -x^2 + 2{,}5x - 1 < 0 \,\big|\cdot(-1)$

$x^2 - 2{,}5x + 1 > 0.$



$x \in (2;2{,}5).$

Відповідь: $(0{,}5;1) \cup (2;2{,}5).$

$x^{\log_2 x + 1} > 8x.$

Розв'язання:

Про логарифмуємо обидві частини нерівності з основою 2: ОДЗН: $(0;+\infty)$

$\log_2\left(x^{\log_2 x + 1}\right) > \log_2 (8x);$

$(\log_2 x + 1)\log_2 x > \log_2 8 + \log_2 x;$

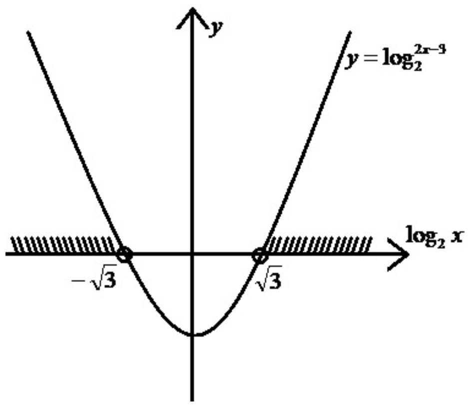
$\log_2^2 x + \log_2 x > \log_2 2^3 + \log_2 x;$

$\log_2^2 x + \log_2 x > 3 + \log_2 x;$

$\log_2^2 x - 3 > 0;$

$\log_2^2 x - \left(\sqrt{3}\right)^2 > 0;\ \ \left(\log_2 x - \sqrt{3}\right)\cdot\left(\log_2 x + \sqrt{3}\right) > 0;$

$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = \sqrt{3}, \\ \log_2 x = -\sqrt{3}. \end{array}\right.$



$-\infty<\log_2 x<-\sqrt{3}, \quad \sqrt{3}<\log_2 x<\infty, \quad 0<x<2^{-\sqrt{3}}, \quad 2^{\sqrt{3}}<x<\infty.$

Відповідь: $\left(0;\frac{1}{2^{\sqrt{3}}}\right)\cup\left(2^{\sqrt{3}};+\infty\right).$

Системи показникових нерівностей

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{-x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}=\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{-x}\cdot 2^{-x}=\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}\right)^{2}\cdot\frac{1}{2^{x}}.$$

$$\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}}_{1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}\cdot\frac{1}{2^{x}}>\frac{3^3}{4^3};\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x}\cdot\frac{1}{2^{x}}>\left(\frac{3}{4}\right)^{3}.$$

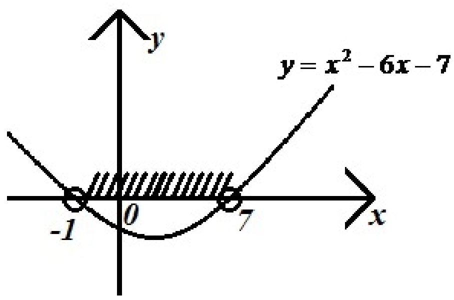
$$\frac{3^x}{2^x\cdot 2^x}>\left(\frac{3}{4}\right)^{3};\ \frac{3^x}{2^{2x}}>\left(\frac{3}{4}\right)^{3};\ \frac{3^x}{4^x}>\left(\frac{3}{4}\right)^{3};\ \left(\frac{3}{4}\right)^{x}>\left(\frac{3}{4}\right)^{3}.$$

Так як $0<\frac{3}{4}<1,$ то в силу монотонності показникової функції маємо: $x<3.$

Розв'язуємо другу нерівність системи:

$2^{x^2-6x-3,5}<2^3\cdot 2^{\frac{1}{2}};\ 2^{x^2-6x-3,5}<2^{3\frac{1}{2}};\ 2>1,$ а тому $x^2-6x-7<0,\ x^2-6x-7=0.$

По теоремі Вієта $x_1=-1,\ x_2=7.$



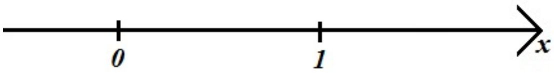
Відповідь: $(-1;3).$

$1<3^{\left|x^2-x\right|}<9.$

Розв'язання:

$3^0<3^{\left|x^2-x\right|}<3^2;$

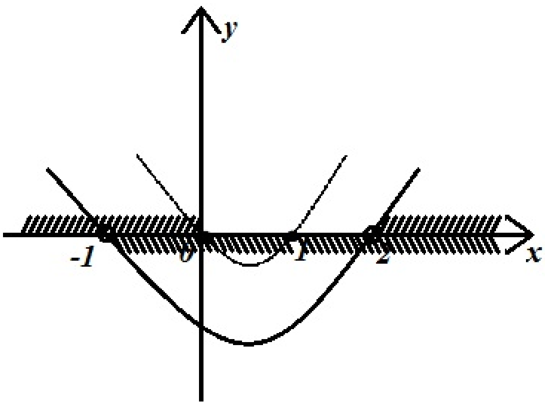
$0<\left|x^2-x\right|<2.$



В силу монотонності показникової функції маємо:
$x^2 - x = 0, \;\; x(x-1) = 0, \;\; x = 0, \;\; x = 1.$

На $(-\infty;0)$; $\left|x^2 - x\right| = x^2 - x.$

$$0 < x^2 - x < 2 \to \begin{cases} x^2 - x > 0, \\ x - x < 2. \end{cases} \begin{cases} x(x-1) > 0, \\ x^2 - x - 2 < 0. \end{cases}$$



$x \in (-1;0)$

На $[0;1)$: $\left|x^2 - x\right| = -\left(x^2 - x\right)$, $0 < -\left(x^2 - x\right) < 1 \Big| \cdot (-1)$

$$-1 < x^2 - x < 0 \to \begin{cases} x^2 - x > -1, & x^2 - x + 1 < 0, \\ x^2 - x < 0. & D < 0. \end{cases} \;\; \varnothing.$$

На $[1;+\infty)$: $\left|x^2 - x\right| = x^2 - x, \;\; x \in [1;2).$

Відповідь: $(-1;0) \cup [1;2).$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x} > \dfrac{27}{64}, \\ 2^{x^2 - 6x - 3,5} < 8\sqrt{2}. \end{cases}$$

Системи логарифмічних нерівностей

$$\frac{\lg 7 - \lg\left(-8x - x^2\right)}{\lg(x+3)} > 0.$$

Розв'язання:

Ця нерівність рівносильна сукупності двох систем нерівностей:

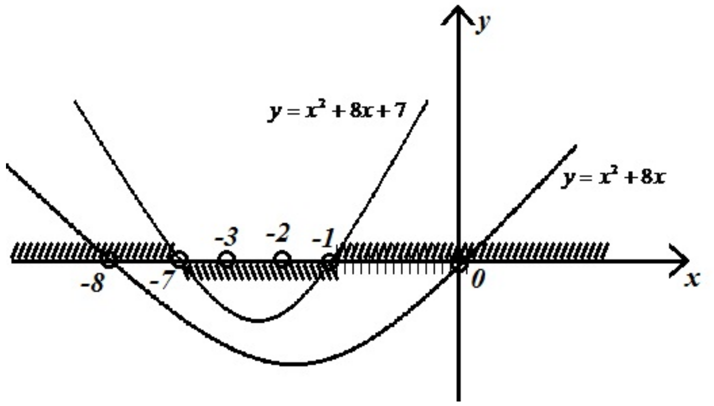
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lg 7 - \lg\left(-8x - x^2\right) > 0, \\ \lg(x+3) > 0. \end{cases} \\ \begin{cases} \lg 7 - \lg\left(-8x - x^2\right) < 0, \\ \lg(x+3) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'яжемо кожну з цих систем зокрема.

$$\begin{cases} \lg 7 > \lg\left(-8x - x^2\right), \\ \lg(x+3) > \lg 1, \\ -8x - x^2 > 0 \,|\cdot(-1) \\ x + 3 > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 7 > -8x - x^2, \\ x + 3 > 1, \\ x^2 + 8x < 0, \\ x > -3. \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 8x + 7 > 0, \\ x > -2, \\ x(x+8) < 0, \\ x > -3. \end{cases}$$

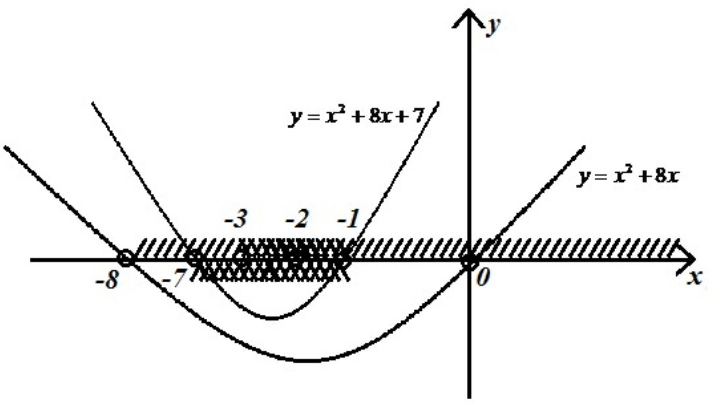
$x_1 = -1, \; x_2 = -7$ (теорема Вієта).

$x_3 = 0, \; x_4 = -8.$



$x \in (-1;0)$ – розв'язок першої системи сукупності.

$$\begin{cases} \lg 7 < \lg\left(-8x - x^2\right), \\ \lg(x+3) < \lg 1, \\ -8x - x^2 > 0, \\ x + 3 > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 7 < -8x - x^2, \\ x + 3 < 1, \\ x^2 + 8x < 0, \\ x + 3 > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 8x - 7 < 0, \\ x < -2, \\ x(x+8) < 0, \\ x > -3. \end{cases}$$



$x \in (-3;-2).$

Відповідь: $(-3;-2) \cup (-1;0).$

Завдання для самостійної роботи:

Довести, що при всіх значеннях x правильна нерівність:

1). $x + 3(x+1) - 4(x+2) < 0,$

2). $(x-2)^2 - x(x-4) > 0,$

3). $(5a+1)\cdot(5a-1) < 25a^2,$

4). $\dfrac{(1+x)^2}{2} \geq 2x,$

5). $\dfrac{1}{m}+m\geq 2$ при $m>0$.

6). $x^2+1\geq 2x$,

7). $x^2+y^2+z^2\geq xy+xz+yz$.

8). $(a+1)\cdot(b+1)\cdot(a+c)\cdot(b+c)>16abc$, при $a>1, b>1, c>1$.

Розв'язати нерівності:

1). $\dfrac{5-3x}{2}+4>\dfrac{x-7}{3}-x$. Відповідь: $x\in\left(-\infty;\dfrac{53}{5}\right)$.

2). $2x^2+3x-2>0$. Відповідь: $(-\infty;-2)$ і $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

3). $-3x+5x-4>0$. Відповідь: $\varnothing$.

4). $x^4-42x^2-64x+105<0$. Відповідь: $x\in(-5;-3)\cup(1;7)$.

5). $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^2+x-20}<0$. Відповідь: $x\in(-\infty;-5)\cup(0;1)\cup(2;4)$.

6). $x-\dfrac{x-1}{2}>\dfrac{x-3}{4}-\dfrac{x-2}{3}$. Відповідь: $x\in(-1;+\infty)$.

7). $x^2-6x+8>0$. Відповідь: $x\in(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$.

8). $x^2+x-6\leq 0$. Відповідь: $x\in[-3;2]$.

9). $x^2+6x+15<0$. Відповідь: $\varnothing$.

10). $x^2-8x+16>0$. Відповідь: $x\in(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$.

11). $x^2+10x+30<0$. Відповідь: $x\in(-\infty;\infty)$.

12). $(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-5)<0$. Відповідь: $x\in(-\infty;2)\cup(3;5)$.

13). $(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-5)>0$. Відповідь: $x\in(-1;1)\cup(2;3)\cup(5;+\infty)$.

14). $x^3-6x^2+11x-6\leq 0$. Відповідь: $x\in(-\infty;1]\cup[2;3]$.

15). $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-6x+5}<0$. Відповідь: $(-4;-1)$ і $(1;5)$.

16). $2-\dfrac{x-3}{x-2}>\dfrac{x-5}{x-1}$. Відповідь: $x\in(1;1{,}8)\cup(2;+\infty)$.

17). $x^4-x^3-3x^2+4x-4\leq 0$. Відповідь: $[-2;2]$.

18). $(x+4)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x+1)\leq 0$. Відповідь: $[-4;1]\cup[2;3]$.

19). $x^3\cdot(x+3)^2\cdot(5+x)\cdot(2x-1)^4\cdot(2-x)<0$. Відповідь: $(-5;-3)\cup(-3;0)\cup(2;+\infty)$.

20). $(x-3)^5\cdot(x+1)^6\cdot(x+3)\cdot x^2\cdot(1-x)\geq 0$. Відповідь: $(-\infty;-3]\cup\{-1;0\}\cup[1;3]$.

21). $(x+3)\cdot(x-2)^2\cdot(x^2-2x+3)>0$. Відповідь: $(-3;2)\cup(2;+\infty)$.

22). $(x+2)^2\cdot(x^2+2x+4)\cdot(x-1)^2\cdot(x-2)<0$. Відповідь: $(-2;1)\cup(1;2)$.

23). $(x^2+4x+10)^2-7\cdot(x^2+4x+11)+7<0$. Відповідь: $(-3;-1)$.

24). $(x^2+x+1)\cdot(x^2+x+2)\leq 12$. Відповідь: $(-2;1)$.

25). $\dfrac{(x-3)\cdot(x+2)\cdot(x-5)}{3x+4}\leq 0$. Відповідь: $\left[-2;-1\dfrac{1}{3}\right]\cup[3;5]$.

26). $\dfrac{(x+1)\cdot(x-2)^3}{(x+3)^2}\geq 0$. Відповідь: $(-\infty;-3)\cup(-3;-1]\cup[2;+\infty)$.

27). $\dfrac{(x-2)^2\cdot(x+3)^3\cdot(x-5)}{x^4\cdot(1-x)\cdot(2x+9)}>0.$ Відповідь: $(-4{,}5;-3)\cup(1;2)\cup(2;5).$

28). $\dfrac{(x-4)^6\cdot(x+2)^5}{3-2x}<0.$ Відповідь: $(-\infty;-2)\cup(1{,}5;4)\cup(4;+\infty).$

29). $\dfrac{(x+2)\cdot(x-1)^2\cdot(x+3)}{x^2-4}\le 0.$ Відповідь: $[-3;2)\cup(-2;2).$

30). $\dfrac{(x^2-4x+3)\cdot(2x-x^2-5)}{(x^2-6x+5)\cdot(x^2+6x+8)}\le 0.$ Відповідь: $(-\infty;-4)\cup(-2;1)\cup(1;3]\cup(5;+\infty).$

31). $\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+3x-10}<0.$ Відповідь: $(-\infty;-5)\cup(-3;-1)\cup(1;2).$

32). $\dfrac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}{(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}\le 1.$ Відповідь: $(-3;-2)\cup(-1;+\infty).$

33). $\sqrt{x^2+2x-15}<\sqrt{x^2+x-10}.$ Відповідь: $(-\infty;-5]\cup[3;5).$

34). $\sqrt[6]{2x^3-6x^2-10x+4}>\sqrt[6]{x^3-5x^2-6x}.$ Відповідь: $[-1;1)\cup[6;+\infty).$

35). $(x-1)\cdot(x^2-2x)\cdot\sqrt{16-x^2}>0.$ Відповідь: $[0;1]\cup[2;4].$

36). $\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x^2+x-6}}\le 0.$ Відповідь: $[-4;3)\cup(2;3).$

37). $\dfrac{\sqrt{17-5x-2x^2}}{x+3}\ge 0.$ Відповідь: $(-3;1].$

38). $\log_{\sqrt{\frac{2x+3}{x-1}}}\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)<\log_{\sqrt{\frac{2x+3}{x-1}}}\left(\sqrt{7}+2\right).$ Відповідь: $(-4;-1{,}5].$

39). $\log_{\sqrt{\frac{x-6}{x-1}}}\sqrt{20}<\log_{\sqrt{\frac{x-6}{x-1}}}(2\pi-3).$ Відповідь: $(6;+\infty).$

40). $\log_{\sqrt{\frac{2x+1}{x-5}}}\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)<\log_{\sqrt{\frac{2x+1}{x-5}}}\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right).$ Відповідь: $(-4;-0{,}5].$

41). $\log_{\sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}}\sqrt{26}<\log_{\sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}}(2\pi-2).$ Відповідь: $(0;0{,}5].$

42). $\log_{\sqrt{\frac{2x-7}{x-2}}}\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)<\log_{\sqrt{\frac{2x-7}{x-2}}}\left(\sqrt{3}+3\right).$ Відповідь: $(3{,}5;5).$

43). $\log_{\sqrt{\frac{2x-5}{x-1}}}\left(\sqrt{3}+2\right)<\log_{\sqrt{\frac{2x-5}{x-1}}}\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right).$ Відповідь: $(2{,}5;4).$

44). $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}-\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}\ge\dfrac{7}{12}.$ Відповідь: $(-\infty;-2)\cup[20{,}5;+\infty).$

45). $x^2+5x+4<5\sqrt{x^2+5x+28}.$ Відповідь: $(-9;4).$

46). $3^x\le 81.$ Відповідь: $(-\infty;4).$

47). $2^{9x-x^2}<1.$ Відповідь: $[-3;0]\cup[3;+\infty).$

48). $16^{\frac{2x+1}{3x-7}}-64^{\frac{1}{3}}\cdot(0{,}25)^{-2}>0.$ Відповідь: $\left(2\dfrac{1}{3};4{,}6\right).$

49). $\dfrac{4^x-2^{x+1}+8}{2^{1-x}}<8^x.$ Відповідь: $(1;+\infty).$

50). $(4x^2+2x+1)^{x^2-x}>1.$ Відповідь: $(-\infty;-0{,}5)\cup(1;+\infty).$

51). $\begin{cases} 0{,}2^{\cos x} \le 1, \\ \dfrac{x-1}{2-x} + 0{,}5 > 0. \end{cases}$ Відповідь: $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

52). $(0{,}5)^{x^2-x} > 3$. Відповідь: $\varnothing$.

53). $(x-1)^{x^2-6x+8} > 1$. Відповідь: $(4; +\infty)$.

54). $(0{,}5)^{\frac{x-4}{x}} \ge 8$. Відповідь: $(-\infty; -4] \cup (0; 1]$.

55). $5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x - 1 \ge 0$. Відповідь: $(1; +\infty)$.

56). $\log_{0,2}(x^2 - 2x - 3) \ge -1$. Відповідь: $[-2;1) \cup (3;4]$.

57). $\log_2(x^2 + x - 2) < \log_2(2x + 10)$. Відповідь: $(-3;-2) \cup (1;4)$.

58). $\log_3 \dfrac{x+5}{x+1} < 0$. Відповідь: $(-\infty;-5) \cup (-1;+\infty)$.

Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності:

$25^x - 2^{\log_4 6 - 1} < 10 \cdot 5^{x-1}$. Відповідь: $\{0\}$.