

## Розділ 8

### Логарифмічні рівняння

Рівняння вигляду  $\log_a x = b$ , де  $a > 0$  і  $a \neq 1$  називається найпростішим логарифмічним. А взагалі, можна сказати, трансцендентне рівняння, хоч один член якого містить змінну під знаком логарифма, називається логарифмічним.

Одним із способів розв'язування логарифмічних рівнянь є застосування основної логарифмічної тотожності  $a^{\log_a n = N}$ . Наприклад:  $4^{\log_{64}(x-3)} + \log_2 5 = 50$ .

Розв'язання:

ОДЗ рівняння:  $x - 3 > 0$ ,  $x > 3$ ,  $x \in (3; +\infty)$ . Перетворимо ліву частину рівняння:

$$4^{\log_{64}(x-3)} + \log_2 5 = 4^{\log_2 5} = 4^{\log_{64}(x-3)} \cdot 4^{\log_2 5} = (\sqrt[3]{64})^{\log_{64}(x-3)} \cdot (2^2)^{\log_2 5} =$$

$$\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^{\log_{64}(x-3)} \cdot 2^{2\log_2 5} = 64^{\frac{1}{3}\log_{64}(x-3)} \cdot 2^{\log_2 5^2} = 64^{\log_{64}(x-3)^{\frac{1}{3}}} \cdot 2^{\log_2 25} = (x-3)^{\frac{1}{3}} \cdot 25.$$

Дане рівняння має вигляд:  $(x-3)^{\frac{1}{3}} \cdot 25 = 50$ ,  $(x-3)^{\frac{1}{3}} = \frac{50}{25}$ ,  $(x-3)^{\frac{1}{3}} = 2$ ,

$\left((x-3)^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^3$ ;  $x-3 = 8$ ,  $x = 11$ .  $11 \in \text{ОДЗ}$ . Але не завадить зробити перевірку.

Якщо  $x = 11$ , то  $4^{\log_{64}(11-3)} + \log_2 5 = 4^{\log_{64} 8} + \log_2 5 = 4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\log_2 5} = 2 \cdot 2^{\log_2 25} = 2 \cdot 25 = 50$ .  
 $50 = 50$ .  $x = 11$  – корінь рівняння.

Відповідь: 11.

В процесі розв'язування логарифмічних рівнянь можлива поява сторонніх коренів, а тому перевірка доцільна у всякому випадку.

Доброю підмогою є формула  $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b A}$  переходу від однієї основи

логарифмів до іншої, яка значно спрощує розв'язування тригонометричних рівнянь.

Наприклад,  $2\log_x 25 - 3\log_{25} x = 1$ .

Розв'язання:

ОДЗ:  $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ .  $2 \cdot \frac{\log_{25} 25}{\log_{25} x} - 3 \cdot \log_{25} x = 1$ ;  $\frac{2 \cdot 1}{\log_{25} x - 3 \cdot \log_{25} x} = 1$ ;

Позначимо:  $\log_{25} x = y$ , тоді  $\frac{2}{y} - 3y - 1 = 0$ ;  $\begin{cases} 3y^2 - y + 2 = 0; \\ y \neq 0; \end{cases} \quad D = 1 + 24 = 25$ ;

$y_1 = \frac{1-5}{-6} = \frac{2}{3} \in \text{ОДЗ}$ .  $y_2 = \frac{1+5}{-6} = -1 \notin \text{ОДЗ}$ .  $\log_{25} x = \frac{2}{3}$ ;  $x = 25^{\frac{2}{3}}$ .

Відповідь:  $x = 25^{\frac{2}{3}}$ .

Розв'яжемо таке рівняння:  $x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{100}} = 0$ .

Розв'язання:

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:  $\left(x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{100}}\right)^2$ ;

$$(x^2)^{1-\frac{1}{3}\lg x^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{10000}}; \text{ Про логарифмуємо з основою 10:}$$

$$\left(1 - \frac{1}{3}\lg x^2\right)\lg x^2 = \lg(10)^{-\frac{4}{3}}; \quad \left(1 - \frac{1}{3}\lg x^2\right) \cdot \lg x^2 = -\frac{4}{3};$$

Позначимо  $\lg x^2 = y$ , тоді  $\left(1 - \frac{1}{3}y\right)y + \frac{4}{3} = 0$ ;  $y - \frac{1}{3}y^2 + \frac{4}{3} = 0 \mid \cdot 3$ ,  $3y - y^2 + 4 = 0$ ,

$y^2 - 3y - 4 = 0$ . За теоремою Вієта маємо:

$y_1 = -1$ ;  $y_2 = 4$ . Повертаючись до заміни, дістанемо:

$$\lg x^2 = -1; \quad x^2 = 10^{-1};$$

$$x^2 = \frac{1}{10}; \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{10}}; \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{10}}; \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}; \quad \lg x^2 = 4; \quad x^2 = 100; \quad x_3 = 100; \quad x_4 = -100.$$

Відповідь:  $\frac{1}{\sqrt{10}}$ ; 100.

$$\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5.$$

Розв'язання:

$$\sqrt{\log_x (\sqrt{5x})^{\frac{1}{2}}} = -\log_x 5; \quad \sqrt{\frac{1}{2}\log_x 5 + \frac{1}{2}\log_x x} = -\log_x 5; \quad \sqrt{\frac{1}{2}\log_x 5 + \frac{1}{2}} = -\log_x 5;$$

Піднесемо обидві частини до квадрату:

$$\frac{1}{2}\log_x 5 + \frac{1}{2} = (-\log_x 5)^2 \mid \cdot 2; \quad \log_5 x + 1 = 2\log_x^2 5;$$

Підстановка:  $\log_x 5 = Z$ , тоді  $2z^2 - z - 1 = 0$ ; 
$$\begin{cases} 2\log_x^2 5 - \log_x 5 - 1 = 0; \\ -\log_x 5 \geq 0. \end{cases}$$

$$D = 1 + 8 = 9. \quad Z = -\frac{1}{2}; \quad Z = 1. \quad \begin{cases} \log_x 5 = -\frac{1}{2}, \\ \log_x 5 = 1, \\ \log_x 5 \leq 0. \end{cases}$$

$$x^{-1/2} = 5, \quad \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2} = 5^{-2}; \quad x = \frac{1}{25}; \quad x = 5 - \text{не задовольняє нерівність } \log x^5 \leq 0.$$

Відповідь:  $\frac{1}{25}$ .

$$\log_x 25 = \frac{1}{\log_{25} x}, \text{ тоді } 2 \cdot \frac{1}{\log_{25} x} - 3\log_{25} x = 1, \quad \frac{2}{\log_{25} x} - 3\log_{25} x = 1. \text{ Введемо нову}$$

змінну  $\log_{25} x = y$ ,  $\frac{2}{y} - 3y = 1$ ,  $-3y^2 - y + 2 = 0$ ,  $3y^2 + y - 2 = 0$ ,  $D = 1 + 24 = 25 = 5^2$ .

$$y_1 = \frac{-1-5}{6} = -1; \quad y_2 = \frac{-1+5}{6} = \frac{2}{3}. \quad \log_{25} x = -1, \quad x = 25^{-1} = \frac{1}{25}; \quad \log_{25} x = \frac{2}{3};$$

$$x = 25^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{25^2} = \sqrt[3]{(5^2)^2} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5} = 5 \cdot \sqrt[3]{5}.$$

Відповідь:  $\frac{1}{25}$ ;  $5 \cdot \sqrt[3]{5}$ .

Згадана формула є корисною і при розв'язуванні рівнянь типу:

$$\log_x 3 + \log_{x^2} 9 + \log_{\sqrt{x}} \sqrt{3} = 1.$$

Розв'язання:

О.Д.З:  $(0; 1) \cup (1; +\infty)$ . Перетворимо кожний член рівняння:  $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$ ;

$$\log_{x^2} 9 = 2 \log_{x^2} 3 = \frac{2}{\log_3 x^2} = \frac{2}{2 \log_3 x} = \frac{1}{\log_3 x}; \quad \log_{\sqrt{x}} \sqrt{3} = \frac{1}{\log_{\sqrt{3}} \sqrt{x}} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{3^2}} x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\log_3 x}.$$

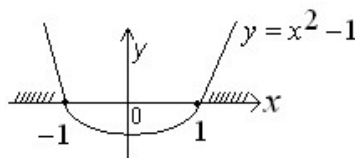
Дане рівняння матиме вигляд:  $\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 x} = 1$ ;  $\frac{3}{\log_3 x} = 1$ ,  $\lg_3 x = 3$ ,

$x = 3^3 = 27$ . Відповідь: 27.

Або таке рівняння:  $\log_3 \left( 2^{\sqrt{x^2-1}} + 1 \right) = 2$ .

Розв'язання:

$$\text{О.Д.З: } x^2 - 1 > 0, \quad (x-1) \cdot (x+1) > 0, \\ x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$



За означенням логарифма числа маємо:

$$2^{\sqrt{x^2-1}} + 1 = 3^2; \quad 2^{\sqrt{x^2-1}} = 9 - 1; \quad 2^{\sqrt{x^2-1}} = 8; \quad 2^{\sqrt{x^2-1}} = 2^3; \quad \sqrt{x^2-1} = 3; \quad x^2 - 1 = 9; \\ x^2 = 10; \quad x_1 = -\sqrt{10}; \quad x_2 = \sqrt{10}.$$

Відповідь:  $-\sqrt{10}; \sqrt{10}$ .

## Завдання для самостійної роботи:

Згадана тотожність необхідна і при розв'язуванні логарифмічних рівнянь типу:

**8.1**  $10^{\lg^2 x} + x^{\lg x} = 20.$

Відповідь: 0,1; 10.

**8.2**  $\sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} \cdot \log_{\sqrt{5}} x = -\sqrt{6}.$

Відповідь:  $\frac{1}{5}$ .

**8.3**  $\log_x x = \log_2 (6 - x^2).$

Відповідь: -3; 2.

**8.4**  $x^{\log_x (x^2+3)} = -4.$

Відповідь:  $x \in \emptyset$ .

**8.5**  $\log_6 (x-1) + \log_6 (5x+3) = 2.$

Відповідь: 3.

**8.6**  $\log_{\frac{1}{9}} (2x^2 - 2x - 1) = -\frac{1}{2}.$

Відповідь: -1; 2.

**8.7**  $2 \log_3 (x-2) - \log_3 \left( x^2 - 4x + \frac{28}{9} \right) = 2.$

Відповідь: 1; 3.

**8.8**  $\log_{x-1} 9 = 2.$

Відповідь: 4.

**8.9**  $\lg(x^2 - x - 6) + x = \lg(x+2) + 4.$

Відповідь: 4.

- 8.10**  $x^{\log_2 x+2} = 8$ .      Відповідь:  $\frac{1}{8}$ .
- 8.11**  $\log_x 9x^2 \cdot \log^2_3 x = 4$ .      Відповідь:  $3; \frac{1}{9}$ .
- 8.12**  $\lg^2 x = 1$ .      Відповідь: 0,1; 10.
- 8.13**  $\frac{1}{\log x - 6} + \frac{5}{\log x + 2} = 1$ .      Відповідь:  $10^2; 10^8$ .
- 8.14**  $\lg(x^{\lg x}) = 1$ .      Відповідь: 0,1; 10.
- 8.15**  $\sqrt{2 \lg(-x)} = \lg \sqrt{x^2}$ .      Відповідь:  $-100; -1$ .
- 8.16**  $\log_x(125x) \cdot \log^2_{25} x = 1$ .      Відповідь:  $5; 5^{-4}$ .
- 8.17**  $\lg(x+1) - \frac{1}{2} \lg(2x-3) - \lg \sqrt{x-3} = \frac{1}{2} - \lg \sqrt{2}$ .      Відповідь:  $\frac{11}{9}; 4$ .
- 8.18**  $x^{3-\lg \frac{200}{x}} = 400$ .      Відповідь: 0,01; 20.
- 8.19**  $x^{3+\lg \frac{20}{x}} = 8000$ .      Відповідь: 0,001; 20.
- 8.20**  $\sqrt{2 \log_8(-x)} - \log_8 \sqrt{x^2} = 0$ .      Відповідь:  $-1; -64$ .
- 8.21**  $3^{\log^2_3 x} + x^{\log_3 x} = 162$ .      Відповідь:  $\frac{1}{3}; 9$ .
- 8.22**  $2,5^{\log_3 x} + 0,4^{\log_3 x} = 2,9$ .      Відповідь:  $\frac{1}{3}; 3$ .
- 8.23**  $\log_x 9x^2 \cdot \log^2_3 x = 4$ .      Відповідь:  $\frac{1}{9}; 3$ .
- 8.24**  $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^4 - 3) = 0$ .      Відповідь:  $\frac{1}{\sqrt[4]{10}}; 10$ .
- 8.25**  $x^{\lg x-2} = 1000$ .      Відповідь:  $\frac{1}{\sqrt[3]{100}}; \frac{1}{\sqrt[5]{100}}$ .
- 8.26**  $\log^2_5 x + 3 \log_5 x - 4 = 0$ .      Відповідь:  $5; \frac{1}{625}$ .
- 8.27**  $1 + \log_2(x+5) = \log_2(3x-1) + \log_2(x-1)$ .      Відповідь: 3.
- 8.28**  $x^{1+\lg x} = 100$ .      Відповідь: 0,01; 10.
- 8.29**  $14^{\log_7^2} \cdot x^{\log_7 4x} = 2$ .      Відповідь: 0,5.