Розділ 5
Раціональні рівняння

Актуалізуємо деякі, опорні для даного розділу, математичні поняття.

Функцією називається відповідність між двома множинами X та У, при якій кожному елементу множини X відповідає лише один елемент множини У.

Той факт, що задана функція записується так: у = f(x), x – аргумент, у – функція, f – закон відповідності.

Область визначення функції – це множина значень аргументу, при яких функція має зміст. Область визначення позначається *Д(у)*.
$y = 8x^3 + 10x^2 - 12x + 14,$ $\quad Д(y) = (-\infty;\ +\infty).$

Значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називається коренем, або нулем функції. Функція $y = (x+2)\cdot(x+1)\cdot x(x-1)\cdot(x-2)$ має п'ять нулів, або п'ять коренів: $x = -2;\quad x = -1;\quad x = 0;\quad x = 1;\quad x = 2.$

Функція $f(x)$ називається парною, якщо для всіх значень аргументу *x*, що належать її області визначення, виконується рівність: $f(-x) = f(x).$
Функція $f(x) = x^4 + 3x^2 - 8$ – парна, бо $f(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^2 - 8 = x^4 + 3x^2 - 8 = f(x),$ $f(-x) = f(x).$

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат.
Функція $f(x)$ називається непарною, якщо для всіх значень аргументу *x*, що належать її області визначення, виконується рівність $f(-x) = -f(x).$
Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Функції бувають парні, непарні і загального вигляду, тобто такі, які не належать ні до парних, ні до непарних.

Функції класифікують на дві великі групи: алгебраїчні і неалгебраїчні тобто, трансцендентні. Функція називається алгебраїчною, якщо над її аргументом виконується скінченна кількість алгебраїчних операцій (додавання, віднімання ,множення ,ділення, піднесення до степеня та добування кореня з натуральним показником.

Рівність із змінною, значення якої потрібно знайти, називається рівнянням.

Алгебраїчні рівняння поділяються на раціональні та ірраціональні. Раціональними називаються такі алгебраїчні рівняння, в яких над аргументом виконуються алгебраїчні операції, крім добування кореня. Усі інші алгебраїчні рівняння називаються ірраціональними.
Наприклад $\frac{4}{x-2} + \frac{x}{x^2-1} = 5x + 6$ – раціональне рівняння, а рівняння $\sqrt[4]{x-6} + \sqrt[4]{x+6} = \frac{4}{\sqrt{x}}$ є ірраціональним. Те значення аргументу, при якому рівняння перетворюється в правильну числову рівність, називається коренем рівняння. Цілим раціональним рівнянням називається рівняння вигляду $F(x) = 0,$ де $F(x)$ – ціла раціональна функція степеня *n*.

При виборі рівнянь для розв'язування слід домінуюче місце відвести тим із них, які розв'язуються в позаурочний час та в період до вузівської підготовки, з тих розділів елементарної математики, поглиблене вивчення, яких передбачається програмою з математики для студентів вищих навчальних закладів.

Покажемо декілька способів розв'язування цілих раціональних рівнянь вищих другого степеня. Якщо рівняння зведене і члени його розміщені за спадними степенями, то його можна розв'язати таким способом:

$x^4 + 8x^3 + 10x^2 - 24x + 5 = 0.$

Розв'язання:

1). Шукаємо дільники вільного члена рівняння, тобто числа 5. Це: –1; 1; –5; 5.

2). Те з цих чотирьох чисел, яке перетворить ліву частину рівняння в нуль, вважатимемо його коренем. Таким є число 1, бо

$1^4 + 8\cdot 1^3 + 10\cdot 1^2 - 24\cdot 1 + 5 = 1 + 8 + 10 - 24 + 5 = 24 - 24 = 0.$

3). Ділимо ліву частину даного рівняння на двочлен $x - 1$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + 8x^3 + 10x^2 - 24x + 5 & x - 1 \\
\hline
-\ x^4 - x^3 & x^3 + 9x^2 + 19x - 5 \\
\quad -\ 9x^3 + 10x^2 & \\
\quad\ \ \ 9x^3 - 9x^2 & \\
\qquad -\ 19x^2 - 24x & \\
\qquad\ \ \ 19x^2 - 19x & \\
\qquad\quad -\ -5x + 5 & \\
\qquad\quad\ \ \ -5x + 5 & \\
\qquad\qquad 0. &
\end{array}
$$

4). Шукаємо цілі корені рівняння $x^3 + 9x^2 + 19x - 5 = 0$ попереднім способом. $\pm 1;\ \ \pm 5 -$ дільники вільного члена і тільки число –5 є коренем цього рівняння, тому

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 9x^2 + 19x - 5 & x + 5 \\
\hline
-\ x^3 - 5x^2 & x^2 + 4x - 1 \\
\quad -\ 4x^2 + 19x & \\
\quad\ \ \ 4x^2 + 20x & \\
\qquad -\ -x - 5 & \\
\qquad\ \ \ -x - 5 & \\
\qquad\quad 0. &
\end{array}
$$

5). Розв'язуємо квадратне рівняння $x^2 + 4x - 1 = 0.$

$Д = 4^2 + 4 = 20 > 0,$

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{20}}{2} = \frac{-4 - 2\sqrt{5}}{2} = -2 - \sqrt{5},$$

$x_2 = -2 + \sqrt{5}.$

Відповідь: $-5;\ \ -2 - \sqrt{5};\ \ -2 + \sqrt{5};\ \ 1.$

Цей спосіб пригодний тоді, коли хоча б один з коренів рівняння є дільником його вільного члена і перший коефіцієнт дорівнює одиниці. Якщо ж перший коефіцієнт рівняння відмінний від одиниці, то інколи можна скористатися таким прийомом. Знайти раціональні корені рівняння $4x^4+8x^3+x^2+3x+9=0.$

Розв'язання:

$4x^4+8x^3+x^2+3x+9=0 \,\big|\cdot 2^2;$

$2^4\cdot x^4+4\cdot 2^3\cdot x^3+2^2\cdot x^2+12x+36=0;$ Вводимо заміну $2x=y,$ тоді рівняння

$(2x)^4+4\cdot(2x)^3+(2x)^2+6\cdot(2x)+36=0;$

набуває вигляду: $y^4+4y^3+y^2+6y+36=0$. Скористаємось попереднім способом: $36M\{\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm4;\ \pm6;\ \pm9;\ \pm12;\ \pm18;\ \pm36.\}$

Оскільки всі коефіцієнти цього рівняння-додатні, то корені потрібно шукати серед від'ємних дільників числа 36,тобто,серед чисел:−1; −2; −3; −4; −6;−9;−12;−18;−36.

Позначимо $y^4+4y^3+y^2+6y+36=F(y.)$

Випробовуємо від'ємні дільники 36:

$F(-1)=(-1)^4+4\cdot(-1)^3+(-1)^2+6\cdot(-1)+36\neq 0,$ це означає, що *y*= *–1* –не корінь рівняння.

$F(-2)=(-2)^4+4\cdot(-2)^3+(-2)^2+6\cdot(-2)+36=16-32+4-12+36\neq 0,$ це означає, що *y*= *–2* –не корінь рівняння.

$F(-3)=(-3)^4+4\cdot(-3)^3+(-3)^2+6\cdot(-3)+36=81-108+9-18+36=126-126=0,$ це означає, що *y*= *–3* –є корінь рівняння.

$$
\begin{array}{l|l}
y^4+4y^3+y^2+6y+36 & y+3 \\ \cline{2-2}
-\,\underline{y^4+3y^3} & y^3+y^2-2y+12 \\
\qquad -\,y^3+y^2 & \\
\qquad\quad\ \underline{y^3+3y^2} & \\
\qquad\qquad -\,-2y^2+6y & \\
\qquad\qquad\quad\ \underline{-2y^2-6y} & \\
\qquad\qquad\qquad -\,12y+36 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad\ \underline{12y+36} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0. &
\end{array}
$$

Повертаючись до заміни y=2*x*, знаходимо $x=\dfrac{y}{2};\quad x=-\dfrac{3}{2}=-1{,}5-$ корінь рівняння. Рівняння $y^3+y^2-2y+12=0$ цілих коренів немає, бо жоден з дільників числа 12 не перетворює його в правильну числову рівність.

Відповідь: –1,5.

Розв'язати рівняння $4x^3+5x-3=0$;

Розв'язання:

$4x^3+5x-3=0 \,|\times 2$

$8x^3+10x-6=0$;

$25x^3+x-26=0 \,|\cdot 5$

$125x^3+5x-130=0$

$(5x)^3+5x-130=0$

Заміна $5x=y$.

$y^3+y-130=0$

$y=5-$ корінь рівняння, бо

$5^3+5-130=0$.

$2^3x^3+5\cdot 2x-6=0$;

$(2x)^3+5\cdot 2x-6=0$; Заміна $2x=y$;

$y^3+5y-6=0$;

Дільники вільного члена:

± 1; ± 2; ± 3; ± 6. Безпосереднім випробовуванням переконуємось, що $y=1-$ корінь цього рівняння, бо $1^3+5\cdot 1-6=0$. Тоді:

$$\begin{array}{rl|l} & y^3+5y-6 & y-1 \\ \cline{3-3} - & y^3-y^2 & y^2+y+6 \\ \cline{2-2} & y^2+5y & \\ - & y^2-y & \\ \cline{2-2} & 6y-6 & \\ - & 6y-6 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

$y^2+y+6=0-$ дійсних коренів не має, бо $D=1-24=-23<0$.

Отже $2x=1$; $x=0{,}5$.

Відповідь: 0,5.

$$\begin{array}{rl|l} & y^3+y-130 & y-5 \\ \cline{3-3} - & y^3-5y^2 & y^2+5y+26 \\ \cline{2-2} - & 5y^2+y & \\ & 5y^2-25y & \\ \cline{2-2} - & 26y-130 & \\ & 26y-130 & \\ \cline{2-2} & 0. & \end{array}$$

Рівняння $y^2+5y+26=0-$ дійсних коренів не має, бо $D=25-104<0$.

Отже, $5x=5$, $x=1$.

Відповідь: 1

З множини раціональних рівнянь доцільно виділити симетричні рівняння, тобто такого вигляду $a_0\cdot x^n+a_1\cdot x^{n-1}+a_2\cdot x^{n-2}+...+a_2x^2+a_1x+a_0=0.$ При розв'язуванні симетричних рівнянь слід дотримуватись такої послідовності:

1). Якщо показник степеня рівняння парний, тобто, $n=2k$, то при діленні на x^k, тобто на x в степені вдвічі меншому від показника рівняння, одержимо рівняння рівносильне даному, яке в дальнішому розв'язується методом підстановки.

2) якщо показник степеня рівняння не парний, тобто $n=2k+1$ спочатку потрібно безпосереднім випробуванням знайти хоча б один корінь x_1. Потім розв'язувати це рівняння як розв'язували попередні.

$12x^5+8x^4-45x^3-45x^2+8x+12=0.$

Розв’язання:

Це симетричне рівняння з непарним показником степеня, безпосереднім випробовуванням приходимо до висновку, що $x=-1$ – один з коренів цього рівняння, бо $12\cdot(-1)^5+8\cdot(-1)^4-45\cdot(-1)^3-45\cdot(-1)^2+8\cdot(-1)+12=0.$

$$\begin{array}{r|l} 12x^5+8x^4-45x^3-45x^2+8x+12 & x+1 \\ \hline -\ 12x^5+12x^4 & 12x^4-4x^3-41x^2-4x+12 \\ -\ -4x^4-45x^3 & \\ -4x^4-4x^3 & \\ -\ -41x^3-45x^2 & \\ -41^3-41x^2 & \\ -\ -4x^2+8x & \\ -4x^2-4x & \\ -\ 12x+12 & \\ 12x+12 & \\ 0. & \end{array}$$

$12x^4-4x^3-41x^2-4x+12=0 \,|: x^2;$

$12x^2-4x-41-\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}=0;$

$\left(12x^2+\frac{12}{x^2}\right)+\left(-4x-\frac{4}{x}\right)-41=0;$

$12\cdot\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)-41=0;$

Позначимо $x+\frac{1}{x}=t.$ Піднесемо обидві частини цієї рівності до квадрата:

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=t^2;$ $\quad x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=t^2;$ $\quad x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2,$ тоді рівняння матиме вигляд: $12\cdot(t^2-2)-4t-41=0;$ $\quad 12t^2-24-4t-41=0;$ $\quad 12t^2-4t-65=0;$

$D=4^2-12\cdot4\cdot(-65)=16+3120=3136=56^2;$ $\quad t_1=\frac{4-56}{24}=-\frac{52}{24}=\frac{13}{6};$ $\quad t_2=\frac{4+56}{24}=\frac{5}{2}.$

Розв’яжемо таку сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=-\frac{13}{6}, \\ x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+\frac{13}{6}x+1=0 \,|\times 6, \\ x\neq 0. \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-\frac{5}{2}x+1=0, \,|\times 2, \\ x\neq 0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6x^2+13x+6=0, \\ x\neq 0. \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2-15x+2=0, \\ x\neq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв’яжемо кожне рівняння сукупності.

$D=13^2-4\cdot6\cdot6=169-144=25=5^2;$ $\qquad D=5^2-4\cdot2\cdot2=25-16=9=3^2;$

$x_1=\frac{-13-5}{12}=-\frac{18}{12}=-\frac{3}{2};$ $\qquad x_3=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2};$

$x_2=\frac{-13+5}{12}=-\frac{8}{12}=-\frac{2}{3};$ $\qquad x_4=\frac{5+3}{4}=2;$ $\qquad x_5=-1.$

Відповідь: $-\frac{3}{2};\quad -\frac{2}{3};\quad \frac{1}{2};\quad 2;\quad -1.$

Завдання для самостійної роботи:

Розв'язати рівняння:

5.1. $3x+12=0$; Відповідь: -4.

5.2. $\frac{1}{2}x-5=0$; Відповідь: 10.

5.3. $2x+6-5x=7+4\cdot(2-3x)$; Відповідь: 1.

5.4. $\frac{3x-2}{2}-\frac{8-x}{3}=\frac{2\cdot(1{,}25x+5)}{5}-2x+1$; Відповідь: 2.

5.5. $6x^2=0$; Відповідь: 0.

5.6. $9x^2=81$; Відповідь: -3; 3.

5.7. $\frac{x^2}{27}=3$; Відповідь: -9; 9.

5.8. $x^2-36=0$; Відповідь: -6; 6.

5.9. $5-5x^2=0$; Відповідь: -1; 1.

5.10. $2x^2+32=0$; Відповідь: $\varnothing$.

5.11. $x^2-9x=0$; Відповідь: 0; 9.

5.12. $2x^2+7x=0$; Відповідь: 0; $-3{,}5$.

5.13. $x^2+8x+16=0$; Відповідь: -4.

5.14. $7x-12-x^2=0$; Відповідь: 3; 4.

5.15. $3x^2-4x-4=0$; Відповідь: $-\frac{2}{3}$; 2.

5.16. $6x^3+7x^2-x-2=0$; Відповідь: -1; $-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$.

5.17. $3x^4-2x^3+2x^2-2x-1=0$; Відповідь: $-\frac{1}{3}$; 1.

5.18. $2x^4+10x^3 10x^2+6x+36=0$; Відповідь: -3.

5.19. $3x^4-12{,}5x^3-13{,}5x^2+4{,}5x+2{,}5=0$; Відповідь: -1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; 5.

5.20. $x^5-4x^4-11x^3-24=6x^2+4x$; Відповідь: -2; 1; 6.

5.21. $6x^2+4x-1=22x^3+17x^4-6x^5$; Відповідь: -1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $2+\sqrt{3}$; $2-\sqrt{3}$.

5.22. $4x^4-16x^3 3x^2+4x-1=0$; Відповідь: $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $2+\sqrt{3}$; $2-\sqrt{3}$.

5.23. $6-35x+62x^2=35x^3-6x^4$; Відповідь: -2; $\frac{1}{2}$; 3; $\frac{1}{3}$.

5.24. $2-x^2+9x=-2x^4-9x^3$; Відповідь: $\frac{-5-\sqrt{21}}{2}$; $\frac{-5+\sqrt{21}}{2}$.

Є багато рівнянь для яких найраціональнішим способом розв'язання є введення нової змінної. При цьому потрібно якомога більше членів включати в підстановку.

$(2x^2+x+3)^2+2\cdot(2x^2+x-2)-14=0.$

Розв'язання:

Підстановка $2x^2+x+3=t,$ тоді $2x^2+x=t-3.$ Дане рівняння матиме вигляд:

$t^2+2\cdot(t-3-2)-14=0; \qquad t^2+2\cdot(t-5)-14=0; \qquad t^2+2t-10-14=0; \qquad t^2+2t-24=0.$

По теоремі Вієта: $t_1=-6; \quad t_2=4.$ Розв'яжемо таку сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}2x^2+x+3=-6,\\ 2x^2+x+3=4,\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}2x^2+x+9=0,\\ 2x^2+x-1=0,\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}D=1-72<0, \quad x\in\varnothing,\\ D=1+8=9>0, \quad x_1=\dfrac{-1-3}{4}=-1,\\ x_2=\dfrac{-1+3}{4}=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $-1; \quad \dfrac{1}{2}.$

Розв'язати рівняння: $(2x-1)\cdot(2x+3)\cdot(x+2)\cdot(x+4)=-9$.

Розв'язання:

Перемножимо перший і четвертий та другий і третій співмножники:

$\left(2x^2+8x-x-4\right)\cdot\left(2x^2+4x+3x+6\right)=-9; \qquad \left(2x^2+7x-4\right)\cdot\left(2x^2+7x+6\right)+9=0;$

$2x^2+7x+6=t; \qquad 2x^2+7x=t-6. \qquad (t-6-4)\cdot t+9=0; \qquad (10-t)\cdot t+9=0;$

$t^2-10t+9=0; \qquad t_1=1; \qquad t_2=9.$

$$\left[\begin{array}{l}2x^2+7x+6=1,\\ 2x^2+7x+6=9.\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}2x^2+7x+5=0,\\ 2x^2+7x-3=0.\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}D=49-40=9, \quad x_1=\dfrac{-7-3}{4}=-2{,}5; \quad x_2=\dfrac{-7+3}{4}=-\\ D=49+24=73, \quad x_3=\dfrac{-7+\sqrt{73}}{4}; \quad x_4=\dfrac{-7-\sqrt{73}}{4}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $-2{,}5; \quad -1; \quad \dfrac{-7-\sqrt{73}}{4}; \quad \dfrac{-7+\sqrt{73}}{4}.$

Розв'яжемо складніше рівняння: $\left(x^2+3x-1\right)^2+3x^2\cdot\left(x^2+3x-1\right)=4x^4.$

Розв'язання:

Безпосередня підстановка показує, що $x=0$ – не є коренем цього рівняння, а тому $x^4\neq 0,$ розділимо обидві частини рівняння на

$x^4: \qquad \dfrac{\left(x^2+3x-1\right)^2}{x^4}+3x^2\cdot\dfrac{x^2+3x-1}{x^4}=\dfrac{4x^4}{x^4}; \qquad \left(\dfrac{x^2+3x-1}{x^2}\right)^2+3\cdot\dfrac{x^2+3x-1}{x^2}-4=0.$

Підстановка $\dfrac{x^2+3x-1}{x^2}=t,$ тоді рівняння набуває вигляду: $t^2+3t-4=0,$

$t_1=-4; \quad t_2=1.$ Тоді розв'яжемо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2+3x-1}{x^2}=-4,\\ \dfrac{x^2+3x-1}{x^2}=1.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2+3x-1}{x^2}+4=0\Big|\times x^2,\\ \dfrac{x^2+3x-1}{x^2}-1=0\Big|\times x^2.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x^2+3x-1+4x^2=0,\\ x^2+3x-1-x^2=0.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}5x^2+3x-1=0, \quad \left[\begin{array}{l}D=9+20=29,\\ x_1=\dfrac{-3-\sqrt{29}}{10}, \quad x_2=\dfrac{-3+\sqrt{29}}{10}.\end{array}\right.\\ 3x-1=0. \quad x_3=\dfrac{1}{3}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{29}}{10}, \quad x_2=\dfrac{-3+\sqrt{29}}{10}, \quad x_3=\dfrac{1}{3}.$

В рівняннях вищих степенів вигляду $x^4+(x+8)^4=100$ заміна робиться дещо незвична.

Розв'язання:

$(x+0)^4+(x+8)^4=100.$ Шукаємо середнє арифметичне чисел 0 і 8: $\frac{0+8}{2}=4$. Заміна $x=t-4.$ Тоді рівняння зводиться до вигляду:

$(t-4)^4+(t-4+8)^4=100;\quad (t-4)^4+(t+4)^4=100;\quad \left((t-4)^2\right)^2+\left((t+4)^2\right)^2=100;$

$\left(t^2-8t+16\right)^2+\left(t^2+8t+16\right)^2=100;$

$t^4+64t^2+256-16t^3+32t^2-256t+t^4+64t^2+256+16t^3+32t^2+256t=100;$

$2t^4+192t^2+512-100=0|:2;\qquad t^4+96t^2+206=0.$

Вводимо нову змінну $t^2=z,$ тоді $z^2+96z+206=0;\quad D=96^2-4\cdot 206=9216-824=8392;$

$Z=\frac{-96-\sqrt{8392}}{2}=-48-\sqrt{2098};\qquad Z_2=-48+\sqrt{2098}.$

Розв'яжемо сукупність рівнянь: $\left[\begin{array}{l} t^2=-48-\sqrt{2098}, \\ t^2=-48+\sqrt{2098} \end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l} t\in\varnothing,\ \text{в множині R}, \\ |48|>\sqrt{2098},\ \text{а тому } t\in\varnothing. \end{array}\right.$

Відповідь: рівняння дійсних коренів не має.

Розв'язування рівнянь типу: $x^4+4x-1=0$ зводиться до додавання та віднімання таких виразів, які дадуть можливість виділити квадрати двочленів з наступним застосуванням формули різниці квадратів.

Розв'язання:

$x^4+2x^2+1-2x^2+4x-1-1=0;\quad \left(x^4+2x^2+1\right)-2\cdot\left(x^2-2x+1\right)=0;\quad \left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot(x-1)^2=0;$

$\left(x^2+1-\sqrt{2}\cdot(x-1)\right)\cdot\left(x^2+1+\sqrt{2}\cdot(x-1)\right)=0.$

$\left[\begin{array}{l} x^2+1-\sqrt{2}x+\sqrt{2}=0, \\ x^2+1+\sqrt{2}x-\sqrt{2}=0 \end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l} x^2-\sqrt{2}x+\sqrt{2}+1=0,\quad D=2-4\sqrt{2}-4<0,\ x\in\varnothing; \\ x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}=0,\quad D=2+4\sqrt{2}-4=4\sqrt{2}-2>0. \end{array}\right.$

$x_1=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2};\quad x_2=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}.$

Відповідь: $\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2},\quad \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}.$

Завдання для самостійної роботи:

Розв'язати рівняння:

5.25. $x^3+9x^2+11x+9=30.$ Відповідь: $-7;\ -3;\ 1.$

5.26. $x^4-x^3-2\cdot\left(3x^2-2x-4\right)=0.$ Відповідь: $-2;\ -1;\ 2;\ 1.$

5.27. $3\cdot\left(3x^3-5x^2-4\right)=32x.$ Відповідь: $-\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ 3.$

5.28. $9x^2+5x=-4\cdot\left(x^4+2x^3+0{,}25\right).$ Відповідь: $-\frac{1}{2}.$

5.29. $(x+4)\cdot(x+7)\cdot(x+1)\cdot(x-2)=19.$

Відповідь: $\frac{-5-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-5+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-5-\sqrt{85}}{2}$; $\frac{-5+\sqrt{85}}{2}$.

5.30. $\left(x^2+x+4\right)^2+8x\cdot\left(x^2+x+4\right)=-15x^2$. Відповідь: -2; $-3-\sqrt{5}$; $-3+\sqrt{5}$.

5.31. $27x^3+8=(2x+3)^3+(x-1)^3$. Відповідь: 3; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{3}$.

5.32. $x^4+4x=1$. Відповідь: $\frac{1}{2}\cdot\left(-\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}\right)$; $\frac{1}{2}\cdot\left(-\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}\right)$.

5.33. $(x+3)^4+(x+5)^4=16$. Відповідь: -3; -5.

5.34. $(x-2)^6-(x-4)^6=64$. Відповідь: 2; 4; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $2-\sqrt{3}$; $2+\sqrt{3}$.

5.35. $4x^4-16x^3+3x^2+4x-1=0$. $x^2+\frac{81x^2}{(9+x)^2}=40$. Відповідь: $\frac{2-\sqrt{19}}{2}$; $\frac{2+\sqrt{19}}{2}$.

5.35. $(x-1)^5+(x-3)^5=242\cdot(x+1)$. Відповідь: -2; -1; 0.

Рівняння вигляду $\frac{P_1(x)}{G_1(x)}+\frac{P_2(x)}{G_2(x)}+\ldots+\frac{P_m(x)}{G_m(x)}=0$, де $P_1(x), P_2(x),\ldots P_m(x), G_1(x), G_2(x),\ldots G_m(x)$ – цілі раціональні функції, то називається раціональним рівнянням.

Класична схема розв'язування раціональних рівнянь має такий вигляд:

1) праву частину рівняння перетворюють в нуль;
2) в лівій частині зводять усі дроби до спільного знаменника;
3) після зведення подібних доданків використовують умову рівності дробу нулю, тобто утворюють систему з рівняння і нерівності;
4) перевіряють, чи знайдені корені утвореного рівняння, задовольняють нерівність системи.

Наприклад $\frac{x-1}{x+2}+\frac{2x+8}{4-x^2}=-\frac{x+1}{2-x}$.

Розв'язання:

$$\frac{x-1}{x+2}+\frac{x+1}{2-x}+\frac{2x+8}{4-x^2}=0;\quad \frac{2x-x^2-2+x+2x+x^2+2+x+2x+8}{(2-x)\cdot(2+x)}=0;\quad \frac{8x+8}{(2-x)\cdot(2+x)}=0;$$

$$-\begin{cases}8x+8=0,\\(2-x)\cdot(2+x)\neq 0,\end{cases}\quad \begin{cases}8x=-8x,\\x\in(-\infty;\,-2)\cup(-2;\,2)\cup(2;\,+\infty),\end{cases}\quad x=-1,\ -1\in(-2;\,2).$$

Відповідь: -1.

На наш погляд, швидше до мети приводить такий спосіб розв'язування раціональних рівнянь :

1) встановлюють О.Д.З. рівняння;

2) обидві частини рівняння множать на спільний знаменник знаменників дробів рівняння;

3) розв'язують ціле раціональне рівняння;

4)перевіряють належність знайдених коренів О.Д.З.

Розв'язати рівняння: $\frac{2}{x^2+5x}+\frac{3}{2x-10}=\frac{15}{x^2-25}$.

Розв'язання:

Знаходимо О.Д.З. рівняння:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+5x\neq 0, \\ 2x-10\neq 0, \\ x^2-25\neq 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x(x+5)\neq 0, \\ 2x\neq 10, \\ (x-5)\cdot(x+5)\neq 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x\neq 0, \\ x\neq -5, \\ x\neq 5, \\ x\neq 5, \\ x\neq -5 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x\neq 0, \\ x\neq -5, \\ x\neq 5. \end{array}\right.$$

О.Д.З. $(-\infty;\ -5)\cup(-5;\ 0)\cup(0;\ 5)\cup(5;\ +\infty)$.

Спільний знаменник дробів $2\cdot x\cdot(x+5)\cdot(x-5)$.

Домножимо обидві частини рівняння на спільний знаменник:

$$\frac{2}{x(x+5)}+\frac{3}{2(x-5)}=\frac{15}{(x-5)(x+5)}\Big|\cdot 2x(x+5)(x-5), \quad 4\cdot(x-5)+3x(x+5)=15\cdot 2x;$$

$$4x-20+3x^2+15x=30x; \quad 3x^2-11x-20=0; \quad D=121+240=361=19^2;$$

$x_1=\frac{11-19}{6}=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$; $\quad x_2=\frac{11+19}{6}=5$; $\ 5\notin О.Д.З.\ \ -\frac{4}{3}\in О.Д.З.$ Відповідь: $-\frac{4}{3}$.

Перейти до цілого раціонального рівняння дає можливість і такий спосіб:

1) знайти О.Д.З. рівняння;
2) складнішу частину рівняння звести до спільного знаменника;
3) використовуючи основну властивість пропорції, отримаємо ціле раціональне рівняння.

Розв'язати рівняння $\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{4}$.

Розв'язання:

Зводимо ліву частину рівняння до спільного знаменника знаходимо О.Д.З.

$$\frac{1\cdot(x-2)-1\cdot(x-4)}{(x-2)\cdot(x-4)}=\frac{1}{4}, \quad \left[\begin{array}{l} x-4\neq 0, \\ x-2\neq 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x\neq 4, \\ x\neq 2 \end{array}\right.$$

О.Д.З.: $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ 4)\cup(4;\ +\infty)$. $\quad \frac{x-2-x+4}{(x-4)\cdot(x-2)}=\frac{1}{4}$; $\quad \frac{2}{(x-4)\cdot(x-2)}=\frac{1}{4}$.

За основною властивістю пропорції маємо $(x-4)\cdot(x-2)\cdot 1=2\cdot 4$,

$x^2-2x-4x+8-8=0, \quad x^2-6x=0, \quad x_1=0, \quad x_2=6.$ Числа 0 і 6 належать О.Д.З.

Відповідь: 0; 6.

Існують такі раціональні рівняння, для розв'язування яких необхідно застосовувати не зовсім традиційні способи:

$$20\cdot\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\cdot\frac{x^2-4}{x^2-1}=0.$$

Розв'язання:

О.Д.З.: $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$, $\quad 20\cdot\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\cdot\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(x-1)}=0$

$$20\cdot\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2+48\cdot\frac{x-2}{x+1}\cdot\frac{x+2}{x-1}-5\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2=0.$$

Утворилося квадратне рівняння відносно $\frac{x-2}{x+1}$. Позначимо $\frac{x-2}{x+1}=y,$ тоді матимемо таке квадратне рівняння: $20y^2+48\cdot\frac{x+2}{x-1}\cdot y-5\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2=0;$

$$D=\left(48\cdot\frac{x+2}{x-1}\right)^2-4\cdot20\cdot(-5)\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2=2304\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+400\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2=2704\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2=52^2\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2=\left(52\cdot\frac{x+2}{x-1}\right)^2;$$

$$Y_1=\frac{-48\cdot\frac{x+2}{x-1}-52\cdot\frac{x+2}{x-1}}{2\cdot20}=\frac{-24\cdot\frac{x+2}{x-1}-26\cdot\frac{x+2}{x-1}}{20};\quad Y_2=\frac{-24\cdot\frac{x+2}{x-1}+26\cdot\frac{x+2}{x-1}}{20}.$$

Повертаємось до підстановки:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{x-2}{x+1}=\frac{-24\cdot\frac{x+2}{x-1}-26\cdot\frac{x+2}{x-1}}{20};\\ \frac{x-2}{x+1}=\frac{-24\cdot\frac{x+2}{x-1}+26\cdot\frac{x+2}{x-1}}{20}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\frac{x-2}{x+1}=\frac{-50}{20}\cdot\frac{x+2}{x-1};\\ \frac{x-2}{x+1}=\frac{2}{20}\cdot\frac{x+2}{x-1}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\frac{x-2}{x+1}=\frac{-5}{2}\cdot\frac{x+2}{x-1};\\ \frac{x-2}{x+1}=\frac{1}{10}\cdot\frac{x+2}{x-1}.\end{array}\right.$$

Використаємо основну властивість пропорції

$$\left[\begin{array}{l}2\cdot(x-2)\cdot(x-1)=-5\cdot(x+1)\cdot(x+2);\\ 10\cdot(x-2)\cdot(x-1)=(x+1)\cdot(x+2)\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}2\cdot\left(x^2-x-2x+2\right)=-5\cdot\left(x^2+2x+x+2\right);\\ 10\cdot(x-2)\cdot(x-1)=x^2+2x+x+2.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}2x^2-6x+4=-5x^2-15x-10;\\ 10x^2-30x+20=x^2+3x+2\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}7x^2+9x+14=0;\\ 9x^2-33x+18=0\,|:3.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}7x^2+9x+14=0;\\ 3x^2-11x+6=0\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}D=81-4\cdot7\cdot14<0,\ x\in\varnothing;\\ D=121-4\cdot3\cdot6=49,\ \ x_1=\frac{11-7}{6}=\frac{2}{3};\quad x_2=\frac{11+7}{6}=3.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{2}{3}$; 3.

Неменший інтерес являє собою розв’язування такого рівняння:
$x^3+x^{-3}+x^2+x+x^{-2}+x^{-1}=0.$

Розв’язання:

Позбудемось від’ємних показників степенів: $x^3+\frac{1}{x^3}+x^2+x+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=0;$

О.Д.З.: $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. виконаємо групування членів рівняння

$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0;$ Заміна $x+\frac{1}{x}=y.$ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2;$

$x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=y^2;\quad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.\quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot\frac{1}{x}+3\cdot x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{x^3}=y^3;$

$x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3x-3\cdot\frac{1}{x}=y^3-3\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)=y^3-3y.$ Утворилося рівняння третього степеня: $y^3-3y+y^2-2+y=0;$ $\left(y^3+y^2\right)-(2y+2)=0;$ $y^2\cdot(y+1)-2\cdot(y+1)=0;$ $(y+1)\cdot\left(y^2-2\right)=0;$ Це рівняння рівносильне такій сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} y+1=0, \\ y^2-2=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y=-1, \\ \left(y-\sqrt{2}\right)\cdot\left(y+\sqrt{2}\right)=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y=-1, \\ y=-\sqrt{2}, \\ y=\sqrt{2} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y=-1, \\ y=-\sqrt{2}, \\ y=\sqrt{2} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=-1 \Big| \cdot x, \\ x+\frac{1}{x}=-\sqrt{2} \Big| \cdot x, \\ x+\frac{1}{x}=\sqrt{2} \Big| \cdot x. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x+1=0, \quad D=1-4<0, \ x\in\varnothing; \\ x^2+\sqrt{2x}+1=0, \quad D=2-4<0, \ x\in\varnothing; \\ x^2-\sqrt{2x}+1=0, \quad D=2-4<0, \ x\in\varnothing. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\varnothing$.

Дещо специфічно розв'язується наступна вправа.
При яких значеннях A, B і C правильна рівність

$$\frac{x^2+5}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}?$$

Розв'язання:

Зведемо праву частину рівності до спільного знаменника і перетворимо її:

$$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{A\cdot(x-1)^2+B\cdot(x+2)+C\cdot(x+2)\cdot(x-1)}{(x+2)\cdot(x-1)^2}=$$

$$=\frac{A\cdot\left(x^2-2x+1\right)+B\cdot(x+1)+C\cdot\left(x^2+2x-x-2\right)}{(x+2)\cdot(x-1)^2}=\frac{Ax^2-2Ax+A+Bx+2B+Cx^2+Cx-2C}{(x+2)\cdot(x-1)^2}=$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(B-2A+C)x+A+2B-2C}{(x+2)\cdot(x-1)^2}=\frac{(A+C)x^2+(B-2A+C)x+A+2B-2C}{(x+2)\cdot\left(x^2-2x+1\right)}=$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(B-2A+C)x+A+2B-2C}{x^3+2x^2+x+2x^2-4x+2}=\frac{(A+C)x^2+(B-2A+C)x+A+2B-2C}{x^3-3x+2}.$$

Поміняємо місцями ліву і праву частину цієї рівності:

$$\frac{(A+C)x^2+(B-2A+C)x+A+2B-2C}{x^3-3x+2}=\frac{x^2+5}{x^3-3x+2}.$$

Оскільки ці дроби рівні, рівні їхні знаменники, то рівні і чисельники.
Коефіцієнти при рівних степенях змінних теж рівні, тобто:

$$\begin{cases} A+C=1, \\ B-2A+C=0, \\ A+2B-2C=5. \end{cases} \quad \begin{cases} A=1-C, \\ B-2\cdot(1-C)+C=0, \\ 1-C+2B-2C=5. \end{cases} \quad \begin{cases} A=1-C, \\ B-2+2C+C=0, \\ 1-3C+2B=5. \end{cases} \quad \begin{cases} A=1-C, \ (1) \\ B+3C-2=0, \ (2) \\ 2B-3C=5. \ (3) \end{cases}$$

Додамо рівняння (2) і (3): $\begin{cases} B+3C=2 \\ 2B-3C=5-1 \end{cases}$ $\quad 2+3C=2; \quad 3C=0, \quad C=0.$

$$3B=6, \quad B=\frac{6}{3}=2. \qquad A=1-0=1, \quad A=1.$$

Відповідь: A=1, B=2, C=0.
Розумним підходом до розв'язування рівнянь типу:

$\frac{8}{x+4}-\frac{6}{x+3}-\frac{4}{x+2}=\frac{8}{x-4}-\frac{6}{x-3}-\frac{4}{x-2}$ вважаємо наступний спосіб:

Розв'язання:

Знайдемо О.Д.З. рівняння:

$$\left[\begin{array}{l} x+4\neq 0, \\ x+3\neq 0, \\ x+2\neq 0, \\ x-4\neq 0, \\ x-3\neq 0, \\ x-2\neq 0. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x\neq -4, \\ x\neq -3, \\ x\neq -2, \\ x\neq 4, \\ x\neq 3, \\ x\neq 2. \end{array}\right.$$

Зберемо всі члени рівняння в лівій його частині.

$$\frac{8}{x+4}-\frac{6}{x+3}-\frac{4}{x+2}-\frac{8}{x-4}-\frac{6}{x-3}-\frac{4}{x-2}+\frac{6}{x-3}+\frac{4}{x-2}=0.$$

Згрупуємо по два ті члени рівняння, знаменники яких є спряжені вирази:

$$\left(\frac{8}{x+4}-\frac{8}{x-4}\right)+\left(\frac{6}{x+3}-\frac{6}{x-3}\right)+\left(\frac{4}{x+2}-\frac{4}{x-2}\right)=0.$$

Кожну пару виразів у дужках зведемо до спільного знаменника:

$$\frac{8x-32-8x-32}{x^2-16}-\frac{6x-18-6x-18}{x^2-9}-\frac{4x-8-4x-8}{x^2-4}=0;$$

$$-\frac{64}{x^2-16}+\frac{36}{x^2-9}+\frac{16}{x^2-4}=0\Big|:(-4); \qquad \frac{16}{x^2-16}-\frac{9}{x^2-9}-\frac{4}{x^2-4}=0;$$

Введемо нову змінну: $x^2=y.$ Тоді $\frac{16}{y-16}-\frac{9}{y-9}-\frac{4}{y-4}=0;$

Використаємо умову рівності дробу нулю:

$$\begin{cases} 16\cdot(y-9)\cdot(y-4)-9\cdot(y-16)\cdot(y-4)-4\cdot(y-16)\cdot(y-9)=0, \\ (y-16)\cdot(y-9)\cdot(y-4)\neq 0. \end{cases}$$

$$16\cdot\left(y^2-4y-9y+36\right)-9\cdot\left(y^2-4y-16y+64\right)-4\cdot\left(y^2-9y-16y+144\right)=0;$$

$$16y^2-208y+576y-9y^2+180y-576-4y^2+100y-576y=0;$$

$$y^2+24y-192=0; \quad D=576+768=1344=4\cdot 336=16\cdot 84=64\cdot 21;$$

$$y_1=\frac{-2-8\sqrt{21}}{2}=-12-4\sqrt{21}<0, \quad y_2=-12+4\sqrt{21}>0,$$

Повертаємось до підстановки: $x^2=-12-4\sqrt{21}$ $\quad x\in\varnothing;$ $\qquad x^2=-12+4\sqrt{21};$

$$x_1=\sqrt{4\cdot\sqrt{21}-12}=2\sqrt{\sqrt{21}-3}; \qquad x_2=-2\sqrt{\sqrt{21}-3};$$

Відповідь: $x_1=\sqrt{4\cdot\sqrt{21}-12}=2\sqrt{\sqrt{21}-3};$ $\qquad x_2=-2\sqrt{\sqrt{21}-3}.$

Трішки не так розпочинається розв'язування дуже схожого з попереднім рівняння. $\quad \frac{4x-17}{x-4}+\frac{10x-13}{2x-3}-\frac{8x-30}{2x-7}-\frac{5x-4}{x-1}=0.$

Розв'язання:

О.Д.З.: $\left[\begin{array}{l} x\neq 4, \\ x\neq 1{,}5, \\ x\neq 3{,}5, \\ x\neq 1. \end{array}\right.$ Виконаємо такі перетворення:

$$\frac{4x-16-1}{x-4}+\frac{10x-15+2}{2x-3}-\frac{8x-28-2}{2x-7}-\frac{5x-5+1}{x-1}=0,$$

$$\frac{(4x-16)-1}{x-4}+\frac{(10x-15)+2}{2x-3}-\frac{(8x-28)-2}{2x-7}-\frac{(5x-5)+1}{x-1}=0,$$

$$\frac{4\cdot(x-4)}{x-4}-\frac{1}{x-4}+\frac{5\cdot(2x-3)}{2x-3}+\frac{2}{2x-3}-\frac{4\cdot(2x-7)}{2x-7}+\frac{2}{2x-7}-\frac{5\cdot(x-1)}{x-1}-\frac{1}{x-1}=0,$$

Після скорочення одержимо: $4-\frac{1}{x-4}+5+\frac{2}{2x-3}-4+\frac{2}{2x-7}-5-\frac{1}{x-1}=0,$

$$\frac{2}{2x-3}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{2x-7}, \qquad \frac{2\cdot(x-4)-1\cdot(2x-3)}{(2x-3)\cdot(x-4)}=\frac{(2x-7)\cdot 1-2\cdot(x-1)}{(2x-7)\cdot(x-1)},$$

$$\frac{2x-8-2x+3}{(2x-3)\cdot(x-4)}=\frac{2x-7-2x+2}{(2x-7)\cdot(x-1)}, \qquad \frac{-5}{(2x-3)\cdot(x-4)}=\frac{-5}{(2x-7)\cdot(x-1)}\Big|:(-5),$$

$\frac{1}{(2x-3)\cdot(x-4)}=\frac{1}{(2x-7)\cdot(x-1)}$. За основною властивістю пропорції маємо:

$$(2x-7)\cdot(x-1)=(2x-3)\cdot(x-4), \qquad 2x^2-2x-7x+7=2x^2-8x-3x+12,$$

$-9x-11x=12-7, \quad -2x=5, \quad x=-2{,}5.$ Відповідь: $-2{,}5.$

Розв'язати рівняння: $\frac{24x}{x^3+2x^2-8x}-\frac{15x}{x^3+2x^2-3x}=2.$

Розв'язання:

З аналізу конструкції рівняння видно, що $x\neq 0,$ а тому можна чисельник і знаменник кожного з дробів розділити на x, тобто:

$\dfrac{\frac{24x}{x}}{\frac{x^3+2x^2-8x}{x}}-\dfrac{\frac{15x}{x}}{\frac{x^3+2x^2-3x}{x}}=2, \quad \frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2.$ Вводимо нову змінну:

$x^2+2x-8=y; \quad x^2+2x-8+5=y+5; \quad x^2+2x-3=y+5;$ Тоді рівняння набуває вигляду: $\frac{24}{y}-\frac{15}{y+5}=2; \quad \left[\begin{array}{l} y\neq 0, \\ y+5\neq 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y\neq 0, \\ y\neq -5. \end{array}\right. \quad \frac{24\cdot(y+5)-15y}{y\cdot(y+5)}=2.$

$$24\cdot(y+5)-15y=2y\cdot(y+5); \qquad 24y+120-15y=2y^2+10y; \qquad 2y^2+y-120=0;$$

$$D=1+960=961=31^2; \qquad y_1=\frac{-1-31}{4}=\frac{-32}{4}=-8; \qquad y_2=\frac{-1+31}{4}=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}.$$

Повертаючись до заміни дістанемо: $\left[\begin{array}{l} x^2+2x-8=-8, \\ x^2+2x-8=\frac{15}{2} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2+2x=0, \\ 2x^2+4x-16=15. \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x\cdot(x+2)=0, \\ 2x^2+4x-31=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x+2=0, \\ D=16+248=264 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-2, \\ x=\frac{-4-\sqrt{264}}{4}, \\ x=\frac{-4+\sqrt{264}}{4} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-2, \\ x=\frac{-2-\sqrt{66}}{2}, \\ x=\frac{-2+\sqrt{66}}{2}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x=0, \quad x=-2, \quad x=\frac{-2-\sqrt{66}}{2}, \quad x=\frac{-2+\sqrt{66}}{2}.$

Розв'язати рівняння : $x^2+\frac{4\cdot x^2}{(x+2)^2}=5.$

Розв'язання:

Аналіз цього рівняння показує, що О.Д.З. є $(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. В лівій частині рівняння виділимо повний квадрат двочлена:

$$x^2 - 2x\cdot\frac{2x}{x+2} + \frac{4x^2}{(x+2)^2} + 2\cdot x\cdot\frac{2x}{x+2} = 5, \qquad \left(x - \frac{2x}{x+2}\right)^2 + \frac{4x^2}{x+2} = 5,$$

$$\left(\frac{x^2+2x-2x}{x+2}\right)^2 + \frac{4x^2}{x+2} = 5, \qquad \left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2 + \frac{4x^2}{x+2} - 5 = 0.$$ Підстановка: $\frac{x^2}{x+2} = y.$

Маємо рівняння: $y^2 + 4y - 5 = 0,$ за теоремою Вієта: $y_1 = -5, \quad y_2 = 1.$

Повертаючись до підстановки маємо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{x+2} = -5, \\ \frac{x^2}{x+2} = 1. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2 + 5x + 10 = 0, \\ x^2 - x - 2 = 0, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} D = 25 - 40 < 0,\ x \in \varnothing; \\ x_1 = -1, \ \in \text{О.Д.З.} \\ x_2 = 2. \ \in \text{О.Д.З.} \end{array}\right.$$

Відповідь: −1; 2.

Розв'язати рівняння: $x^2 + \frac{4}{x^2} + 6\cdot\left(x + \frac{2}{x}\right) = 23.$

Розв'язання:

О.Д.З.: $x \neq 0.$ Виділимо квадрат двочлена: $x^2 + 2x\cdot\frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - 2x\cdot\frac{2}{x} + 6\cdot\left(x + \frac{2}{x}\right) = 23;$

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 + 6\cdot\left(x + \frac{2}{x}\right) - 4 - 23 = 0; \qquad \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 + 6\cdot\left(x + \frac{2}{x}\right) - 27 = 0.$$

Підстановка: $x + \frac{2}{x} = y.$ Утворене квадратне рівняння: $y^2 + 6y - 27 = 0,$ розв'яжемо за теоремою Вієта. $y_1 = -9, \quad y_2 = 3.$

$$\left[\begin{array}{l} x + \frac{2}{x} = -9, \\ x + \frac{2}{x} = 3. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2 + 9x + 2 = 0, \quad D = 81 - 8 = 73. \\ x^2 - 3x + 2 = 0. \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = 2. \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad x_3 = \frac{-9-\sqrt{73}}{2}; \quad x_4 = \frac{-9+\sqrt{73}}{2}.$$

Відповідь: $x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = \frac{-9-\sqrt{73}}{2}; \quad x_4 = \frac{-9+\sqrt{73}}{2}.$

Розв'язати рівняння: $x^4 = \frac{11x-6}{6x-11}.$

Розв'язання:

О.Д.З.: $x \neq \frac{11}{6}.$ $\quad x^4\cdot(6x-11) = 11x - 6; \quad 6x^5 - 11x^4 - 11x + 6 = 0;$

Випробуванням встановимо, що −1 корінь цього рівняння.

$$\begin{array}{l|l} 6x^5 - 11x^4 - 11x + 6 & x + 1 \\ \hline -\ 6x^5 + 6x^4 & 6x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 6 \\ \quad -\ \ -17x^4 - 11x & \\ \quad\quad\ \ -17x^4 - 17x^3 & \\ \quad\quad -\ 17x^3 - 11x^2 & \\ \quad\quad\quad 17x^3 + 17x^2 & \\ \quad\quad\quad -\ -17x^2 - 11x & \\ \quad\quad\quad\quad -17x^2 - 17x & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{\quad} 6x+6 \\ \underline{6x+6} \\ 0. \end{array}$$

Утворилося симетричне рівняння: $6x^4-17x^3+17x^2-17x+6=0 \,|\, : x^2;$

$6x^2-17x+17-\dfrac{17}{x}+\dfrac{6}{x^2}=0;\ \left(6x^2+\dfrac{6}{x^2}\right)-\left(17x+\dfrac{17}{x}\right)+17=0;\ 6\cdot\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-17\cdot\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+17=0.$

Заміна: $x+\dfrac{1}{x}=t,\quad x^2+2x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=t^2;\quad x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2;\quad 6t^2-12-17t+17=0;$

$6t^2-17t+5=0.\ \ D=289-120=169=13^2;\quad t_1=\dfrac{17-13}{12}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3};\quad t_2=\dfrac{17+13}{12}=\dfrac{30}{12}=\dfrac{5}{2};$

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}, \\ x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 3x^2+3-x=0, \\ 2x^2+2-5x=0. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 3x^2-x+3=0, \qquad D=1-36<0,\ x\in\varnothing; \\ 2x^2-5x+2=0. \qquad D=25-16=6, \quad \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{5-3}{4}=\dfrac{1}{2}\in О.Д.З. \\ x_2=\dfrac{5+3}{4}=2\in О.Д.З. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Відповідь: $-1;\ \dfrac{1}{2};\ 2.$

Двочленні рівняння

Ціле раціональне рівняння вигляду $\mathrm{A}x^n+B=0,$ де $\mathrm{A}\neq 0$ і $\mathrm{B}\neq 0,$ називається двочленним. Для розв'язування двочленного рівняння необхідно робити таку заміну $x=t\cdot\sqrt[n]{\dfrac{B}{A}}.$

Наприклад, $3\cdot x^8+16=0,\ \ x=t\cdot\sqrt[8]{\dfrac{16}{3}}=\dfrac{t\cdot\sqrt[8]{16}}{\sqrt[8]{3}}=\dfrac{t\cdot\sqrt[8]{2^4}}{\sqrt[8]{3}}=\dfrac{t\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[8]{3}}.$ Тоді дане рівняння набуває вигляду: $3\cdot\left(\dfrac{t\sqrt{2}}{\sqrt[8]{3}}\right)^8+16=0,\quad \dfrac{3\cdot t^8\cdot 16}{3}+16=0,\quad 16t^8+16=0,\quad t^8+1=0.$

Це рівняння, а значить і вихідне, дійсних коренів не має.
Відповідь: $\varnothing$.

Тричленні рівняння

Ціле раціональне рівняння вигляду: $A\cdot x^{2\mathrm{n}}+B\cdot x^{\mathrm{n}}+C=0,$ де $A\neq 0,$ $B\neq 0,\ \ C\neq 0,$ таке рівняння називається тричленним. Шляхом введення нової змінної $x^n=t$ зводиться до квадратного. Наприклад, $x^6-35x^3+216=0,$ розв'язується так: заміна $x^3=t$ приводить до квадратного рівняння: $t^2-35t+216=0.$ За теоремою Вієта маємо: $t_1=8,\ \ t_2=27.$ Повертаючись до заміни, дістанемо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x^3=8, \\ x^3=27. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^3-8=0, \\ x^3-27=0. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^3-2^3=0, \\ x^3-3^3=27. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} (x-2)(x^2+2x+4)=0, \\ (x-3)(x^2+3x+9)=0. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x-2=0, \\ x^2+2x+4=0. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x-3=0, \\ x^2+3x+9=0. \end{array}\right.$$

$\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=3. \end{array}\right.$ Рівняння $x^2+2x+4=0$ та $x^2+3x+9=0$, дійсних коренів не мають.

Відповідь: 2 і 3.

Завдання для самостійної роботи:

Розв'язати рівняння:

5.36. $\dfrac{2x+1}{3-x}=\dfrac{4-x}{x+1}.$ Відповідь: $-11;\ 1.$

5.37. $\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2x}{x+2}=\dfrac{3x-6}{(x-1)\cdot(x+2)}.$ Відповідь: $-3.$

5.38. $\dfrac{x^2+2x+2}{x+2}-\dfrac{2x+9}{x+3}=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}-\dfrac{2x+4}{x+4}.$ Відповідь: $0;\ -2{,}5+0{,}5\sqrt{3};\ -2{,}5-0{,}5\sqrt{3}.$

5.39. $\dfrac{x-2}{x\cdot(x-1)}+\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{2}{x\cdot(x+1)}.$ Відповідь: $2.$

5.40. $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{5-x}-\dfrac{1}{5+x}.$ Відповідь: $0;\ -\sqrt{17};\ \sqrt{17}.$

5.41. $2x-\dfrac{x^2-3x+1}{x-3}=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}+\dfrac{1}{4\cdot(x-2)}.$ Відповідь: $1\dfrac{2}{3};\ 2\dfrac{1}{3}.$

5.42. $\dfrac{(x+3)\cdot(x-5)}{9\cdot(x+4)\cdot(x-6)}-\dfrac{2(x+5)\cdot(x-7)}{13\cdot(x+6)\cdot(x-8)}=\dfrac{92}{585}-\dfrac{(x+1)\cdot(x-3)}{5\cdot(x+2)\cdot(x-4)}.$ Відповідь: $0;\ -2{,}5+0{,}5\sqrt{3}.$

5.43. $\dfrac{(x^2-x+1)^2}{(x-1)^2\cdot(x^2+1)}=\dfrac{9}{5}.$ Відповідь: $2;\ \dfrac{1}{2}.$

5.44. $\dfrac{(x+1)^5}{x^5+1}=16.$ Відповідь: $1;\ \dfrac{1}{3}.$

5.45. $x^3=\dfrac{17x-10}{10x-17}.$ Відповідь: $2;\ \dfrac{1}{2}.$

5.46. $\dfrac{x^2-5x+7}{6x}=\dfrac{x^2-3x+7}{x^2+2x+7}.$ Відповідь: $1;\ 7.$

5.47. $x^2+\dfrac{9x^2}{(x-3)^2}=7.$ Відповідь: $-0{,}5-0{,}5\cdot\sqrt{13};\ -0{,}5+0{,}5\sqrt{13}.$

5.48. $x^3-x^2-2=\dfrac{8}{x^3-x^2}.$ Відповідь: $-1;\ 2.$

5.49. $4x^2+12x+\dfrac{12}{x}+\dfrac{4}{x^2}=47.$ Відповідь: $\dfrac{1}{2};\ 2;\ \dfrac{-11-\sqrt{105}}{4};\ \dfrac{-11+\sqrt{105}}{4}.$

5.50. $\frac{3}{x\cdot(x-5)}+\frac{1}{x^2-5x+4}+\frac{4}{(x-2)\cdot(x-3)}=0.$ Відповідь: $\frac{5-\sqrt{7}}{2};\ \frac{5+\sqrt{7}}{2};\ \frac{5-\sqrt{17}}{2};\ \frac{5+\sqrt{17}}{2}.$

5.51. $\frac{1}{x\cdot(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}.$ Відповідь: $-3;\ 1.$

Діофантові рівняння

Серед алгебраїчних рівнянь з раціональними коефіцієнтами часто зустрічаються діофантові рівняння. Зручним для їх розпізнавання є таке поняття системи діофантових рівнянь: це така система алгебраїчних рівнянь з раціональними коефіцієнтами, яка містить змінних більше, ніж самих рівнянь. Слідуючи такій логіці, можна сказати, що діофантове рівняння це таке алгебраїчне рівняння з раціональними коефіцієнтами, в якому змінних більше однієї. Діофантові рівняння розв'язуються тільки в множині цілих чисел. Їх можна розв'язувати таким способом, який доцільно назвати вираженням однієї змінної через іншу:

1). Виразити одну змінну через іншу;

2). Вибирати значення другої змінної так, щоб перша змінна набувала цілих значень.

Знайти всі цілі розв'язки рівняння:
$15x-7y=13.$

Розв'язання:

$7y=15x-13;\quad y=\frac{15x-13}{7}=\frac{15x}{7}-\frac{13}{7}=2x+\frac{x}{7}-2+\frac{1}{7}=2x-2+\frac{x+1}{7}.$

З аналізу цього виразу видно, що y набуває цілих значень тоді, коли цілим є вираз $\frac{x+1}{7}$, тобто тоді, коли $x+1=7k,$ де $k\in z.$ $x=7k-1,$ тоді рівняння матиме вигляд: $y=2\cdot(7k-1)-2+\frac{7k}{7}=14k-2-2+k=15k-4.$ Відповідь: $(7k-1;\ 15k-4;\ k\in z).$

Знайти всі цілі невід'ємні розв'язки рівняння: $19x+84y=1984.$

Розв'язання:

Подамо число 1984 у вигляді суми двох доданків, один з яких кратний числові 19, а другий – 84. $1984=1900+84$ і над заданим діофантовим рівнянням здійснимо перетворення ,які дають можливість знайти всі його цілі розв'язки: $19x+84y=1900+84,$ $19x-1900+84y=84,$ $19\cdot(x-100)+84y=84,$ $84y=84-19\cdot(x-100),$ $y=\frac{84}{84}-\frac{19\cdot(x-100)}{84}=1-19\cdot\frac{x-100}{84}.$

Цей вираз є цілим, при $x-100$ кратне 84, тобто, $x-100=84k$, де $k\in z,$ звідси:

$x = 84k + 100,$ тоді $y = 1 - 19 \cdot \frac{84k}{84},$ $y = 1 - 19k.$ $(100 + 84k;\ 1 - 19k),$ $k \in z$ – всі цілі розв'язки рівняння. Для знаходження цілих невід'ємних розв'язків цього рівняння розв'яжемо таку систему нерівностей:

$\begin{cases} 84k + 100 \geq 0, \\ 1 - 19k \geq 0. \end{cases}$ $\begin{cases} 84k \geq -100, \\ -19k \geq -1. \end{cases}$ $\begin{cases} k \geq -\frac{100}{84}, \\ k \leq \frac{1}{19}. \end{cases}$ Оскільки $k \in z,$ то розв'язки цієї системи: $k \in \{-1;\ 0\}.$ Підставляючи ці значення k у вираз всіх цілих розв'язків, дістанемо невід'ємні цілі розв'язки $(100 + 84 \cdot (-1);\ 1 - 19 \cdot (-1));$ $(16;\ 20).$ $(100 + 84 \cdot 0;\ 1 - 19 \cdot 0);$ $(100;\ 1).$ Відповідь: $(16;\ 20),$ $(100;\ 1).$

Нерідко зустрічаються задачі, розв'язування яких ґрунтується на діофантових рівняннях:

Знайти всі додатні трицифрові числа, які приділенні на 37 дають остачу 2, а при діленні на 11 – остачу 5.

Розв'язання:

Нехай x – шукане число. Згідно умови задачі воно може бути записане у вигляді: $x = 37k + 2$ і $x = 11m + 5,$ де $k \in N$ і $m \in N.$ Оскільки в задачі йде мова про одне й те ж число x, то можна скласти діофантове рівняння $11m + 5 = 37k + 2$ виразимо m через k: $11m = 37k + 2 - 5,$ $11m = 37k - 3,$ $m = \frac{37k - 3}{11} = 3k + \frac{4k}{11} - \frac{3}{11} = 3k + \frac{4k - 3}{11},$ цей вираз набуває цілих значень при $4k - 3 = 11p,$ де $p \in z$, тоді

$4k = 11p + 3,$ $k = \frac{11p + 3}{4} = 3p - \frac{p}{4} + 1 - \frac{1}{4} = 3p + 1 - \left(\frac{p}{4} + \frac{1}{4}\right) = 3p + 1 - \frac{p + 1}{4}.$

Цей вираз набуває цілих значень при $p + 1 = 4q,$ де $q \in z.$ $p = 4q - 1,$ тоді

$k = \frac{11 \cdot (4q - 1) + 3}{4} = \frac{11 \cdot 4q}{4} - \frac{11}{4} + \frac{3}{4} = 11q - \frac{8}{4} = 11q - 2.$

$x = 37 \cdot (11q - 2) + 2 = 407q - 74 + 2 = 407q - 72.$ $x = 407q - 72$ – формула всіх додатних чисел, які задовольняють умови задачі. З цієї множини чисел необхідно вибрати лише трицифрові: при $q = 1$ маємо $x = 407 \cdot 1 - 72 = 335;$

при $q = 2$ маємо $x = 407 \cdot 2 - 72 = 742;$

при $q = 3$ маємо $x = 407 \cdot 3 - 72 = 1149$ – чотири цифрове число. Відповідь: 335; 742.

Другий спосіб розв'язування діофантових рівнянь можна назвати способом розкладання лівої частини рівняння на множники. Він полягає в тому, що:

1). Праву частину рівняння роблять цілим числом;

2). Ліву частину рівняння розкладають на множники;

3). Замінюють утворене рівняння сукупністю систем простіших рівнянь.

Наприклад, розв'язати рівняння в цілих числах: $xy = x + 2y + 1991.$

Розв'язання:

Члени, що містять змінні переносимо ліву частину $xy - x - 2y = 1991.$

Додамо до обох частин рівняння число 2, а потім ліву його частину розкладемо на множники: $(xy-2y)+(-x+2)=1993;$ $y\cdot(x-2)-(x-2)=1993;$ $(x-2)\cdot(y-1)=1993 \quad (A).$ Оскільки число 1993 – просте, то його можна подати у вигляді добутку тільки двома способами: $1993=1\cdot 1993$ і $1993=-1\cdot(-1993)$. На множині цілих чисел діофантове рівняння (А) рівносильне сукупності таких систем рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2=1,\\ y-1=1993.\end{cases}\\ \begin{cases}x-2=1993,\\ y-1=1.\end{cases}\\ \begin{cases}x-2=-1,\\ y-1=-1993.\end{cases}\\ \begin{cases}x-2=-1993,\\ y-1=-1.\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3,\\ y=1994.\end{cases}\\ \begin{cases}x=1995,\\ y=2.\end{cases}\\ \begin{cases}x=1,\\ y=-1992.\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1991,\\ y=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: (3; 1994), (1995; 2), (1; −1992), (1991; 0).

Знайти цілі розв’язки рівняння: $3xy+16x+13y+61=0.$

Розв’язання:

Домножимо обидві частини рівняння на 3: $9xy+48x+39y+183=0.$ До обох частин рівняння додамо число 25: $9xy+48x+39y+208=25;$ $(9xy+39y)+(48x+208)=25;$ $3y(3x+13)+16\cdot(3x+13)=25;$ $(3x+13)\cdot(3y+16)=25;$ Це рівняння рівносильне сукупності таких систем рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x+13=1,\\ 3y+16=25.\end{cases}\\ \begin{cases}3x+13=25,\\ 3y+16=1.\end{cases}\\ \begin{cases}3x+13=-1,\\ 3y+16=-25.\end{cases}\\ \begin{cases}3x+13=-25,\\ 3y+16=-1.\end{cases}\\ \begin{cases}3x+13=5,\\ 3y+16=5.\end{cases}\\ \begin{cases}3x+13=-5,\\ 3y+16=-5.\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x=-12,\\ 3y=3.\end{cases}\\ \begin{cases}3x=12,\\ 3y=-15.\end{cases}\\ \begin{cases}3x=-14,\\ 3y=-41.\end{cases}\\ \begin{cases}3x=-38,\\ 3y=-17.\end{cases}\\ \begin{cases}3x=2,\\ 3y=-11.\end{cases}\\ \begin{cases}3x=-18,\\ 3y=-21.\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-4,\\ y=3.\end{cases}\\ \begin{cases}x=4,\\ y=-5.\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{14}{3}\notin z,\\ y=-\dfrac{41}{3}\notin z.\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{38}{3}\notin z,\\ y=-\dfrac{17}{3}\notin z.\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\notin z,\\ y=-\dfrac{11}{3}\notin z.\end{cases}\\ \begin{cases}x=-6,\\ y=-7.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: (−4; 3), (4; −5), (−6; −7).

Третій спосіб розв’язування діофантових рівнянь має назву локалізації. Його суть полягає в тому, що використовуючи особливості рівняння, локалізують множину, на якій можуть міститися його розв’язки а потім безпосередньою перевіркою знаходять їх.
Розв’язати рівняння в цілих числах: $3x^2+5y^2=345.$

Розв’язання:

Вираз $3x^2 \geq 0$ при всіх значеннях х. Тоді $5y^2 \leq 345.$ Розділивши обидві частини нерівності на 5,одержимо $y^2 \leq 69.0 \leq y \leq \sqrt{69}, 0 \leq y \leq 8.$ Оскільки $3x^2$ ділиться на 3і 345ділиться на3,то $5y^2$ ділиться на 3,тобто y^2 ділиться на3, а тому уділиться на3.На проміжку локалізації $[0;\ 8]$ $y=\{0;\ 3;\ 6\}$. Підставляємо у вихідне рівняння замість значення y числа 0; 3; 6. $y=0:\quad 3x^2+5\cdot 0=345;$
$3x^2=345;\quad x^2=345:3;\quad x^2=115;\quad x=\sqrt{115}\notin z;\quad y=3:\quad 3x^2+5\cdot 3^2=345;$
$3x^2=345-45;\quad x^2=300:3;\quad x^2=100;\quad x_1=10,\quad x_2=-10.$ Отримаємо два розв’язки $(10;\,3), (-10;\,3)$. Комбінуючи знаки в цих розв’язках матимемо ще два розв’язки $(10;\,-3), (-10;\,-3)$.
Відповідь: $(10;\,3), (-10;\,3), (10;\,-3), (-10;\,-3)$.

Розв’язати рівняння: $x+y=x^2-xy+y^2$

Розв’язання:

Виконаємо тотожні перетворення над цим рівнянням: $x^2-xy+y^2-x-y=0;$
Згрупуємо деякі члени рівняння $\left(x^2-xy-x+y^2-y\right)=0;\quad x^2-(y+1)x+y^2-y=0.$
Утворилось квадратне рівняння відносно x. Воно має дійсні корені тоді коли його дискримінант невід’ємний, тобто $D=(y+1)^2-4\cdot 1\cdot\left(y^2-y\right)\geq 0;$
$y^2+2y+1-4y^2+4y\geq 0;\ -3y^2+6y+1\geq 0;\ 3y^2-6y-1\leq 0;\ D=36-4\cdot 3\cdot(-1)=48;$

$$y_1=\frac{6-\sqrt{48}}{6}=\frac{6-4\sqrt{3}}{6}=\frac{3-2\sqrt{3}}{3};\quad y_2=\frac{6+\sqrt{48}}{6}=\frac{6+4\sqrt{3}}{6}=\frac{3+2\sqrt{3}}{3};$$

Проміжок локалізації $\left[\frac{3-2\sqrt{3}}{3};\ \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]$. Цілі розв'язки нерівності є 0,1; 2.

Підставляючи знайдені значення $\boldsymbol{y}$ у вихідне рівняння знайдемо відповідні значення $\boldsymbol{x}$:

$y=0:\quad x^2-(1+0)\cdot x+0=0;\quad x^2-x=0;\quad x_1=0;\quad x_2=1.\ (0;\,0), (1;\,0).$
$y=1:\quad x^2-2x=0;\quad x_3=0;\quad x_4=2.\ (0;\,1), (2;\,1).$
$y=2:\quad x^2-3x+4-2=0;\quad x^2-3x+2=0;\quad x_5=1;\quad x_6=2.\ (1;\,2), (2;\,2).$

Відповідь: $(0;\,0), (1;\,0), (0;\,1), (2;\,1), (1;\,2), (2;\,2)$.
Розв’язати рівняння: $\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{3}{7};$

Розв’язання:

О.Д.З.: $x\neq 0;\ \ y\neq 0.$ За основною властивість прогресії маємо:
$3\cdot\left(x^2-xy+y^2\right)=7\cdot(x+y);\quad 3x^2-3xy+3y^2-7x-7y=0;\quad 3x^2-(3xy+7x)+\left(3y^2-7y\right)=0;$
$3x^2-(3y+7)\cdot x+3y^2-7y=0;$ Це рівняння має дійсні корені тоді, коли $D\geq 0.$

$D=(3y+7)^2-4\cdot 3\cdot(3y^2-7y)\geq 0; \quad 9y^2+42y+49-36y^2+84y\geq 0;$
$9y^2-27y^2+126y+49\geq 0\big|\cdot(-1); \quad 27y^2-126y-49\leq 0.$
$D_1=15876-4\cdot 27\cdot(-49)=15876+5292=21168=36\cdot 588.$

$$y_1=\frac{126-6\cdot\sqrt{588}}{54}=\frac{6\cdot\left(21-\sqrt{588}\right)}{54}=\frac{21-\sqrt{588}}{9}; \quad y_2=\frac{21+\sqrt{588}}{9}.$$

Проміжок локалізації: $\left[\frac{21-\sqrt{588}}{9};\ \frac{21+\sqrt{588}}{9}\right]$. Цілі числа з цього проміжку

$y=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$. Підставляємо їх у вихідне рівняння: $y=1:\quad \frac{x+1}{x^2-x+1}=\frac{3}{7},$
$3x^2-3x+3-7x-7=0, \quad 3x^2-10x-4=0. \quad D=100+48=148, \quad x_1\notin z; \ x_2\notin z.$
$y=2:\quad \frac{x+2}{x^2-2x+4}=\frac{3}{7}; \quad 3x^2-6x+12=7x+14; \quad 3x^2-13x-2=0.$
$D=169+24=193; \quad x_3\notin z; \ x_4\notin z. \quad y=3:\quad \frac{x+3}{x^2-3x+9}=\frac{3}{7}; \quad 3x^2-9x+27=7x+21;$
$3x^2-16x+6=0. \quad D=256-72=184; \quad x_5\notin z; \ x_6\notin z. \quad y=4:\quad \frac{x+4}{x^2-4x+16}=\frac{3}{7};$
$3x^2-12x+48=7x+28; \quad 3x^2-19+20=0.$
$D=361-240=121; \quad x_1=\frac{19-11}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}\notin z; \quad x_2=\frac{19+11}{9}=5\notin z; \quad (5;\,4).$
$y=5:\quad \frac{x+5}{x^2-5x+25}=\frac{3}{7}; \quad 3x^2-15x+75=7x+35; \quad 3x^2-22x+40=0.$
$D=484-480=4; \quad x_1=\frac{22-2}{6}=\frac{10}{3}\notin z. \quad x_2=\frac{22+2}{6}=\frac{24}{6}=4\in z.$

Діофантове рівняння має лише два цілі розв’язки (5; 4), (4; 5).
Відповідь: (5; 4), (4; 5).
Ми розглянули лише три способи розв’язування діофантових рівнянь. Насправді їх є значно більше. Системи діофантових рівнянь можна розв’язувати трьома вище згаданими способами.

Розв’язати систему рівнянь в цілих числах: $\begin{cases}x^2-y^2-z^2=1,\\ z+y-x=3.\end{cases}$

Розв’язання:

Ліву частину першого рівняння системи можна перетворити так:
$x^2-y^2-z^2=x^2-\left(y^2+z^2\right)=x^2-\left(y^2+z^2-2yz+2yz\right)=x^2-\left((y+z)^2-2yz\right)=$
$=x^2-(y+z)^2+2yz=(x-y-z)\cdot(x+y+z)+2yz.$

Тотожне перетворення другого рівняння системи $z+y-x=3$, дає $x=z+y-3$.
Враховуючи ці фактори, вихідну систему рівнянь можна замінити системою, рівносильною їй, тобто, $\begin{cases}(z+y-3-y-z)\cdot(z+y-3+y+z)+2yz=1,\\ x=y+z-3.\end{cases}$

$-6x-6y+9+2yz=1; \quad 3z+3y-4-yz=0; \quad 3y+3z-yz-9=-5\big|\cdot(-1);$
$-3y-3z+yz+9=5; \quad (yz-3y)+(-3z+9)=5; \quad y(z-3)-3(z-3)=5; \quad (z-3)\cdot(y-3)=5.$

Утворилась система діофантових рівнянь:

$\begin{cases}(y-3)(z-3)=5,\\ x=y+z-3.\end{cases}$ (A).

Перше рівняння цієї системи рівносильне такій сукупності систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y-3=1,\\ z-3=5.\end{cases}\\ \begin{cases}y-3=5,\\ z-3=1.\end{cases}\\ \begin{cases}y-3=-1,\\ z-3=-5.\end{cases}\\ \begin{cases}y-3=-5,\\ z-3=-1.\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=4,\\ z=8.\end{cases}\\ \begin{cases}y=8,\\ z=4.\end{cases}\\ \begin{cases}y=2,\\ z=-2.\end{cases}\\ \begin{cases}y=-2,\\ z=2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Підставляючи знайдені значення y та z в друге рівняння системи (А), одержимо відповідні значення x: $x=4+8-3=9$ (9; 4; 8),

$x=8+4-3=9$ (9; 8; 4),

$x=2-2-3=-3$ (−3; 2; −2),

$x=-2+2-3=-3$ (−3; −2; 2).

Відповідь: (−3; −2; 2), (−3; 2; −2), (9; 8; 4), (9; 4; 8).

Багато задач розв’язуються за допомогою діофантових рівнянь значно простіше, ніж традиційними способами.

Сума номерів будинків одного кварталу по одній стороні вулиці дорівнює 235.

Вказати номера будинків цього кварталу.

Розв’язання:

Оскільки число 235 непарне то номери будинків цього кварталу виражаються непарними числами. Нехай номер першого будинку виражається числом $2x+1,$ а останнього – $2y-1.$ Обчислимо суму n перших непарних натуральних чисел $1+3+5+\ldots+(2n-1)$. Цей ряд являє собою арифметичну прогресію з першим членом $a_1=1$, різницею $d=2$ і кількістю членів n. Її сума

$$S_n=\frac{2a_1+d\cdot(n-1)}{2}\cdot n,\quad S_n=\frac{2\cdot 1+2\cdot n-1}{2}\cdot n=\frac{2+2n-2}{2}\cdot n=n^2\ (A).$$

Якщо по одній стороні міститься x будинків, то їх сума згідно (А)$=x^2$. Якщо їх є y будинків, то їхня сума y^2, а різниця $y^2-x^2=235$ – Діофантове рівняння.

$2x+1$ та $2y-1$ – “генератори” непарних чисел, функції від змінних x та y.

Рівняння $(y-x)\cdot(y+x)=235$ – рівносильне такій сукупності систем рівнянь:

$$\left[\begin{array}{llll}\begin{cases}y-x=1,\\ y+x=235.\end{cases} & \begin{cases}2y=236,\\ y+x=235.\end{cases} & \begin{cases}y=118,\\ x=235-118.\end{cases} & \begin{cases}y=118,\\ x=117.\end{cases}\\ \begin{cases}y-x=235,\\ y+x=1.\end{cases} & \begin{cases}2y=236,\\ y+x=1.\end{cases} & \begin{cases}y=118,\\ x=1-118=-117\notin N\end{cases} & \\ \begin{cases}y-x=5,\\ y+x=47.\end{cases} & \begin{cases}2y=52,\\ x+y=47.\end{cases} & \begin{cases}y=26,\\ x=47-26.\end{cases} & \begin{cases}y=26,\\ x=21.\end{cases}\\ \begin{cases}y-x=47,\\ y+x=5.\end{cases} & \begin{cases}2y=52,\\ x+y=5.\end{cases} & \begin{cases}y=26,\\ x=5-26=-21\notin N.\end{cases} & \end{array}\right.$$

Знайшовши значення аргументу можна знайти відповідні значення функції $2x+1=2\cdot 21+1=43.$ Оскільки номери будинків являють собою арифметичну прогресію з різницею 2, то їхні наступні чотири номери такі: 43+2=45, 45+2=47, 47+2=49, 49+2=51.

Відповідь: може бути один будинок з номером 235, або п'ять будинків з номерами: 43, 45, 47, 49, 51.

Задача: У двох коробках знаходяться горіхи. Якщо з першої перекласти в другу 100 горіхів, то в другій коробці буде горіхів удвічі більше, ніж у першій. Якщо ж навпаки, з другої коробки перекласти в першу декілька горіхів, то у першій буде в 6 разів більше, ніж у другій.

Яке найменше число горіхів можливе у першій коробці?

Скільки в цьому випадку горіхів у другій коробці?

Розв'язання:

Нехай x – число горіхів у першій коробці, y – число горіхів у другій коробці, z – число горіхів, які переклали з другої коробки в першу, тоді $(x-100)$горіхів стало в першій коробці після того, як з неї взяли 100 горіхів. $(y+100)$горіхів стало в другій коробці після того, як в неї переклали 100 горіхів. Згідно умови задачі складаємо рівняння $2\cdot(x-100)=y+100 \quad (1).$

$(y-z)$горіхів стало в другій коробці, коли з неї взяли z горіхів. $(x+z)$горіхів стало в першій коробці коли в неї поклали z горіхів. По умові задачі складаємо рівняння $6\cdot(y-z)=x+z \quad (2).$

Значення змінних повинні задовольняти рівняння (1) і (2), а тому вони мають задовольнити таку систему діофантових рівнянь: $\begin{cases}2\cdot(x-100)=y+100,\\ 6\cdot(y-z)=x+z.\end{cases}$

$$\begin{cases}2x-200=y+100,\\ 6y-6z=x+z\end{cases} \quad \begin{cases}y=2x-300,\\ 6\cdot(2x-300)-6z=x+z.\end{cases} \quad \begin{cases}y=2x-300,\\ 12x-1800-6z=x+z.\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=2x-300,\\ 11x-7z=1800.\end{cases} \quad \begin{cases}y=2x-300,\\ 11x=1800+7z.\end{cases} \quad \begin{cases}y=2x-300,\\ x=\dfrac{1800}{11}+\dfrac{7z}{11}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=2x-300,\\ x=163+\dfrac{7}{11}+\dfrac{7z}{11}.\end{cases} \quad \begin{cases}y=2x-300,\\ x=163+\dfrac{7\cdot(z+1)}{11}.\end{cases} \quad \begin{cases}y=2x-300,\\ x=163+7\cdot\dfrac{z+1}{11}.\end{cases}$$

З другого рівняння системи випливає, що найменшим цілим значенням x є число, яке утвориться при $\frac{z+1}{11}=1,$ тобто при $z+1=11,\ \ z=11-1,\ \ \ z=10.$

При цьому $x=163+7\cdot 1=170.$ $170-$ найменше ціле число горіхів у першій корзині. Число горіхів у другій корзині $y=2\cdot 170-300=340-300=40.$

Відповідь: 170 горіхів, 40 горіхів.

Завдання для самостійної роботи:

Знайти всі цілі розв'язки рівняння:

5.52. $1999x+2000y=2001.$ Відповідь: $(2000k-1;\ \ 2-1999k),\ k\in z.$

5.53. $xy+3x-y=20.$ Відповідь: $(-16;\ (-4));\ (0;\ (-20));\ (2;\ 14);\ (18;\ -2).$

5.54. $6x^2+5y^2=74.$ Відповідь: $(3;\ 2);\ (3;\ (-2));\ (-3;\ 2);\ (-3;\ (-2)).$

Знайти всі цілі невід'ємні розв'язки рівнянь:

5.55. $19x+99y=1999.$ Відповідь: $(100;\ 1).$

5.56. $x\cdot xy=x+y.$ Відповідь: $(0;\ 0);\ \ (2;\ 2).$

5.57. $19x+93y=4xy.$ Відповідь:
$(0;\ 0);\ \ (28;\ 28);\ \ (24;\ 152);\ \ (31;\ 19);\ \ (465;\ 5).$

Розв'язати в натуральних числах системи рівнянь:

5.58. $\begin{cases} x^3-y^3-z^3=3xyz, \\ x^2=2(y+z). \end{cases}$ Відповідь: $(2;\ 1;\ 1).$

5.59. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^3+y^3+z^3=3. \end{cases}$ Відповідь: $(1;\ 1;\ 1),\ (-5;\ 4;\ 4),\ \ (4;\ -5;\ 4),$
$(4;\ 4;\ -5).$

5.60. $\begin{cases} xy+z=94, \\ x+yz=95. \end{cases}$ Відповідь: $(95;\ 0;\ 94).$

Розв'язати задачі:

5.61. Знайти двоцифрове число, яке вдвічі більше за добуток його цифр.
Відповідь: 36.

5.62. Яку найбільшу кількість комплектів шахів по 5 і 8 гривень можна придбати за 103 грн.?
Відповідь: 1 комплект за 8 грн. і 19 комплектів по 5 грн., всього 20 комплектів.

5.63. Маса 100 гирьок, які знаходяться в одній купі, дорівнює 500 грамів. Відомо, що там є тільки гирьки по 1 грамові, 10 грамів і 50 грамів. Скільки в купі гирьок кожної маси?
Відповідь: 60, 39 і 1.

5.64. Петрик на 3 роки старший за Миколку, і на 6 років за василька. Добуток віків Тарасика і Миколки на 9 більший за добуток віків Петрика і Василька.
На скільки років Петрик старший за Тарасика?
Відповідь: на 3.