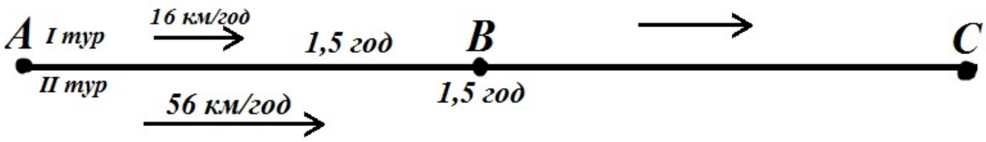
Розділ 22
Розв'язування текстових задач за допомогою рівнянь, нерівностей та їх систем

Задачі на рух.

№ 13.079 Перший турист, поїхавши 1,5 *год* велосипедом зі швидкістю 16 *км/год*, робить зупинку на 1,5 *год*, а потім продовжує рух з початковою швидкістю. Через 4 *год* після виїзду першого туриста наздогін йому виїжджає другий турист мотоциклом зі швидкістю 56 *км/год*. Яку відстань вони проїдуть до того місця, в якому другий турист наздожене першого?

Розв'язання:



Нехай другий турист наздожене першого в точці *C*, яка віддалена від точки *A* на *x км*.

$\frac{x}{16}$ *год* - час, за який перший турист подолає *x* км.

$\frac{x}{56}$ *год* - час, за який другий турист подолає *x* км.

Так як перший турист проїхавши 1,5 *год*, зробив зупинку у пенкті *B* на 1,5 *год*, то час його руху від *A* до *C* на $4-1{,}5=2{,}5$ *год* більший від часу руху другого туриста від *A* до *C*.

По умові задачі складаємо рівняння:

$\frac{x}{16}-\frac{x}{56}=2{,}5;\ \frac{56x-16x}{16\cdot 56}=\frac{5}{2};\ \frac{40x}{896}=\frac{5}{2}.$ Скориставшись основною властивістю пропорції $40x\cdot 2=896\cdot 5;\ x=\frac{4480}{80}=56.$

Відповідь: 56 *км*.

При розв'язуванні задач за допомогою рівнянь (їх систем) доречно дотримуватись такої схеми:

1) Розділити задачу на *умови* та *вимоги*;

2) Невідому (невідомі) величину (величини) позначити змінною (змінними);

3) Використовуючи умови задачі, зв'яжіть відомі і невідомі величини в рівняння (в систему рівнянь);

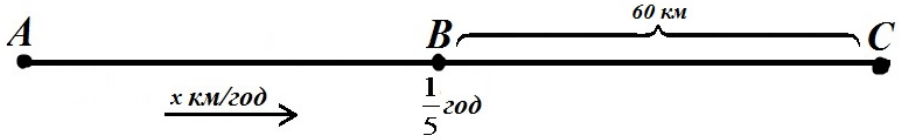
4) Розв'язати рівняння (систему рівнянь);

5) З розв'язків рівняння або системи рівнянь вибрати відповідь до задачі.

№ 13.083 Потяг був затриманий в дорозі на 12 *хв*, а потім на відстані 60 *км* надолужив втрачений час, збільшивши швидкість на 15 *км/год*. Знайти початкову швидкість потяга.

Розв'язання:

$12\,хв = \frac{12}{60}\,год = \frac{1}{5}\,год.$



Нехай *x км/год* - початкова швидкість потяга.

З такою швидкістю потяг рухався від пункта *A* до пункту *B*. $\frac{1}{5}$ *год* він стояв в пункті *B*. На дільниці $BC = 60\,км$ потяг рухався зі швидкістю $(x+15)\,км/год$, наверставши втрачену $\frac{1}{5}\,год$ в пункті *B*. Якби на перегоні *BC* потяг не збільшував початкову швидкість, то подолав би його за $\frac{60}{x}\,год$. Збільшивши швидкість на 15 *км/год*, він затратив на *BC* $\frac{60}{x+15}\,год$. Різниця цих часів становить $\frac{1}{5}\,год$. Це підстава для складання рівняння:

$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+15} = \frac{1}{5};\;\; x \neq 0, x \neq -15.$

$\frac{60x + 60\cdot 15 - 60x}{x\cdot(x+15)} = \frac{1}{5};\;\; \frac{900}{x\cdot(x+15)} = \frac{1}{5};$ За основною властивістю пропорції маємо:

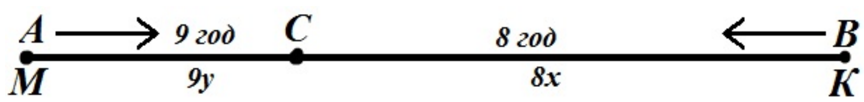
$x(x+15) = 4500;\;\; x^2 + 15x4500 = 0;$ По теоремі Вієта: $x_1 = 60;\;\; x_2 = -75.$

Оскільки швидкість - невідома величина, то корінь -75 не задовольняє умову задачі.

Відповідь: $60\,км/год$.

№ 13.101 Одночасно два пішоходи мали вийти назустріч один одному з двох пунктів. Пішохід *A* з селища *M*, пішохід *B* - з селища *K*. Але пішохід *A* затримався і вийшов на 6 *год* пізніше. При зустрічі виявилося, що пішохід *A* пройшов на 12 *км* менше, ніж пішохід *B*. Відпочивши, вони одночасно залишили місце зустрічі і продовжували рухатися з колишніми швидкостями. В результаті *A* прийшов в *K* через 8 *год*, а *B* - в *M* через 9 *год* після зустрічі. Визначити відстань *MK* і швидкості пішоходів.

Розв'язання:



Нехай *x км/год* - швидкість пішохода *A*, *y км/год* - швидкість пішохода *B*.

C - пункт зустрічі.

Після зустрічі пішохід *А* пройшов шлях *СК = 8х км*, пішохід *В* пройшов *СМ = 9у км*. Так як *МС<СК* на 12, то маємо рівняння: $8x-9y=12\,(1)$

Пішохід *А* затратив на шлях *МС* $\frac{9y}{x}$ *год*, а пішохід *В* на шлях *КС* затратив $\frac{8x}{y}$ *год*. Оскільки різниця часів перебування в дорозі обох пішоходів становить 6 *год*, то на цій підставі складаємо рівняння:

$\frac{8x}{y}-\frac{9y}{x}=6\,(2)$ Значення змінних *х* та *у* мають задовольняти рівняння *(1)* і *(2)*, а тому вони мають задовольняти таку систему:

$\begin{cases} 8x-9y=12, \\ \frac{8x}{y}-\frac{9y}{x}=6. \end{cases}$ Нехай $\frac{x}{y}=t,$ тоді $\frac{y}{x}=\frac{1}{t};\ \ x=ty.\ \ t>0,$ бо $x>0,\ \ y>0.$

$\begin{cases} 8x-9y=12, \\ 8t-\frac{9}{t}=6. \end{cases}$ $\begin{cases} 8x-9y=12, \\ \frac{8t^2-6t-9}{t}=0. \end{cases}$ $\begin{cases} 8x-9y=12, \\ 8t^2-6t-9=0. \end{cases}$

$D=36+288=324=18^2,$

$t_1=\frac{6-18}{16}=-\frac{12}{16}=-\frac{3}{4}-$не задовольняє умову задачі, бо $x>0, y>0.$

$t_2=\frac{6+18}{16}=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}=1{,}5.\ \ x=ty=1{,}5y.$ Підставляючи в перше рівняння системи, дістанемо: $8\cdot1{,}5y-9y=12;\ \ 12y-9y=12;\ \ 3y=12;\ \ y=\frac{12}{3}=4.\ \ x=1{,}5\cdot4=6.$

$MK=9\cdot4+8\cdot6=3+48=84$ *(км)*.

Відповідь: 6 *км/год*, 4 *км/год*, 84 *км*.

№ 13.129 О 9 *год* самохідна баржа вийшла з пункту *А* вгору по річці і прибула в пункт *В*. Після 2 *год* перебування в пункті *В* вона відправилась в пункт *А*, якого досягнула о 19 *год* 20 *хв* того ж дня. Швидкість течії річки 3 *км/год*. Відстань від *А* до *В* дорівнює 60 *км*. Швидкість баржі стала.
О котрій годині баржа прибула в пункт *В*.

Розв'язання:

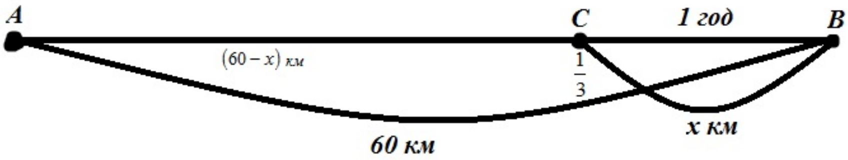
9 *год* 20 *хв* = $19\frac{1}{3}$ *год.*

Нехай *х км/год* власна швидкість баржі, тоді
$(x+3)$ *км/год* - швидкість баржі за течією річки,
$(x-3)$ *км/год* - швидкість баржі проти течії річки,
$\frac{60}{x+3}$ *год* - час на рух за течією,
$\frac{60}{x-3}$ *год* - час на рух проти течії.

Всього було витрачено часу $19\frac{1}{3}-(9+2)=8\frac{1}{3}$ *(год)*.

За умовою задачі складаємо рівняння:

$\frac{60}{x+3}+\frac{60}{x-3}=8\frac{1}{3}$; $\frac{60}{x+3}+\frac{60}{x-3}=\frac{25}{3}\Big|:5$ $\frac{12}{x+3}+\frac{12}{x-3}=\frac{5}{3}$; $x\neq -3$; $x\neq 3$;
$\frac{12x-36+12x+36}{(x+3)\cdot(x-3)}=\frac{5}{3}$; $\frac{24}{x^2-9}=\frac{5}{3}$;
Скористаємось основною властивістю пропорції:
$5x^2-72x-45=0:5\cdot(x^2-9)=3\cdot 24x$; $D=72^2+900=5184+900=6084=78^2$.
$x_1=\frac{72-78}{10}=-0{,}6$ – не задовольняє умову задачі.
$x_2=\frac{72+78}{10}=15$.
15 *км/год* - власна швидкість баржі. До пункту *В* баржа рухалась проти течії, затративши $\frac{60}{15-3}=\frac{60}{12}=5$ *(год)*.
Так як вона з пункту *А* вийшла о 9 *год*, то в пункт *В* вона прибула о $9+5=14$ *(год)*.
Відповідь: 14 *год*.
№ 13.278 Пасажир потяга знає, що на даній дільниці шляху, швидкість цього поїзда становить 40 *км/год*. Як тільки мимо вікна почав проходити зустрічний потяг, пасажир включив секундомір і помітив, що зустрічний поїзд проходить мимо вікна протягом 3 *сек*.
Визначити швидкість зустрічного потяга, якщо його довжина 75 *м*.
Розв'язання:
Нехай *х км/год* - швидкість зустрічного потяга.
3 *сек* = $\frac{3}{3600}$ *год* = $\frac{1}{1200}$ *год*.
За цей час потяг з пасажирами проїде $40\cdot\frac{1}{1200}=\frac{1}{30}$ *км*, а зустрічний поїзд $\frac{1}{1200}x$ *км*.
Всього два потяги проїхали 75 *м* = $\frac{75}{1000}$ *км* = $\frac{3}{40}$ *км*.
По умові задачі складаємо рівняння:
$\frac{x}{1200}+\frac{1}{30}=\frac{3}{40}$; $\frac{x}{1200}=\frac{3}{40}-\frac{1}{30}$; $\frac{x}{1200}=\frac{90-40}{1200}$; $\frac{x}{1200}=\frac{50}{1200}$; $x=50$.
Відповідь: 50 *км/год*.
№ 13.360 Відстань між пунктами *А* і *В* дорівнює 60 *км*. Велосипедист виїхав з *А* до *В*. Не затримуючись в *В*, він вирушив до *А* з попередньою швидкістю. Через 1 *год* після виїзду з пункту *В* він робить зупинку на 20 *хв*. Після цього він продовжує рухатись, збільшивши швидкість на 4 *км/год*.
В яких межах міститься швидкість велосипедиста, якщо на зворотний шлях від *В* до *А* він витратив часу не більше, ніж від *А* до *В*.
Розв'язання:
20 *хв* = $\frac{1}{3}$ *год*.
х км/год - початкова швидкість велосипедиста.



Тоді $\frac{60}{x}$ *год* - час витрачений на шлях *AB*. Час, витрачений на *BC* та зупинку в пункті *C* дорівнює $1+\frac{1}{3}=1\frac{1}{3}$ *(год)*.

Шлях *BC* дорівнює *x км*, тоді шлях *CA* становить 60*x км*. Оскільки після зупинки в пункті *C* на $\frac{1}{3}$ *год* велосипедист збільшив свою швидкість на 4 *км/год*, то на шляху *CA* рухався зі швидкістю $(x+4)$ *км/год*.

Час, витрачений на шлях *CA*: $1\frac{1}{3}+\frac{60-x}{x+4}$.

Згідно умови задачі час, витрачений на шлях від *B* до *A* не більший, ніж від *A* до *B*, то можна скласти таку нерівність:

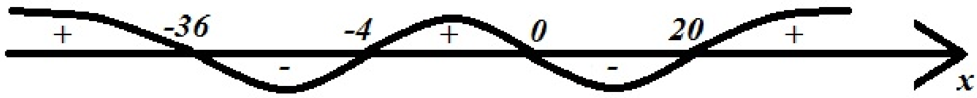
$$1\frac{1}{3}+\frac{60-x}{x+4}\le\frac{60}{x};\ 1\frac{1}{3}+\frac{60-x}{x+4}-\frac{60}{x}\le 0;\ \frac{4}{3}+\frac{60-x}{x+4}-\frac{60}{x}\le 0;$$

$$\frac{4x\cdot(x+4)+(60-x)\cdot 3x-60\cdot 3\cdot(x+4)}{3x\cdot(x+4)}\le 0;\ \frac{4x^2+16x+180x-3x^2-180x-720}{3x\cdot(x+4)}\le 0;$$

$$\frac{x^2+16x-720}{3x\cdot(x+4)}\le 0;(A)$$

Розкладемо квадратний тричлен $x^2+16x-720$ на множники, розв'язавши рівняння $x^2+16x-720=0$. За теоремою Вієта $x_1=-36;\ x_2=20.$ Тоді $x^2+16x-720=(x+36)\cdot(x-20)$ а нерівність *A* набуває вигляду $\frac{(x+36)(x-20)}{3x(x+4)}\le 0.$

Цю нерівність розв'яжемо методом *"змійки"*:



$x\in[-36;-4)\cup(0;20]$.

Так як швидкість величина - не від'ємна, то $[-36;-4)$ не задовольняє умови задачі.

Відповідь: $x\in(0;20]$ *км/год*.

Задача Дві пошоходи вийшли одночасно назустріч один одному і зустрілись через 3 *год* 20 *хв*.

Скільки часу потрібно кожному з них, щоб пройти всю відстань, якщо перший прийде в той пункт, пізніше, ніж другий прийшов у той пункт, з якого вийшов перший?

Розв'язання:

Нехай 1 - вся відстань, *x год* - час першого пішохода, а *y год* - час другого пішохода.

$\frac{1}{x}$ *км/год* - швидкість першого пішохода,

$\frac{1}{y}$ *км/год* - швидкість другого пішохода.

3 год 20 хв = $3\frac{1}{3}$ год.

$\frac{1}{x}\cdot 3\frac{1}{3}$(км) - шлях першого пішохода до зустрічі.

$\frac{1}{y}\cdot 3\frac{1}{3}$(км) - шлях другого пішохода до зустрічі.

Згідно умов задачі складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x-y=5, \\ \frac{1}{x}\cdot 3\frac{1}{3}+\frac{1}{y}\cdot 3\frac{1}{3}=1. \end{cases} \begin{cases} x=5+y, \\ \frac{10}{3x}+\frac{10}{3y}=1. \end{cases} \begin{cases} x=5+y, \\ \frac{30y+30x}{9xy}=1. \end{cases}$$

$$x\neq 0,\ \ y\neq 0.\ \begin{cases} x=5+y, \\ 30y+30x=9xy \,\big|:3 \end{cases} \begin{cases} x=5+y, \\ 10y+10x=3xy. \end{cases}$$

$10y+10\cdot(5+y)=3y\cdot(5+y),\ 10y+50+10y=15y+3y^2,\ 3y^2+15y-20y-50=0,$

$3y^2-5y-50=0,\ D=25+600=625=25^2;$

$y_1=\frac{5-25}{6}=-\frac{20}{6}$ не задовольняє умову задачі.

$y_2=\frac{5+25}{6}=5;\ x_2=5+5=10.$

Відповідь: 10 год - час руху першого пішохода; 5 год - час руху другого пішохода.

Задача Два велосипедисти виїхали з двох пунктів у третій, домовившись прибути в нього одночасно. Перший прибув на місце зустрічі через 2 *год*, а другому, щоб прибути вчасно треба було проїжджати кожний кілометр на 1 *хв* швидше першого, оскільки його шлях був довшим на 6 *км*.
Яка швидкість кожного велосипедиста?

Розв'язання:

Нехай перший велосипедист проїжджав один кілометр за x хвилин, тоді його швидкість $\frac{1}{x}\frac{км}{хв}=\frac{1}{x}\frac{км}{\frac{1}{60}год}=\frac{60}{x}\frac{км}{год}.$ Другий велосипедист проїхав 1 *км* на 1 *хв* швидше, тобто за $(x-1)$ *хв*. Його швидкість $\frac{1}{x-1}\frac{км}{хв}=\frac{1}{x-1}\frac{км}{\frac{1}{60}год}=\frac{60}{x-1}\frac{км}{год}.$

$\frac{60}{x}\cdot 2$ *(км)* - проїхав перший велосипедист за 2 *год*. Так як різниця їхніх шляхів становить 6 *км*, то складаємо рівняння:

$$\frac{60}{x-1}\cdot 2-\frac{60}{x}\cdot 2=6\,\big|:6\ \ \frac{10}{x-1}\cdot 2-\frac{10}{x}\cdot 2=1;\ \ \frac{20}{x-1}-\frac{20}{x}=1;\ \ \left.\begin{matrix} x\neq 1, \\ x\neq 0. \end{matrix}\right\}-ОДЗ$$

$$\frac{20x-20x+20}{(x-1)\cdot x}=1.$$

$20=(x-1)\cdot x,\ 20=x^2-x,\ x^2-x-20=0.$ По теоремі Вієта $x_1=5,\ x_2=-4-$корені квадратного рівняння. Так як час - невід'ємна величина, то число $-4-$не задовольняє умову задачі.

$\frac{60}{5}=12$ *км/год* - швидкість першого велосипедиста.

$\frac{60}{5-1}=15$ *км/год* - швидкість другого велосипедиста.

Відповідь: 12 *км/год;* 15 *км/год*.

№ 13.302 По колу довжиною 60 м рівномірно і в одному напрямку рухаються дві точки. Одна з них робить повний оберт на 5 с швидше другої. При цьому співпадання точок відбувається через одну хвилину.
Визначити швидкість точок.

Розв'язання:

Нехай перша точка здійснює один повний оберт за x секунд, а друга - за y секунд.

Тоді $\frac{60}{x}\frac{м}{с}=\frac{60}{x}\frac{м}{\frac{1}{60}хв}=\frac{3600}{x}\frac{м}{хв}-$швидкість першої точки, а

$\frac{60}{y}\frac{м}{с}=\frac{60}{y}\frac{м}{\frac{1}{60}хв}=\frac{3600}{y}\frac{м}{хв}.$ Якщо $x<y,$ то маємо перше рівняння $y-x=5\,(1)$

Так як точки співпадають через кожну хвилину, то перша точка має пройти повне коло, тобто 60 м і ще ту другу, яку пройде друга точка, тобто

$\frac{3600}{x}=\frac{3600}{y}+60\,(2)$

Маємо таку систему:

$\begin{cases} y-x=5, \\ \frac{3600}{x}=\frac{3600}{y}+60 \,\big|:60 \end{cases}$ $\begin{cases} y=x+5, \\ \frac{60}{x}=\frac{60}{y}+1. \end{cases}$ Цю систему розв'яжемо способом підстановки:

$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+5}=1;\quad \frac{60x+300-60x}{x(x+5)}=1;\quad x(x+5)=300;\quad x^2+5x-300=0;\quad x_1=15;\quad x_2=-20.$

-20 - не задовольняє умову задачі.

$y_1=15+5=20.$

Швидкість першої точки $\frac{60}{15}=4\left(\frac{м}{с}\right);$

Швидкість першої точки $\frac{60}{20}=3\left(\frac{м}{с}\right).$

Відповідь: $4\frac{м}{с};\ 3\frac{м}{с}.$

Задачі на сумісну роботу

№ 13.107 Дві бригади, працюючи разом, повинні були відремонтувати певну частину дороги за 18 днів. Але спочатку працювала тільки перша бригада, а закінчувала роботу сама друга бригада, продуктивність праці якої вища, ніж першої. Ремонт дороги тривав 40 днів, причому перша бригада виконала $\frac{2}{3}$ усієї роботи.

За скільки днів виконала б цю роботу кожна бригада, працюючи окремо?

Розв'язання:

Нехай 1 - вся робота; перша бригада може її виконати за x днів, а друга - за y днів, тоді $\frac{1}{x}$ – продуктивність I бригади, $\frac{1}{y}$ – продуктивність II бригади.

$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ – спільна продуктивність праці, $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 18$ – робота, виконана двома бригадами за 18 днів, тобто вся робота. Складаємо перше рівняння $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 18=1\,(1)$. Оскільки перша бригада виконала $\frac{2}{3}$ усієї роботи, то вона працювала $\frac{2}{3}x$ днів. Друга бригада виконала $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ усієї роботи, тому вона працювала $\frac{1}{3}y$ днів. По умові задачі складаємо рівняння:

$\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=40\,(2)$

Маємо систему рівнянь: $\begin{cases}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 18=1,\,(1)\\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=40\,(2)\ \Big|\cdot 3\end{cases}$ $\begin{cases}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 18=1,\\ 2x+y=120.\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{x+y}{xy}\cdot 18=1\Big|\cdot xy\\ y=120-2x.\end{cases}$

$\begin{cases}(x+y)\cdot 18=xy,\\ y=120-2x.\end{cases}$ $(x+120-2x)\cdot 18=x\cdot(120-2x)$; $(120-x)\cdot 18=120x-2x^2$;

$2x^2-120x+120\cdot 18-18x=0;\ \rightarrow 2x^2-138x+2160=0\,\Big|:2;\ \ x^2-69x+1080=0;$

$D=4761-4320=441=21^2;\ \ x_1=\frac{69-21}{2}=\frac{48}{2}=24;\ \ x_2=\frac{69+21}{2}=45;\ \ y_1=120-2\cdot 24=72;$

$y_2=30.$

Пари чисел $(24;72)$ і $(45;30)$ задовольняють систему рівнянь. Однак пара $(24;72)$ - не задовольняє умову задачі:

$\frac{1}{24}$ – продуктивність праці першої бригади;

$\frac{1}{72}$ – продуктивність праці другої бригади.

$\frac{1}{24}>\frac{1}{72}$, що суперечить умові: продуктивність праці другої бригади вища, ніж першої.

Інша пара $(45;30)$ задовольняє цю умову $\frac{1}{45}<\frac{1}{30}$.

Відповідь: 45 днів, 30 днів.

№ 13.110 Два поїзди виїжджають із пунктів *A* і *B* назустріч один одному. Вони зустрінуться на половині шляху, якщо потяг із *A* виїде на 2 *год* раніше, ніж потяг із *B*. Якщо ж обидва потяги виїдуть одночасно, то через 2 *год* відстань між ними становитиме $\frac{1}{4}$ відстані між пунктами *A* і *B*.

За які проміжки часу кожний потяг проходить цю відстань?

Розв'язання:

Весь шлях приймемо за 1. Нехай перший потяг подолає весь шлях за *x год*, а другий - за *y год*. Перший пройде половину шляху за $\frac{x}{2}$ *год*, а другий за $\frac{y}{2}$ *год*. Враховуючи, що перший потяг вийшов на 2 *год* раніше другого, складаємо рівняння: $\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=2$. $\frac{1}{x}\frac{км}{год}$ – швидкість першого потяга,

$\frac{1}{y}\frac{км}{год}$ – швидкість другого.

Перший потяг за 2 *год* пройде $\frac{1}{x}\cdot 2$ *(км)*. $\frac{1}{y}$ *км* - швидкість другого.

За 2 *год* він пройде $\frac{1}{y}\cdot 2$ *(км)*. У випадку одночасного виходу $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ становитиме відстань між ними. Маємо друге рівняння:

$\frac{2}{x}+\frac{2}{y}=\frac{3}{4}$. Розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=2,\\ \frac{2}{x}+\frac{2}{y}=\frac{3}{4}.\end{cases}$

$\frac{x}{2}=2+\frac{y}{2}=\frac{4+y}{2}$; $\frac{2}{x}=\frac{2}{4+y}$; $\frac{2}{4+y}+\frac{2}{y}=\frac{3}{4}$; $\frac{2y+8+2y}{y\cdot(4+y)}=\frac{3}{4}$; $\frac{4y+8}{y\cdot(4+y)}=\frac{3}{4}$; $\begin{matrix}y\neq 0,\\ y\neq -4.\end{matrix}$

За основною властивістю пропорції маємо:

$4\cdot(4y+8)=3y\cdot(4+y)$; $16y+32=12y+3y^2$; $3y^2+12y-16y-32=0$; $3y^2-4y-32=0$;

$D=16+384=400=20^2$.

$y_1=\frac{4-0}{6}=-\frac{16}{6}$ – не задовольняє умову задачі.

$y_2=\frac{4+20}{6}=\frac{24}{6}=4$. $\frac{x}{2}-\frac{4}{2}=2$; $\frac{x}{2}=4$; $x=8$.

№ 13.290 Якщо дві труби відкрити одночасно, то басейн наповниться за 2 *год* 24 *хв*. В дійсності спочатку була відкрита тільки перша труба протягом $\frac{1}{4}$ часу, необхідного другій трубі, щоб наповнити басейн самостійно. Потім діяла друга труба також протягом $\frac{1}{4}$ часу, необхідного першій трубі, щоб наповнити басейн самостійно. Після цього виявилось, що $\frac{11}{24}$ басейну ще треба наповнити.

Скільки часу потрібно кожній трубі, щоб наповнити басейн самостійно?

Розв'язання:

2 *год* 24 *хв* = $2\frac{24}{60}$ *год* = $2\frac{2}{5}$ *год*.

1 - об'єм всього басейну. Нехай перша труба наповнить басейн за *x год*, а друга з за *y год*, тоді продуктивність першої труби становитиме $\frac{1}{x}$, а другої $\frac{1}{y}$. Спочатку перша труба працювала $\frac{1}{4}y$ *год* і за цей час наповнила $\frac{1}{x}\cdot\frac{y}{4}$ частину басейну, друга труба - $\frac{1}{y}\cdot\frac{x}{4}$ частину басейну, що по умові задачі становить $1-\frac{11}{24}=\frac{13}{24}$.

Отже, маємо рівняння $\frac{y}{4x}+\frac{x}{4y}=\frac{13}{24}$.

При одночасній роботі весь басейн наповниться за $2\frac{2}{5}$ *год*, тобто $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 2\frac{2}{5}=1$.

Розв'яжемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{y}{4x}+\frac{x}{4y}=\frac{13}{24}\Big|\cdot 24\\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 2\frac{2}{5}=1.\end{cases}\quad \begin{cases}6\cdot\frac{y}{x}+6\cdot\frac{x}{y}=13,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1:\frac{12}{5}.\end{cases}$$

Позначимо $\frac{y}{x}=t,\ t\neq 0.$ $\begin{cases}6\cdot t+\frac{6}{t}=13,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12}\Big|\cdot 12xy\end{cases}$ $\begin{cases}6t^2-13t+6=0,\\ 12y+12x=5xy.\end{cases}$ $D=169-144=25=5^2;$

$$t_1=\frac{13-5}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3};\ \ t_2=\frac{13+5}{12}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}.$$

Якщо $\frac{y}{x}=\frac{2}{3};\ y=\frac{2}{3}x;\ 12\cdot\frac{2}{3}x+12x=5x\cdot\frac{2}{3}x;\ 20x=\frac{10}{3}x^2;\ \frac{10}{3}x^2-20x=0;$

$10x\cdot\left(\frac{x}{3}-2\right)=0,\ x\neq 0,\ \frac{x}{3}-2=0,\ x_1=6.\ y_1=\frac{2}{3}\cdot 6=4.\ (6;4)$

Якщо $\frac{y}{x}=\frac{3}{2}$, то $y=\frac{3}{2}x;\ 12\cdot\frac{3}{2}x+12x=5x\cdot\frac{3}{2}x;$

$18x+12x=\frac{15}{2}x^2;\ \frac{15x^2}{2}-30x=0;\ 15x\cdot\left(\frac{x}{2}-x\right)=0,\ x\neq 0,\ \frac{x}{2}-2=0;\ x=4.\ y_2=\frac{3}{2}\cdot 4=6$ $(4;6)$

Відповідь: 4 *год*; 6 *год*.

Задачі на планування

№ 13.062 Учень токаря виточує шахові пішки для певної кількості комплектів шахів. Він хоче виготовляти щоденно на 2 пішки більше, ніж виготовляє зараз, тоді таке саме завдання він виконає на 10 днів швидше.

Якби він виготовляв на 4 пішки більше щоденно, ніж зараз, то строк виконання такого самого завдання зменшився б на 16 днів.
Скільки комплектів шахів забезпечить пішками цей учень, якщо в один комплект входить 16 пішок?

Розв'язання:

Нехай потрібно всього виточити *x* пішок, по y пішок за 1 день, тоді завдання він виконає за $\frac{x}{y}$ днів. Якщо за день виточуватиме по $(y+2)$ пішки, то завдання виконає за $\frac{x}{y+2}$ дні. По умові задачі складаємо рівняння $\frac{x}{y}-\frac{x}{y+2}=10.$ Якщо за день виготовлятиме по $(y+4)$ пішки, то закінчить роботу за $\frac{x}{y+4}$ дні. Звідси - рівняння $\frac{x}{y}-\frac{x}{y+4}=16.$

Розв'яжемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{x}{y}-\frac{x}{y+2}=10, \\ \frac{x}{y}-\frac{x}{y+4}=16.\end{cases} \left.\begin{matrix} y\neq 0, \\ y\neq -2, \\ y\neq -4.\end{matrix}\right\}-ОДЗН \quad \begin{cases}x(y+2)-xy=10y(y+2), \\ x(y+4)-xy=16y(y+4).\end{cases} \begin{cases}xy+2x-xy=10y^2+20y, \\ xy+4x-xy=16y^2+64y.\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x=10y^2+20y, \Big| \cdot(-2) \\ 4x=16y^2+64y.\end{cases}$$

$$+\begin{cases}-4x=-20y^2-40y, \\ 4x=16y^2+64y\end{cases}$$

$$0=-4y^2+4y.$$

$$-4y^2+24y=0,$$

$$4y(-y+6)=0,$$

$$4y\neq 0,\ -y+6=0,\ y=6.$$

$$2x=10\cdot 36+20\cdot 6;\ \ 2x=480,\ \ x=\frac{480}{2}=240.$$

Потрібно виточити всього 240 пішок.
Оскільки в 1 комплект шахів входить 16 пішок, то ними можна забезпечити $240:16=15$ комплектів.
Відповідь: 15 комплектів.

№ 13.328 Бригада рибаків планувала в певний строк виловити 1800 *ц* риби. Третина цього строку був шторм, внаслідок чого планове завдання щоденно недовиконувалось на 20 *ц*. Однак в інші дні бригада виловлювала щодня на 20 *ц* більше денної норми, і тому планове завдання було виконано за 1 день до строку.
Скільки центнерів риби бригада мала виловлювати щоденно?

Розв'язання:

Нехай за x днів планувалося виловити 1800 *ц* риби по y *ц* щодня. Тоді можна скласти таке рівняння $x \cdot y = 1800$ (1). $\frac{1}{3}x$ днів був шторм. В цей час бригада виловлювала по $(y-20)$ *ц* щодня. За цей період вона виловила $(y-20)\cdot\frac{1}{3}x$ *ц*.

$x - \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}x$ днів була нормальна погода.

$\left(\frac{2}{3}x - 1\right)$ днів фактично працювала бригада після шторму, виловлюючи по $(y-20)$ *ц* риби щоденно. За цей строк вона виловила $(y+20)\cdot\left(\frac{2}{3}x-1\right)$ *ц*.

По умові задачі складаємо рівняння:

$$(y-20)\cdot\frac{1}{3}x + (y+20)\cdot\left(\frac{2}{3}x-1\right) = 1800 \ (2).$$

Розв'яжемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} x \cdot y = 1800, (1) \\ (y-20)\cdot\frac{1}{3}x + (y+20)\cdot\left(\frac{2}{3}x-1\right) = 1800 \ (2). \end{cases}$$

$\frac{1}{3}xy - \frac{20x}{3} + \frac{2}{3}xy - y + \frac{40x}{3} - 20 = 1800;$

$xy + \frac{20x}{3} - y - 20 = 1800;$

$1800 + \frac{20x}{3} - y - 20 = 1800;$

$\frac{20x}{3} - y - 20 = 0;$

$y = \frac{20x}{3} - 20 \ (3);$

Підставимо *(3)* в *(1)*:

$x \cdot \left(\frac{20x}{3} - 20\right) = 1800; \ \frac{20x}{3} - 20x - 1800 = 0 \ \big| \cdot 3;$

$20x^2 - 60x - 540 = 0 \ \big| : 20$

$x^2 - 3x - 270 = 0. \ D = 9 + 1080 = 1089 = 33^2.$

$x_1 = \frac{3-33}{3} = -15 -$ не задовольняє умову задачі.

$x_2 = \frac{3+33}{3} = \frac{36}{2} = 18.$

$y = \frac{1800}{18} = 100.$

Щодня планувалося виловлювати по 100 *ц* риби.

Відповідь: 100 *ц*.

№ 13.177 За планом протягом декількох місяців мали виготовити по 6000 телевізорів. Збільшивши продуктивність праці на 70 телевізорів на місяць, вже за місяць до строку перевиконали план на 30 телевізорів.

За скільки місяців планувалося виготовити 6000 телевізорів?

Розв'язання:

Нехай планувалося виготовити 6000 телевізорів за x місяців, тоді за місяць до строку, тобто за $(x-1)$ місяців виготовили $6000+30=6030$ *(телевізорів)*. За планом щомісяця мали виготовляти $\frac{6000}{x}$ телевізорів, а в дійсності виготовляли $\frac{6030}{x-1}$ *(телевізорів)*. Згідно умови задачі складаємо рівняння:

$$\frac{6030}{x-1}-\frac{6000}{x}=70;$$

ОДЗН: $\left[\begin{array}{l} x-1\neq 0, \\ x\neq 0. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x\neq 0, \\ x\neq 1. \end{array}\right.$

$6030x-6000x+6000=70x\cdot(x-1);$

$70x^2-70x-30x-6000=0;\ \ 70x^2-100x-6000=0\,|:10\ \ 7x^2-10x-600=0;$

$D=100+16800=16900=130^2;$

$x_1=\frac{10-130}{14}=-\frac{120}{14}$ – не задовольняє умову задачі;

$x_2=\frac{10+130}{14}=\frac{140}{14}=10.$

Відповідь: 10 місяців.

№ 13.180 Будівельна бригада мала вкласти $432\,м^3$ кладки. Так як бригада зменшилась на 4 чоловіки, то кожному з них довелося вкладати на $9\,м^3$ більше, ніж планувалося.

Скільки чоловік було в бригаді спочатку?

Розв'язання:

Нехай спочатку в бригаді було x чоловік, а потім стало $(x-1)$ чоловік.

Кожний член бригади мав вкласти $\frac{432}{x}\,м^3$ кладки, а фактично виклав $\frac{432}{x-4}\,м^3$.

З умови задачі випливає рівняння $\frac{432}{x-4}-\frac{432}{x}=9\,|:9$

ОДЗН $\left[\begin{array}{l} x-4=0, \\ x\neq 0. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x\neq 4, \\ x\neq 0. \end{array}\right.$

$\frac{48}{x-4}-\frac{48}{x}=1;\ \ 48x-48x+192=x\cdot(x-4);\ \ x^2-4x-192=0.$

По теоремі Вієта $x_1=16;\ x_2=-12$ – не задовольняє умову задачі.

Відповідь: 16 чоловік.

Задачі на залежність між компонентами

№ 13.040 В трьох касах 1410 *грн*. В другій $\frac{1}{3}$ тієї суми, що в першій та ще 60 *грн*. В третій $\frac{1}{3}$ тієї суми, що в другій та ще 30 *грн*.

Скільки гривень у кожній касі?

Розв'язання:

Нехай у першій касі було *x грн*, тоді в другій касі було $\left(\frac{1}{3}x+60\right)$ *грн*, в третій $\left(\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}x+60\right)+30\right)$ *грн*.

Разом у трьох касах було $\left(x+\frac{1}{3}x+60+\frac{1}{9}x+50\right)$ *грн*, що по умові задачі становить 1410 грн.

Рівняння: $x+\frac{1}{3}x+60+\frac{1}{9}x+50=1410;$

$\frac{9x+3x+x}{9}+110=1410;\ \frac{13x}{9}=1410-110;\ \frac{13x}{9}=1300;\ x=1300:\frac{13}{9}=\frac{1300}{1}\cdot\frac{9}{13}=900.$

900 грн було в I касі.

$900\cdot\frac{1}{3}+60=360\ (грн)$ було в II касі.

$360\cdot\frac{1}{3}+30=150\ (грн)$ було в III касі.

Відповідь: *900 грн; 360 грн; 150 грн.*

№ 13.027 Сума квадратів цифр двоцифрового числа дорівнює 13. Якщо від цього числа відняти 9, то утвориться число, записане тими ж самими цифрами, але в зворотному порядку. Знайти це число.

Розв'язання:

Нехай шукане число $\overline{xy}=10x+y,$ де x - цифра десятків, $x>0;$

y - цифра одиниць, $y>0.$

x^2+y^2-сума квадратів цифр, що по умові задачі дорівнює 13.

$x^2+y^2=13.$ Якщо від шуканого числа відняти 9, тобто $\overline{xy}-9=\overline{yx}.$

$10x+y-9=10y+x.$ Розв'яжемо таку систему рівнянь:

$\begin{cases}x^2+y^2=13,\\10x+y-9=10y+x\end{cases}\ \begin{cases}x^2+y^2=13,\\9x-9=9y\end{cases}\ \begin{cases}x^2+(x-1)^2=13,\\y=x-1.\end{cases}$

$x^2+x^2-2x+1-13=0,\ \ 2x^2-2x-12=0\,|:2\ \ x^2-x-6=0,\ \ x_1=3,\ \ x_2=-2-$ не задовольняє умову задачі.

$y_1=3-1=2.$

Відповідь: 32.

№ 13.028 Чисельники трьох дробів пропорційні числам 1, 2, 5, а знаменники відповідно пропорційні числам 1, 3, 7. Середнє арифметичне цих дробів дорівнює $\frac{200}{441}.$

Знайти ці дроби.

Розв'язання:

Нехай *x* - коефіцієнт пропорційності чисельників дробів, тоді вони дорівнюють *x*, *2x, 5x.*

y - коефіцієнт пропорційності знаменників, тоді вони дорівнюють *y, 3y, 7y.*

Тоді задані дроби матимуть вигляд: $\frac{x}{y};\ \frac{2x}{3y};\ \frac{5x}{7y}.$

Середнє арифметичне їх дорівнює: $\dfrac{\frac{x}{y}+\frac{2x}{3y}+\frac{5x}{7y}}{3}$, що по умові задачі становить $\dfrac{200}{441}$.

Маємо рівняння $\dfrac{\frac{x}{y}+\frac{2x}{3y}+\frac{5x}{7y}}{3}=\dfrac{200}{441}$; $\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{21+14+15}{21}=\dfrac{200}{441}\cdot 3$; $\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{50}{21}=\dfrac{200}{147}$;

$\dfrac{x}{y}=\dfrac{200}{147}\cdot\dfrac{21}{50}=\dfrac{4}{7}$;

Перший дріб $\dfrac{x}{y}=\dfrac{4}{7}$; Другий дріб $\dfrac{2x}{3y}=\dfrac{2\cdot 4}{3\cdot 7}=\dfrac{8}{21}$; Третій дріб $\dfrac{5x}{7y}=\dfrac{5\cdot 4}{7\cdot 7}=\dfrac{20}{49}$.

Відповідь: $\dfrac{4}{7}$; $\dfrac{8}{21}$; $\dfrac{20}{49}$.

№ 13.061 Купили 4 різних марки на суму *2 грн. 80 коп.* Вартості цих марок становлять арифметичну прогресію, у якої найбільший член в 2,5 раза більший самого найменшого з них.
Скільки коштує кожна марка?

Розв'язання:

Нехай *x грн.* коштує найдешевша марка, тоді найдорожча марка коштує *2,5 грн.* Знайдемо суму чотирьох членів $\div$ за формулою $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$;

$S_4=\dfrac{x+2{,}5x}{2}\cdot 4=3{,}5x\cdot 27x$; За умовою $S_4=2{,}8$ *грн.* Звідси маємо рівняння $7x=2{,}8$; $x=2{,}8:7=0{,}4$.

$a_1=0{,}4$; $a_4=2{,}5\cdot 0{,}4=1$; За формулою *n*-го члена арифметичної прогресії знайдемо різницю її d.

$a_n=a_1+d(n-1)$; $a_4=a_1+d\cdot(4-1)$; $0{,}4+3d=1$; $3d=0{,}6$; $d=0{,}2$.

Перша марка коштує 0,4 *грн*

Друга марка коштує $0{,}4+0{,}2=0{,}6$ *грн*

Третя марка коштує $0{,}6+0{,}2=0{,}8$ *грн*

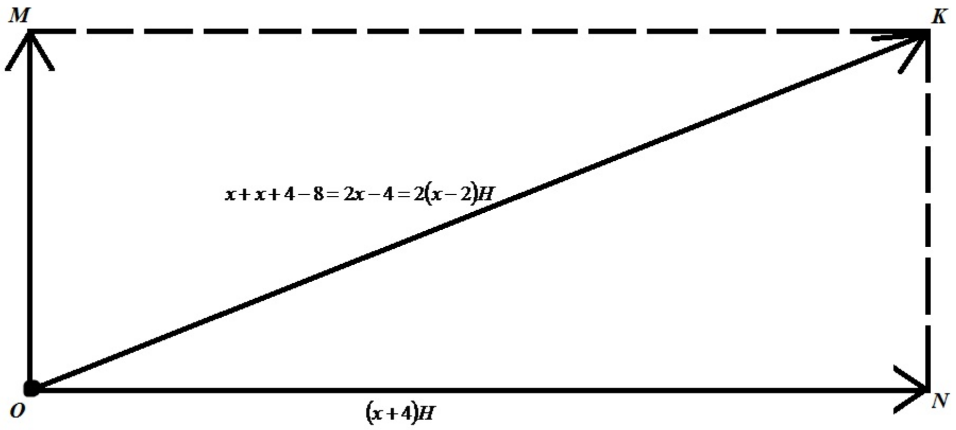
Четверта марка коштує $1{,}2$ *грн*

№ 13.057 Дві сили прикладені в одній точці взаємно перпендикулярні. Величина однієї з них на 4Н більша величини другої, а величина рівнодійної на 8Н менша суми величин даних сил.
Знайти величини даних сил та їх рівнодійну.

Розв'язання:

Нехай величина однієї сили дорівнює x_H, тоді другої - $(x+4)H$.

Рівнодійна цих сил є діагоналлю прямокутника, побудованого на цих сторонах.



В ΔONK $(\angle N = 90^{\circ})$ за теоремою Піфагора маємо:

$OK^2 = KN^2 + ON^2$, $(2(x+2))^2 = x^2 + (x+4)^2$, $4(x^2 - 4x + 4) = x^2 + x^2 + 8x + 16$,

$4x^2 - 16x + 16 - 2x^2 - 8x - 16 = 0$, $2x^2 - 24x = 0$, $2x(x-12) = 0$, $\left[\begin{array}{l} 2x = 0, \\ x - 12 = 0. \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = 12 \end{array}\right.$ –не задовольняє умову заддачі.

Величина сили напрямленої вздовж вектора OM дорівнює $12H$, вздовж вектора ON дорівнює $12 + 4 = 16H$, рівнодійна $2 \cdot (12 - 2) = 20H$.

Відповідь: *12Н, 16Н, 20Н.*

Задачі на відсотки

***Порада**: заміняти відсотки дробами (бажано десятковими).*

№ 13.007 Ціну виробу спочатку знизили на 20%, потім нову ціну знизили на 15%, а через деякий час - знизили на 10%.

На скільки відсотків знизили початкову ціну виробу?

Розв'язання:

Нехай початкова ціна виробу *х грн*, що становить 100%. $20\% = 0{,}2$; $15\% = 0{,}15$; $10\% = 0{,}1$. Тоді $0{,}2x$ *грн* становить перше зниження виробу, а ціна його становитиме $x - 0{,}2x = 0{,}8x$ *грн*. Друге зниження становить $0{,}15 \cdot 0{,}8x = 0{,}12x$ *грн,* а ціна після другого зниження дорівнює $0{,}8x - 0{,}12x = 0{,}68x$ *грн*. Третє зниження $0{,}68x \cdot 0{,}1 = 0{,}068x$ *грн*. Ціна після третього зниження $0{,}68x - 0{,}068x = 0{,}612x$ *грн*. За три рази ціна виробу знизилась на $x - 0{,}612x = 0{,}388x$ *грн*.

Складаємо пропорцію: нехай $t\%$ становить $0{,}388$ грн.

$\begin{array}{l} x - 100\% \\ 0{,}388x - t\% \end{array}$ $\dfrac{x}{0{,}388x} = \dfrac{100}{t}$; $\dfrac{1}{0{,}388} = \dfrac{100}{t}$; За основною властивістю пропорції маємо: $t \cdot 1 = 0{,}388 \cdot 100$; $t = 38{,}8$.

Початкова ціна виробу знизилась на $38{,}8\%$.

Відповідь: на $38{,}8\%$.

№ 13.049 Одне з невідомих чисел становить 140% другого, а відношення першого і третього становить $\frac{14}{11}$. Різниця між третім і другим на 40 одиниць менша числа, яке становить 12,5% суми першого та другого чисел.
Знайти ці числа.

Розв'язання:

$140\% = 1{,}4;\ 12{,}5\% = 0{,}125.$

Нехай x - друге число, тоді $1{,}4x -$ перше число.

По умові задачі $\frac{1{,}4x}{III\text{ число}} = \frac{14}{11}$; III число $= 1{,}4x : \frac{14}{11} = \frac{1{,}4x}{1} \cdot \frac{11}{14} = \frac{11x}{10} = 1{,}1x.$

$1{,}1x - x = 0{,}1x -$ різниця між третім і другим числом.

$0{,}125 \cdot (1{,}4x + x) = 0{,}125 \cdot 2{,}4x = 0{,}3x$ дорівнює $12{,}5\%$ суми першого та другого чисел.

Згідно умови задачі складаємо рівняння:

$0{,}1x = 0{,}3x - 40;\ -0{,}2x = -40;$

$x = -40 : (-0{,}2) = 200.\ 200 -$ друге число.

$200 \cdot 1{,}4 = 280 -$ перше число,

$200 \cdot 1{,}1 = 220 -$ третє число.

Відповідь: 280; 200; 220.

№ 13.154 За *1 кг* одного продукту та *10 кг* другого, заплатили *2 грн.* Якщо перший продукт подорожчає на 15%, а другий подешевшає на 25%, то за таку саму кількість цих продуктів треба заплатити *1 грн. 82 коп.*
Скільки коштує *1 кг* кожного продукту?

Розв'язання:

Нехай *x грн.* коштує *1 кг* I продукту, *y грн. - 1 кг* II продукту.

$15\% = 0{,}15;\ 25\% = 0{,}25;$ *1 грн. 82 коп. = 1,82 грн.*

Після подорожчання I продукту *1 кг* його коштуватиме $(x + 0{,}15x)$ *грн.*

Після зниження цін *1 кг* II продукту коштуватиме $(y - 0{,}25y)$ *грн.*

По умовах задачі складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + 10y = 2, \\ x + 0{,}15x + 10(y - 0{,}25y) = 1{,}82. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 - 10y, \\ 1{,}15x + 7{,}5y = 1{,}82. \end{cases}$$

$1{,}15 \cdot (2 - 10y) + 7{,}5y = 1{,}82;\ 2{,}3 - 11{,}5y + 7{,}5y = 1{,}82;\ -4y = -0{,}48;\ y = -0{,}48 : (-4) = 0{,}12.$

$x = 2 - 10 \cdot 0{,}12 = 2 - 1{,}2 = 0{,}8.$

0,8 грн. коштує *1 кг* першого продукту.

0,12 грн. коштує *1 кг* другого продукту.

Відповідь: *0,8 грн; 0,12 грн.*

Задачі на суміші та сплави

№ 13.041 Змішали 30%-вий розчин соляної кислоти з 10%-вим і отримали 600 г 15%-го розчину.
Скільки грамів кожного розчину було взято?

Розв'язання:

$30\% = 0{,}3;\ 10\% = 0{,}1;\ 15\% = 0{,}15.$

Нехай 30%-го розчину взяли *x г,* а 10%-го – *y г.* Тоді соляної кислоти в 30%-ому розчині міститься 0,3*x г,* а в 10%-му – 0,14*y г.* В 15%-му розчині $0{,}15\cdot 600=90$ *(г)* кислоти.

По умовах задачі складаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+y=600\,(1) \\ 0{,}3x+0{,}1y=90\,(2)\big|\cdot(-10) \end{cases} \quad + \begin{cases} x+y=600 \\ -3x-y=-900 \end{cases}$$

$$-2x=-300;$$

$$x=\frac{-300}{-2}=150.$$

$$150+y=600;\;\; y=600-150=450.$$

Відповідь: *150 г; 450 г.*

Задача. З посудини, наповненої спиртом, відлили частину спирту і долили таку саму за об'ємом кількість води. Потім з посудини відлили стільки літрів суміші, скільки першого разу відлили спирту, після чого в посудині залишилося 49 *л* чистого спирту. Наповнена посудина містила 64 *л* спирту. Скільки літрів спирту відливали з посудини кожного разу?

Розв'язання:

Нехай першого разу відлили *x л* спирту, тоді $(64-x)$ *л* спирту залишилося. Після того, як в посудину долили *x л* води, то суміші в ній стало $64-x+x=64$ *(л)*.

В одному літрі суміші міститься $\frac{64-x}{64}$ *л* спирту. Другого разу відлили *x л* суміші, в них є $\frac{64-x}{64}\cdot x$ *л* спирту.

За два рази з посудини відлили $64-49=15$ *(л)* спирту. З другого боку, відлитий спирт становить $\left(x+\frac{64-x}{64}\cdot x\right)$ *л*. Маємо рівняння:

$$x+\frac{64-x}{64}\cdot x=15\big|\cdot 64 \;\; 64x+(64-x)\cdot x=15\cdot 64; \;\; 64x+64x-x^2=960; \;\; x^2-128x+960=0;$$

$$D=16384-3840=12544=112^2; \;\; x_1=\frac{128-112}{2}=8; \;\; x_2=\frac{128+112}{2}=\frac{240}{2}=120.$$

120 *л* не задовольняє умову задачі, бо $120>64$.

8 *л* спирту відлили першого разу.

$\frac{64-8}{64}\cdot 8=\frac{56}{8}=7$ *(л)* спирту відлили другого разу.

Відповідь: *8 л; 7 л.*

Завдання для самостійної роботи:

Задачі збірника конкурсних задач за редакцією М.І. Сканаві

№ 13.077 Старший брат на мотоциклі, а молодший на велосипеді здійснили двохгодинну беззупиночну поїздку до лісу і назад. При цьому мотоцикліст проїжджав кожний кілометр на *4 хв* швидше, ніж велосипедист.

Скільки кілометрів проїхав кожний з братів за *2 год*, якщо відомо, що старший брат подолав шлях за цей час на *40 км* більший.
Відповідь: *20 км; 60 км.*
№ 13.222 Відстань між станціями *A* і *B* дорівнює *103 км.* Із *A* в *B* вийшов потяг, який після деякої зупинки продовжував рухатись зі швидкістю на $4\,\frac{км}{год}$ більшою від попередньої.
Знайти початкову швидкість потягу, якщо шлях, що залишився до *B* на *23 км* довший шляху пройденого до зупинки, і на шлях після зупинки на *15 хв* більше, ніж до зупинки.
Відповідь: $80\,\frac{км}{год}$.
№ 13.112 Два тіла рухаються назустріч одне одному з двох пунктів, відстань між якими 390 *м.* Перше тіло пройшло за першу секунду 6*м*, а друге за кожну наступну проходило на 6 *м* більше, ніж за попередню. Друге тіло рухалось рівномірно зі швидкістю 12 *м/с* і розпочало рух на 5 *с* пізніше першого. Через скільки секунд після початку руху першого тіла вони зустрінуться?
Відповідь: через 10 *с.*
№ 13.130 Два товариші каталися в одному човні вздовж берега річки за течією і повернулися по тому ж річковому шляху через 5 *год* з початку руху. Весь рейс становить 10 *км.* По їхніх розрахунках вийшло, що на кожні 2 *км* проти течії потрібно стільки часу, скільки на 3 *км* за течією.
Знайти швидкість течії та часу руху за течією річки і час проти течії.
Відповідь: $\frac{5}{12}$ *км/год; 2 год; 3 год.*
№ 13.284 Знайти швидкість і довжину потягу, якщо він проходить зі сталою швидкістю повз нерухомого спостерігача протягом 7 *с* і витратив 25 *с* на то, щоб проїхати з тією ж швидкістю вздовж платформи довжиною 378 *м*.
Відповідь: 75,6 *км/год* і 147 *м*.
№ 13.317 Один турист вийшов о 6 *год,* а другий - назустріч йому о 7 *год.*
Зустрілись вони вони о 8 *год* і не зупиняючись, продовжували рух.
Скільки часу затратив кожний з них на весь шлях, якщо перший пройшов у те місце, з якого вийшов другий, на 28 *хв* пізніше, ніж другий прийшов у те місце з якого вийшов перший?
Вважається, що кожний рухався без зупинок зі сталою швидкістю.
Відповідь: *3 год 10 хв; 2 год 12 хв.*
№ 13.096 Велосипедист за кожну хвилину проїжджає на 500 *м* менше, ніж мотоцикліст, а тому на шлях в 120 *км* витрачає часу на 2 *год* більше, ніж мотоцикліст.
Обчислити швидкість кожного з них.
Відповідь: *30 км/год; 60 км/год.*
№ 13.126 По двох концентричних колах рівномірно рухаються дві точки. Одна з них здійснює повний оберт на 5 *с* швидше, ніж друга, і тому встигає зробити за 1 хвилину на 2 оберти більше.
Скільки обертів за хвилину здійснює кожна точка?

Відповідь: 4; 6.
№ 13.135 Бригада слюсарів може виконати певне завдання на 15 *год* швидше, ніж бригада учнів. Якщо бригада учнів витрачає 18 *год*, а потім бригада слюсарів продовжить виконання цього завдання протягом 6 *год*, то і тоді буде виконано тільки $\frac{2}{3}$ всього завдання.
Скільки часу потрібно бригаді учнів для виконання самостійно цього завдання?
Відповідь: 45 *год.*
№ 13.142 Посудина наповнюється двома кранами *А* і *В.* Наповнення посудини тільки через кран *А* триває на 22 *хв* довше, ніж через кран *В.* Якщо відкрити обидва крани, то посудина наповниться за 1 *год.*
Відповідь: *2 год 12 хв; 1 год 50 хв.*
Задача Токар мав виготовити 272 деталі за певний час. Через 10 днів після початку роботи токар почав перевиконувати денну норму на 4 деталі і тому за день до строку він виготовив 280 деталей.
Скільки деталей виготовить токар в строк?
Відповідь: 300 деталей.
№ 13.055 На вагоноремонтному заводі в певний строк мали відремонтувати 330 вагонів. Ремонтуючи за тиждень на 3 вагони більше, вже за два тижні до строку було відремонтовано 297 вагонів.
Скільки вагонів за тиждень ремонтували?
Відповідь: 33 вагони.
Задача Бригада мала виготовити 8000 деталей за певний час. Фактично вона закінчила роботу на 8 днів раніше, бо виготовляла щодня на 50 деталей більше, ніж планувалося.
За скільки днів планувалося виготовити 8000 деталей?
Відповідь: 40 днів.
№ 13.181 Бригада робітників електролампового цеха мала зробити за зміну 7200 деталей, причому кожний робітник мав виготовити однакову кількість ламп. Троє робітників захворіли, і тому для виконання плану кожному робітникові довелося зробити на 400 деталей більше.
Скільки робітників було в бригаді?
Відповідь: 9 робітників.
№ 13.015 Турист проїхав відстань між містами за 3 дні. За перший день він проїхав $\frac{1}{5}$ всього шляху та ще 60 *км*, за другий - $\frac{1}{4}$ всього шляху та ще 20 *км*, за третій день $\frac{23}{80}$ всього шляху та 25 *км*, що залишилося.
Знайти відстань між містами?
Відповідь: 400 *км.*
№ 13.119 Добуток цифр двоцифрового числа втроє менший самого числа. Якщо до шуканого числа додати 18, то утвориться число, записане тими самими цифрами, але в зворотному порядку.
Знайти це число.

Відповідь: 24.

№ 13.042 Площі трьох ділянок землі пропорційні числам $\frac{11}{14}$; $\frac{11}{6}$; і $\frac{11}{8}$.

З першої ділянки зібрали зерна на 72 *ц* більше, ніж з другої. Середня врожайність становить 18 *ц* з 1 *га*.
Знайти площу всіх трьох ділянок.
Відповідь: 26 *га.*

Задача Знайти чотири числа, які утворюють пропорцію, якщо сума крайніх членів дорівнює 14, сума середніх членів дорівнює 11, а сума квадратів цих чотирьох чисел дорівнює 221.
Відповідь: *12; 8; 3; 2.*

№ 13.344 Величини двох сил, що діють на матеріальну точку під прямим кутом, і величина їх рівнодійної утворюють арифметичну прогресію.
В якому відношенні знаходяться величини цих чисел?
Відповідь: *3:4:5.*

№ 13.013 В січні завод виконав 105% місячного плану випуску продукції. В лютому він дав на 4% більше, ніж у січні.
На скільки відсотків завод перевиконав двохмісячний план випуску продукції?
Відповідь: на 7,1%.

№ 13.036 Свіжі гриби містять за масою 90% води, а сухі - 12% води.
Скільки утвориться сухих грибів з 22 *кг* свіжих?
Відповідь: 2,5 *кг.*

№ 13.075 Два робітники за зміну виготовили разом 72 деталі. Після того, як перший підвищив свою продуктивність праці на 15%, а другий - на 25%, то разом за зміну вони стали виготовляти 86 деталей.
Скільки деталей за зміну виготовляє кожний робітник після підвищення продуктивності праці?
Відповідь: 46 деталей; 40 деталей.

№ 13.090 Є кусок сплаву міді з оловом загальною масою 12 *кг,* що містить 45% міді. Скільки чистого олова треба додати до цього куска, щоб новий сплав містив 40% міді?
Відповідь: 1,5 *кг.*

№ 13.341 З посудини,наповненої кислотою, відлили декілька літрів і долили водою, потім знову відлили стільки ж літрів розчину, тоді в посудині залишилося 24 *л* чистої кислоти.
Об'єм посудини 54 *л.*
Скільки літрів кислоти відлили першого разу і скільки другого разу?
Відповідь: 18 *л*; 12 *л.*

Задача Робітник отримував 300 *грн.* зарплати за місяць. Зарплата збільшилась на 10%, а вартість товару збільшилась на 5%.
На скільки відсотків збільшилась реальна зарплата робітника?
Відповідь: на 5%.

Задача Видобуте вугілля містить 2% води. Через деякий час масова частина води становить 15%.

На скільки збільшилась маса 17 т видобутого вугілля за той самий час?
Відповідь: на 2,21 т.

Задача За встановлення самого нижнього залізобетонного кільця криниці заплатили 26 *грн.*, а за кожне наступне кільце платили на 2 *грн.* менше, ніж за попереднє. Крім того, після закінчення роботи заплатили ще 40 *грн.* Середня вартість встановленого кільця виявилась рівною $22\frac{4}{9}$ *грн.*

Скільки кілець було встановлено?
Відповідь: 9 кілець.