Розділ 16
Тригонометричні нерівності

Майже чверть століття тригонометричні нерівності перестали пропонуватися абітурієнтам на вступних іспитах з математики. Чому це так? Відповідь залишається загадкою. Правда, в останні п'ять років окремі ВУЗи України відмовилися від цієї "моди".

Адже, при розв'язуванні рівнянь та їх систем, які містять крім тригонометричних функцій корені або логарифми, ОДЗН часто задається тригонометричними нерівностями. Важко переоцінити роль тригонометричних нерівностей при розв'язуванні вправ з допомогою похідної монотонності тригонометричних функцій не певних числових проміжках.

Доцільно пригадати означення одиничного кола, осей синуса, косинуса, тангенса і котангенса; значення тригонометричних функцій деяких аргументів.

Коло, центр якого знаходиться в початку системи координат, а радіус дорівнює одиниці, називається одиничним.

Вертикальний діаметр одиничного кола називається віссю синусів, горизонтальний - віссю косинусів. Дотична до одиничного кола в точці *(1; 0)* називається віссю тангенсів, а в точці *(0; 1)* - віссю котангенсів.

Розв'язування всякої тригонометричної нерівності шляхом перетворень зводиться до розв'язування найпростіших нерівностей:

1). $\sin x \le a.$

а). при $|a| \le 1$ $-\arcsin a + (2\pi - 1)\cdot \pi \le x \le \arcsin a + 2\pi n, n \in Z.$

б). при $a \ge 1$ $x -$ будь яке дійсне число.

в). при $a < -1$ $x \in \varnothing.$

2). $\sin x \ge a.$

а). при $|a| \le 1$ $\arcsin a + 2\pi n \le x \le -\arcsin a + (2n+1)\cdot \pi, n \in Z.$

б). при $a > 1$ $x \in \varnothing.$

в). при $a < -1$ $x -$ будь яке дійсне число.

3). $\cos x \le a.$

а). при $|a| \le 1$ $\arccos a + 2\pi n \le x \le -\arccos a + (n+1)\cdot 2\pi, n \in Z.$

б). при $a \ge 1$ $x -$ будь яке дійсне число.

в). при $a < -1$ $x \in \varnothing.$

4). $\cos x \ge a.$

а). при $|a| \le 1$ $-\arccos a + 2\pi n \le x \le \arccos a + 2\pi n, n \in Z.$

б). при $a > 1$ $x \in \varnothing.$

в). при $a \le -1$ $x -$ будь яке дійсне число.

5). $tgx \le a.$

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n \le x \le arctga + \pi n, n \in Z.$$

6). $tgx \ge a.$

$$arctga + \pi n \le x \le \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

7). $ctgx \le a.$

$$arctga + \pi n \le x < (n+1)\pi, n \in Z.$$

8). $ctgx \ge a.$

$$\pi n < x \le arctga + \pi n, n \in Z.$$

В процесі розв'язування тригонометричних нерівностей крім тотожних перетворень корисно вводити допоміжну змінну.

Після того, як шляхом тотожних перетворень нерівність зведена до найпростішої, можна завершити її розв'язання одним із трьох способів:

1). використання формул розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей;

2). використання одиничного кола;

3). використання графіка тригонометричної функції, яка утворилася внаслідок тотожних перетворень.

Розв'язати нерівність:

$$\frac{5}{4}\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 2x > \cos 2x.$$

Розв'язання:

Зведемо всі члени нерівності до однієї функції. Застосуємо формули пониження степенів до лівої частини нерівності:

$$\frac{5}{4}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\cdot\left(1-\cos^2 2x\right) > \cos 2x \,|\times 8;$$

$$5(1-\cos 2x) + 2\left(1-\cos^2 2x\right) > 8\cos 2x;$$

$$5 - 5\cos 2x + 2 - 2\cos^2 2x - 8\cos 2x > 0;$$

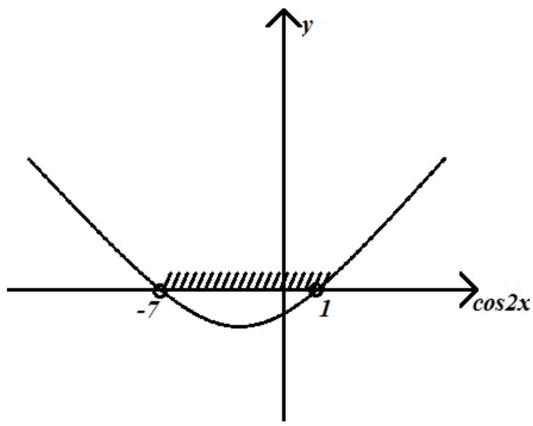
$$-2\cos^2 2x - 13\cos 2x + 7 > 0 \,|\times(-1);$$

$$2\cos^2 2x + 13\cos 2x - 7 < 0.$$

Розв'яжемо квадратичну нерівність відносно $\cos 2x$:

$$D = 13^2 - 4\cdot 2\cdot(-7) = 169 + 56 = 225 = 15^2;$$

$$\cos 2x = \frac{-13-15}{4} = -7; \quad \cos 2x = \frac{-13+15}{4} = \frac{1}{2}.$$



$$-7 < \cos 2x < \frac{1}{2}.$$

Нерівність $-7 < \cos 2x$ виконується при будь-яких дійсних значеннях x.

Розв'яжемо нерівність $\cos 2x < \frac{1}{2}$. Так як $\left|\frac{1}{2}\right| \le 1$, то використовуючи формулу *(3)*, дістанемо розв'язки цієї нерівності:

$$\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n \le 2x \le -\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n;$$

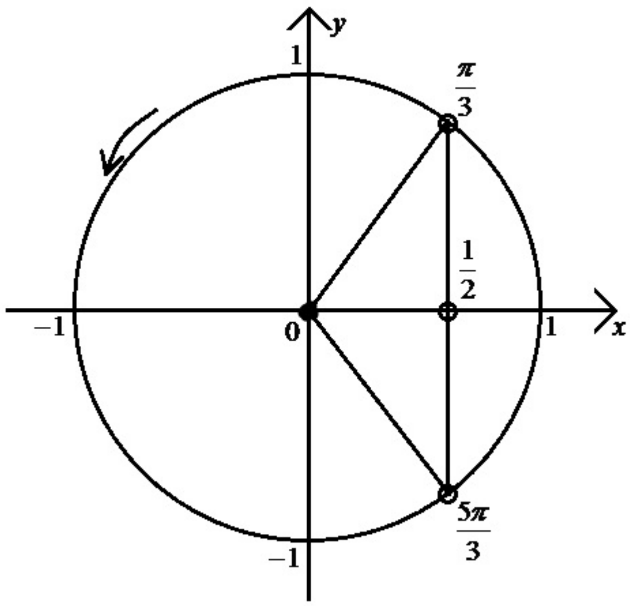
$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le 2x \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi n;$$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le 2x \le \frac{5\pi}{3} + 2\pi n \Big| : 2;$$

$$\frac{\pi}{6} + \pi n \le x \le \frac{5\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

Відповідь: $\left[\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \frac{5\pi}{6} + \pi n\right],\ n \in Z.$

Нерівність $\cos 2x < \frac{1}{2}$ можна розв'язати за допомогою одиничного кола.



Короткий алгоритм розв'язання нерівностей за допомогою одиничного кола:

1). побудувати одиничне коло;

2). на осі косинусів позначити число $\frac{1}{2}$ (мініатюрним колом у випадку строгої нерівності і заштрихованим кружечком у випадку нестрогої нерівності);

3). через точку $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ провести хорду, паралельну осі ординат (точки її перетину з колом позначити так, як позначена точка перетину хорди на осі абсцис);

4). точки перетину хорди з колом сполучити відрізками з початком координат;

5). жирнішим навести частину осі косинусів та частину кола, яка відповідає;

6). враховуючи період тригонометричної функції, записуємо результат, а після його спрощення (в разі потреби) - його відповідь (бажано у вигляді числового проміжка).

Третій спосіб розв'язування нерівності $\cos x < \frac{1}{2}$ полягає в тому, що:

1). будуємо графіки двох функцій $y = \cos 2x$ та $y = \frac{1}{2}$;

2). позначаємо точки їх перетину;
3). проектуємо ці точки на вісь абсцис;
4). Як проміжний результат, записати числовий проміжок, на якому графік функції $y = \cos 2x$ розміщений нижче графіка функції $y = \frac{1}{2}$.

5). з урахуванням періоду функції $y = \cos 2x$ і після тотожних перетворень записати відповідь.

$5 + 2\cos 2x \le 3 \cdot |2\sin x - 1|.$

Розв'язання:

Зведемо до однієї функції та одного аргументу:

$5 + 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \le 3 \cdot |2\sin x - 1|;$

$5 + 2(1 - \sin^2 x - \sin^2 x) \le 3 \cdot |2\sin x - 1|;$

$5 + 2(1 - 2\sin^2 x) \le 3 \cdot |2\sin x - 1|;$

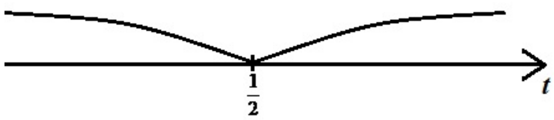
$5 + 2 - 4\sin^2 x \le 3 \cdot |2\sin x - 1|;$

$7 - 4\sin^2 x \le 3 \cdot |2\sin x - 1|;$

Нехай $\sin x = t$, тоді

$7 - 4t^2 \le 3 \cdot |2t - 1|;$

$2t - 1 = 0,\ 2t = 1,\ t = \frac{1}{2}.$



На $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. $2t - 1 < 0,\ |2t - 1| = 1 - 2t,$ а нерівність набуває вигляду:

$7 - 4t^2 \le 3 \cdot (1 - 2t);$

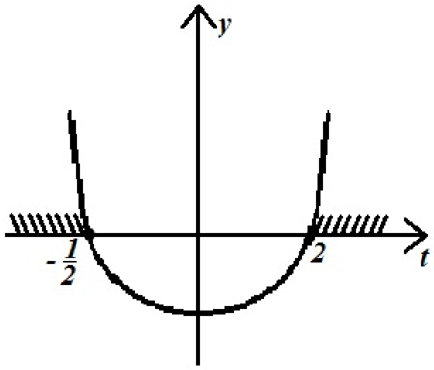
$7 - 4t^2 - 3 \cdot (1 - 2t) \le 0;$

$7 - 4t^2 - 3 + 6t \le 0;$

$-4t^2 + 6t + 4 \le 0 \,|: (-2);$

$2t^2 - 3t - 2 \ge 0;\ D = 9 + 16 = 25 = 5^2;$

$t_1 = \frac{3 - 5}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2};\ t_2 = \frac{3 + 5}{4} = 2.$



$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \subset \left(-\infty; \frac{1}{2}\right).$

$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ – розв'язок нерівності.

$(2; +\infty) \not\subset \left(-\infty; \frac{1}{2}\right).$

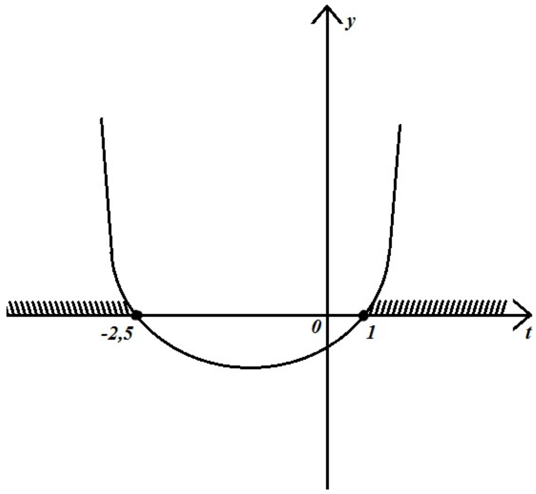
$(2; +\infty)$ – не є розв'язком нерівності.

На $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ $2t-1>0,\ |2t-1| = 2t-1.$

$7-4t^2 \le 3\cdot(2t-1);\ 7-4t^2-3\cdot(2t-1)\le 0;$

$7-4t^2-6t+3\le 0;\ -4t^2-6t+10\le 0\,|:(-2);$

$2t^2+3t-5\ge 0.\ D = 9+40 = 49 = 7^2,\ t_1 = \frac{-3+7}{4} = 1;\ t_2 = \frac{-3-7}{4} = -2{,}5.$



$y = 2t^2+3t-5.$

$(-\infty; -2{,}5] \not\subset \left[\frac{1}{2}; +\infty\right).$

$(-\infty; -2{,}5]$ не є розв'язком нерівності.

$[1; +\infty) \subset \left[\frac{1}{2}; +\infty\right),$ значить $[1; +\infty)$ – є розв'язком нерівності.

$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$ – розв'язок нерівності $7-4t^2 \le 3\cdot|2t-1|.$

Повертаючись до підстановки, дістанемо:

$\sin x \le -\frac{1}{2}$. По формулі *1)* маємо:

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + (2n-1)\pi \le x \le \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,$$

$$-\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\pi n - \pi \le x \le -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,$$

$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \le x \le -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

$\sin x \ge 1.$ Ця нерівність правильна тільки при *x,* що задовольняє рівняння $\sin x = 1,$ тобто при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

Відповідь: $\left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right\}, n \in Z.$

$\sin^6 x + \cos^6 x > \frac{13}{16}.$

Розв'язання:

Ліва частина цієї нерівності потребує потужних перетворень для того, щоб остання стала найпростішою.

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = \overbrace{\left(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1}\right) \cdot (\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x)}^{\text{сума кубів}} =$$

$$= \overbrace{\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x}^{\text{квадрат суми}} - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$= \left(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1}\right)^2 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$= 1 - 3 \cdot \frac{2\sin x \cdot \cos x \cdot 2\sin x \cdot \cos x}{2 \cdot 2} = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} =$$

$$= 1 - \frac{3}{8} \cdot (1 - \cos 4x) = 1 - \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x.$$

Тоді вихідна нерівність матиме вигляд:

$\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x > \frac{13}{16},\ \frac{3}{8}\cos 4x > \frac{13}{16} - \frac{5}{8},\ \frac{3}{8}\cos 4x > \frac{13}{16}\Big| \times \frac{8}{3},\ \cos 4x > \frac{1}{2}.$ За формулою *(4)* маємо:

$$-\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n < 4x \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 4x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n < x < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;\ \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right),\ n \in Z;$

$\sin 2x + tgx \ge 2.$

Розв'язання:

Так як $tgx = \frac{\sin x}{\cos x},$ то ОДЗН $\cos x \ne 0,$ тобто $x \ne \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

Використовуючи формулу тангенса половинного аргументу $\sin 2x = \dfrac{2tgx}{1+tg^2 x}$,

дістанемо нерівність, еквівалентну вихідній:

$\dfrac{2tgx}{1+tg^2 x} + tgx \geq 2;$ Після заміни $tgx = t$ маємо:

$\dfrac{2t}{1+t^2} + t - 2 \geq 0, \left| \times \left(1+t^2\right) \right.$, бо $1+t^2 > 0,$ $2t + t\left(1+t^2\right) - 2\left(1+t^2\right) \geq 0,$ $2t + t + t^3 - 2 - 2t^2 \geq 0,$

$t^3 - 2t^2 + 3t - 2 \geq 0.$

$\pm 1;$ $\pm 2 -$ дільник вільного члена.

$1:$ $1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 0,$ а тому 1 - корінь рівняння $t^3 - 2t^2 + 3t - 2 = 0,$

$$
\begin{array}{r|l}
-\; t^3 - 2t^2 + 3t - 2 & t - 1 \\
\cline{2-2}
t^3 - t^2 \qquad\quad & t^2 - t + 2 \\
\cline{1-1}
-\; -t^2 + 3t \qquad & \\
-t^2 + t \qquad & \\
\cline{1-1}
-\; 2t - 2 & \\
2t - 2 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$t^2 - t + 2 = 0,$ $D = 1 - 8 = -7 < 0.$ Це рівняння коренів не має. Нерівність

$t^3 - 2t^2 + 3t - 2 \geq 0$ рівносильна такій нерівності $(t-1) \cdot \left(\underbrace{t^2 - t + 2}_{>0}\right) \geq 0,$ отже $t - 1 \geq 0,$

$t \geq 1.$ $tgx \geq 1.$

$\dfrac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in Z.$

Відповідь: $\left[\dfrac{\pi}{4} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z.$

$\cos^2 x < \dfrac{3}{4}.$

Розв'язання:

Застосуємо формулу пониження степенів $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}.$

Нерівність набуває вигляду:

$\dfrac{1+\cos 2x}{2} < \dfrac{3}{4} \left| \times 2; \right.$ $1 + \cos 2x < \dfrac{3}{4},$ $\cos 2x < \dfrac{1}{2}.$ За формулою *(3)*:

$\arccos\dfrac{1}{2} + 2\pi n < 2x < -\arccos\dfrac{1}{2} + 2\pi(n+1);$

$\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n < 2x < -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n + 2\pi;$

$\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n < 2x < \dfrac{5}{3}\pi + 2\pi n \left| : 2; \right.$

$\dfrac{\pi}{6} + \pi n < x < \dfrac{5\pi}{6} + \pi n,$ $n \in Z.$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+\pi n\right), n\in Z.$

$\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)>\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Розв'язання:

Так як синус - функція непарна, то

$\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\sin\left(-\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right)=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right).$ Нерівність виглядає так:

$-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)>\frac{\sqrt{3}}{2}\Big|\times(-1),\ \ \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)<-\frac{\sqrt{3}}{2},$

$-\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\pi(2n-1)<2x-\frac{\pi}{3}<\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi n,$

$\frac{4\pi}{3}+2\pi n<2x-\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}+2\pi n\Big|+\frac{\pi}{3};$

$\frac{5\pi}{3}+2\pi n<2x<2\pi+2\pi n\big|:2;$

$\frac{5\pi}{6}+\pi n<x<\pi+\pi n, n\in Z.$

Відповідь: $\left(\frac{5\pi}{6}+\pi n;\pi+\pi n\right), n\in Z.$

$\cos^2\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)>\frac{3}{4}.$

Розв'язання:

$\frac{1+\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)}{2}>\frac{3}{4};\ \ 1+\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)>\frac{3}{2};\ \ \cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)>\frac{1}{2};$

$-\arccos\frac{1}{2}+2\pi n<3x+\frac{\pi}{6}<\arccos\frac{1}{2}+2\pi n;$

$-\frac{\pi}{3}+2\pi n<3x+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}+2\pi n\Big|-\frac{\pi}{6};$

$-\frac{\pi}{2}+2\pi n<3x<\frac{\pi}{6}+2\pi n\big|:3;$

$-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}<x<\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}.$

Відповідь: $\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3};\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\right), n\in Z.$

$\sin\frac{\pi}{x-1}<\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Розв'язання:

$\sin\frac{\pi}{x-1}<\frac{\sqrt{2}}{2};\ \ -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi(2n-1)<\frac{\pi}{x-1}<\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi n,$

$\frac{3\pi}{4}+2k\pi<\frac{\pi}{x-1}<\frac{9\pi}{4}+2k\pi\big|:\pi;$

$\frac{3}{4}+2k<\frac{1}{x-1}<\frac{9}{4}+2k;\ \frac{3+8k}{4}<\frac{1}{x-1}<\frac{9+8k}{4};$

"Перевернемо" подвійну нерівність: 1). $k=-1;$

$\frac{4}{8k+9}<x-1<\frac{4}{3+8k}\Big|+1;\ 1+\frac{4}{8k+9}<x<\frac{4}{3+8k}+1;\ \frac{8k+9+4}{8k+9}<x<\frac{4+8k+3}{3+8k};$

$\frac{8k+13}{8k+9}<x<\frac{8k+7}{3+8k};$

2). При $k=-1;$

$-\frac{5}{4}<\frac{1}{x-1}<\frac{1}{4},\ \frac{1}{x-1}\neq 0;\ -\frac{5}{4}<\frac{1}{x-1}<0;\ 8<x-1<-\frac{4}{5};\ 4<x-1<\infty,\ x<\frac{1}{5}$ або $x>5.$

Відповідь: $x<\frac{1}{5},\ x>5,$ при $k-1.$

$\frac{8k+13}{8k+9}<x<\frac{8k+7}{8k+3},$ при $k\neq -1.$

$\cos\left(2\pi\cdot\sin\frac{\pi x}{2}\right)<-\frac{1}{2}.$

Розв'язання:

$\frac{2\pi}{3}+2k\pi<2\pi\cdot\sin\frac{\pi x}{2}<\frac{4\pi}{3}+2n\pi,\Big|:2\pi$

$\frac{1}{3}+n<\sin\frac{\pi x}{2}<\frac{2}{3}+n.$ Так як $\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\leq 1,$ то для справдження цієї нерівності

необхідно що $n=0,\ \frac{1}{3}<\sin\frac{\pi x}{2}<\frac{2}{3}$ *(A)* або

$n=-1,\ \frac{1}{3}-1<\sin\frac{\pi x}{2}<\frac{2}{3}-1,\ -\frac{2}{3}<\sin\frac{\pi x}{2}<-\frac{1}{3}$ *(B)*

Піднесемо нерівність *(A)* до квадрату:

$\frac{1}{9}<\sin^2\frac{\pi x}{2}<\frac{4}{9};\ \frac{1}{9}<\frac{1-\cos\pi x}{2}<\frac{4}{9}\Big|\times 2;\ \frac{2}{9}<1-\cos\pi x<\frac{8}{9}\Big|(-1);\ \frac{2}{9}-1<-\cos\pi x<\frac{8}{9}-1;$

$-\frac{7}{9}<-\cos\pi x<-\frac{1}{9}\Big|\times(-1);\ \frac{7}{9}>\cos\pi x>\frac{1}{9};\ \frac{1}{9}<\cos\pi x<\frac{7}{9};$ *(C)*

Так як у I та IV чвертях функція $y=\cos x$ спадає, то розв'язком нерівності C є

$\arccos\frac{7}{9}+2\pi n<\pi x<\arccos\frac{1}{9}+2\pi n\Big|:\pi,\ \frac{1}{\pi}\arccos\frac{7}{9}+2n<x<\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{9}+2n,$

$x\in\left(\frac{1}{\pi}\arccos\frac{7}{9}+2n;\ \frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{9}+2\pi n\right), n\in Z.$

Розв'яжемо рівність B: піднесемо її до квадрату.

$\frac{1}{9}<\sin^2\frac{\pi x}{2}<\frac{4}{9};\ \frac{1}{9}<1-\cos\pi x<\frac{4}{9};\ \arccos\left(-\frac{1}{9}\right)+2\pi n<\pi x<\arccos\left(-\frac{7}{9}\right)+2\pi n,$

$2n+\frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{1}{9}\right)<x<\frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{7}{9}\right)+2n.$

Відповідь: $\left(\frac{1}{\pi}\arccos\frac{7}{9}+2n;\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{9}+2n\right);\ \left(2n+\frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{1}{9}\right);2n+\frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{7}{9}\right)\right).$

$2\cos^2 x-\sin x>1.$

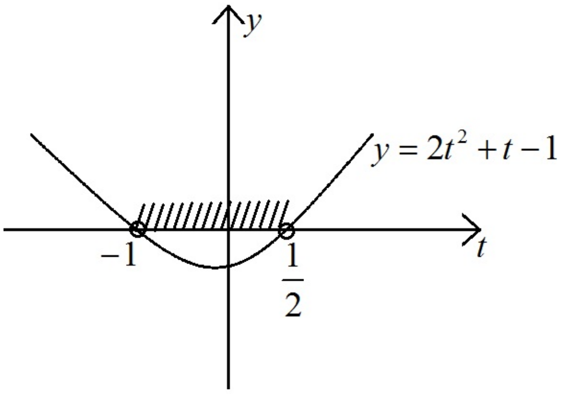
Розв'язання:

Нехай $\sin x = t,\ |t| \le 1,\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2.$

Вихідна нерівність перетворюється в таку:

$2 \cdot (1 - t^2) - t > 1;\ 2 - 2t^2 - t - 1 > 0;\ -2t^2 - t + 1 > 0 \,|\times(-1);$

$2t^2 + t - 1 < 0.\ D = 1 + 8 = 9,\ t_1 = \dfrac{-1-3}{2\cdot 2} = -1,\ t_2 = \dfrac{-1+3}{2\cdot 2} = \dfrac{1}{2}.$

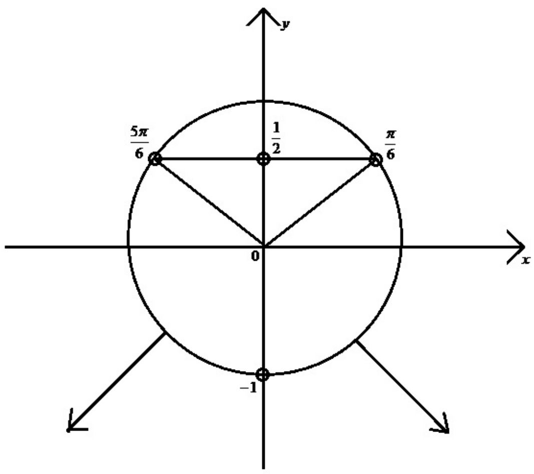


$t \in \left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$, що не суперечить умові $|t| \le 1.$

Повертаючись до підстановки, дістанемо подвійну нерівність $-1 < \sin x < \dfrac{1}{2}$,

еквівалентну такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} \sin x > -1, \\ \sin x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$



$\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n < x < \dfrac{13\pi}{6} + 2\pi n.$

Відповідь: $\left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z;\ \left(\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n;\ \dfrac{13\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in Z.$

$tg\dfrac{\pi x}{2} - ctg\dfrac{\pi x}{2} > \dfrac{2}{\sqrt{3}}.$

Розв'язання:

Введемо нову змінну $tg\dfrac{\pi x}{2} = t$, тоді $ctg\dfrac{\pi x}{2} = \dfrac{1}{t}.$

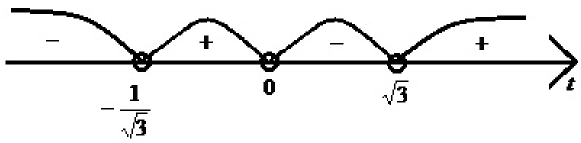
Нерівність набуває вигляду:

$$t-\frac{1}{t}>\frac{2}{\sqrt{3}}\to t-\frac{1}{t}-\frac{2}{\sqrt{3}}>0\to\frac{t^2\sqrt{3}-\sqrt{3}-2t}{t\sqrt{3}}>0;\ \ \frac{\sqrt{3}t^2-2t-\sqrt{3}}{t\sqrt{3}}>0, t\neq 0.$$

В області визначення ця нерівність рівносильна такій:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot t\cdot\left(\sqrt{3}t^2-2t-\sqrt{3}\right)>0,\ \ D=4+4\cdot 3=16=4^2.$$

$$t_1=\frac{2-4}{2\sqrt{3}}=-\frac{2}{2\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \ t_2=\frac{2+4}{2\sqrt{3}}=\frac{6}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3};\ \ t_3=0.$$



$$t\cdot\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(t-\sqrt{3}\right)>0.$$

$$-1\cdot\left(-1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-1-\sqrt{3}\right)="-"\cdot"-"\cdot"-"="-";\ \ 1\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)="-";$$

$$-\frac{1}{10}\cdot\left(-\frac{1}{10}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{10}-\sqrt{3}\right)="-"\cdot"+"\cdot"-"="+";\ \ 2\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)="+";$$

$t\in\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};0\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ Використаємо підстановку.

$$\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{\sqrt{3}}<tg\frac{\pi x}{2}<0,\\ tg\frac{\pi x}{2}>3.\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}-\frac{\pi}{6}+\pi n<\frac{\pi x}{2}<\pi n, n\in Z.\\ \frac{\pi}{3}+\pi m<\frac{\pi x}{2}<\frac{\pi}{2}+\pi m, m\in Z.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}-\frac{\pi}{3}+\pi n<\pi x<2\pi n\ \ |:\pi\\ \frac{2\pi}{3}+2\pi m<\pi x<\pi+2\pi m\ \ |:\pi.\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{3}+2n<x<2n, n\in Z.\\ \frac{2}{3}+2m<x<1+2m.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\left(-\frac{1}{3}+2n;\ 2n\right)\cup\left(\frac{2}{3}+2m;\ 1+2m\right),\ n\in Z,\ m\in Z.$

$\sin^2 x-3\sin x\cdot\cos x+2\cos^2 x<0.$

Розв'язання:

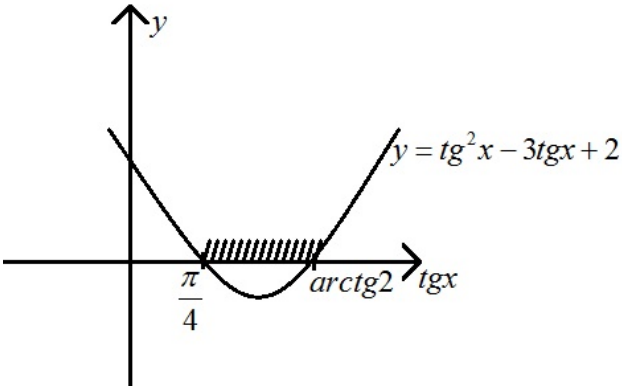
Припустимо, що $\cos x=0,$ тоді $\sin^2 x-3\sin x\cdot 0+2\cdot 0^2=\sin^2 x.$

Враховуючи знак вихідної нерівності прийшли до абсурдної нерівності $\sin^2 x<0.$ Отже, $\cos x\neq 0.$ Значить $\cos^2 x>0.$ Розділимо обидві частини нерівності на $\cos^2 x$:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{3\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x}+\frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x}<0;$$

$tg^2x-3tgx+2<0.$ Корені правої частини нерівності $tgx=1,\ tgx=2.$

$$x=\frac{\pi}{4},\ \ x=arctg2$$



$\frac{\pi}{4} + \pi n < x < arctg2 + \pi n,\ n \in Z.$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n;\ arctg2 + \pi n\right),\ n \in Z.$

$4\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x > 2.$

Розв'язання:

$2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right);$

$4\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x > 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right);$

$4\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2\cos x > 0;$

$2\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x > 0;$

Якщо $\cos x = 0,$ то $2\sin^2 x - 3\sin x \cdot 0 + 0^2 = 2\sin^2 x.$

$2\sin^2 x > 0$ – правильна нерівність, а тому ділити обидві частини нерівності $\cos^2 x$ не можна.

З умови $\cos x = 0$ випливає, що $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z.$

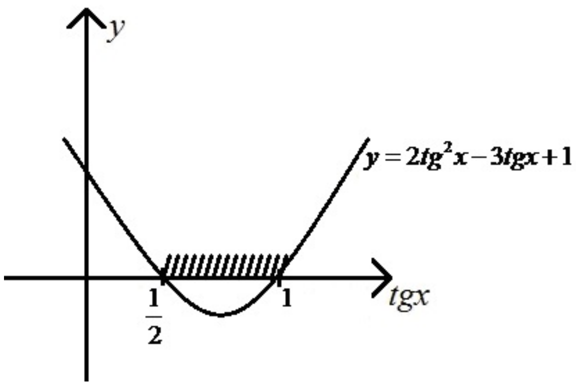
Знайдемо решту розв'язків нерівності. Вони задовольняють умову $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,$ тоді $\cos x \neq 0,$ а $\cos^2 x > 0.$

Поділивши обидві частини нерівності на $\cos^2 x,$ дістанемо:

$\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} > \frac{0}{\cos^2 x};$

$2tg^2 x - 3tgx + 1 > 0.$ Цю квадратну нерівність відносно tgx розв'яжемо графічним способом:

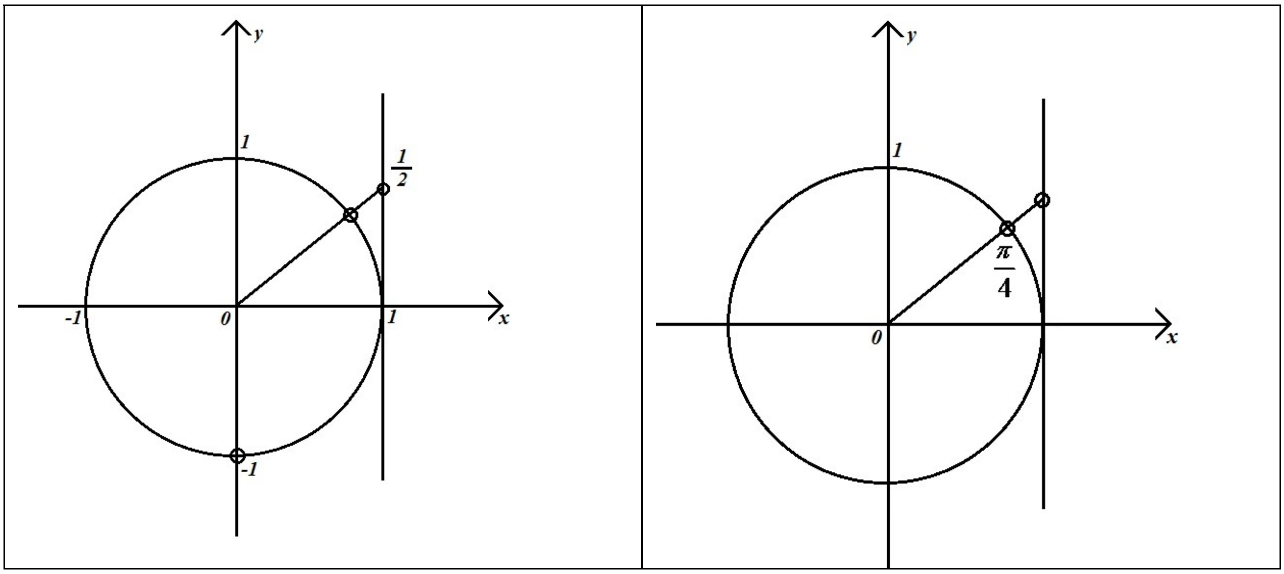
$D = 9 - 8 = 1;\ tgx = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2};\ tgx = \frac{3+1}{4} = 1.$



$$-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<arctg\frac{1}{2}+\pi n,\ \ n\in Z.$$

Розв'яжемо сукупність нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} tgx<\frac{1}{2}, \\ tgx>1. \end{array}\right.$$



$$\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$$

Відповідь: $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ arctg\frac{1}{2}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right).$

Враховуючи групу коренів $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,$ відповідь можна записати так:

$$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ arctg\frac{1}{2}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right],\ n\in Z.$$

$$\cos x-\sin 2x-\cos 3x<0.$$

Розв'язання:

Нерівності такого вигляду розв'язують специфічними способами. Розглянемо один з них.

Нехай маємо функцію $f(x)=\cos x-\sin 2x-\cos 3x.$

Оскільки періодом для функції $y=\cos x$ є $T=2\pi,$ для $y=\sin 2x$ є $T=\pi,$ для $y=\cos 3x$ є $T=\frac{2\pi}{3},$ то періодом для функції $f(x)\in 2\pi.$

Розв'яжемо дану нерівність на проміжку $[0;2\pi)$:

$$f(x)=\cos x-\sin 2x-\cos 3x=(\cos x-\cos 3x)-\sin 2x=2\sin\frac{x+3x}{2}\cdot\sin\frac{3x-x}{2}-\sin 2x=$$

$$=2\sin 2x\cdot\sin x-\sin 2x=\sin 2x\cdot(2\sin x-1).$$

Знайдемо корені цієї функції на проміжку $[0;2\pi)$:

$$f(x)=0;\ \ \sin 2x\cdot(2\sin x-1)=0,\ \left[\begin{array}{l} \sin 2x=0, \\ 2\sin x-1=0. \end{array}\right.$$

$2x = \pi n,\ \ x = \dfrac{\pi n}{2}$:

$n = 0, x = 0,\ \sin x = \dfrac{1}{2};\ x = (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi n.$

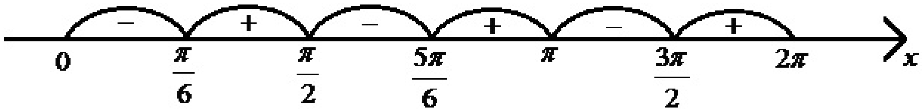
$n = 1, x = \dfrac{\pi}{2},\ n = 0,\ x = \dfrac{\pi}{6}.$

$n = 2, x = \pi,\ n = 1,\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi = \dfrac{5\pi}{6}.$

$n = 3, x = \dfrac{3\pi}{2},$

Знайдені корені функції $f(x)$: $0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}.$

Вони поділяють проміжок $[0; 2\pi)$ на 6 проміжків знакосталості:



На $\left[0; \dfrac{\pi}{6}\right)$ $\sin 2x > 0,\ 2\sin x - 1 < 0,\ f(x) < 0.$

На $\left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\sin 2x > 0,\ 2\sin x - 1 > 0,\ f(x) > 0.$

На $\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{6}\right)$ $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{5\pi}{6},\ \pi < 2x < \dfrac{5\pi}{3},\ \sin 2x < 0,\ 2\sin x - 1 > 0,\ f(x) < 0.$

На $\left(\dfrac{5\pi}{6}; \pi\right)$ $\dfrac{5\pi}{6} < x < \pi,\ \dfrac{5\pi}{3} < 2x < \dfrac{10\pi}{3},\ \sin 2x < 0,\ 2\sin x - 1 < 0,\ f(x) > 0.$

На $\left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ $2\pi < 2x < 3\pi,\ \sin 2x > 0,\ 2\sin x - 1 < 0,\ f(x) < 0.$

На $\left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ $3\pi < 2x < 4\pi,\ \sin 2x < 0,\ 2\sin x - 1 < 0,\ f(x) > 0.$

На $[0; 2\pi)$ вихідна нерівність має розв'язки:

$$x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right).$$

Враховуючи період синуса $T = 2\pi$, запишемо всі розв'язки нерівності:

$$x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\pi + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z.$$

Відповідь: $\left(2\pi n; \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\pi + 2\pi n; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z.$

$ctgx > ctg3x.$

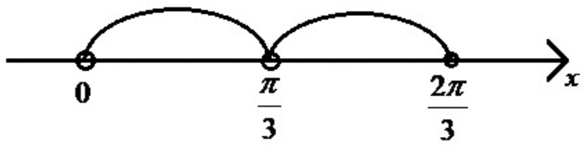
Розв'язання:

$ctgx - ctg3x > 0.\ \ f(x) = ctgx - ctg3x,\ T = \pi.$

Розв'яжемо дану нерівність на $[0; \pi)$:

На цьому проміжку нерівність визначена при всіх значеннях x, крім $0;\ \frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}$

$\left(ctg0\ \text{не існує}, ctg\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right)\text{не існує}, ctg\left(3\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\text{не існує}\right).$



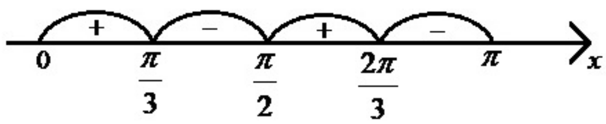
Знайдемо нулі функції $f(x)=ctgx-ctg3x$:

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\sin 3x}=\frac{\sin 3x\cdot\cos x-\cos 3x\cdot\sin x}{\sin x\cdot\sin 3x}=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\cdot\sin 3x}=\frac{\sin 2x}{\sin x\cdot\sin 3x};$$

$$f(x)=0;\ \ \frac{\sin 2x}{\sin x\cdot\sin 3x}=0;\ \ \begin{cases}\sin 2x=0,\\ \sin x\neq 0,\\ \sin 3x\neq 0.\end{cases}$$

$2x=\pi;\ \ x=\frac{\pi}{2}$ – єдиний нуль на $[0;\pi)$.

Таким чином, функція $f(x)=\frac{\sin 2x}{\sin x\cdot\sin 3x}$ на проміжку $[0;\pi)$ має такі проміжки знакосталості:



Визначимо знак функції $f(x)$ на кожному з них:

$$f(x)=\frac{2\sin x\cdot\cos x}{\sin x\cdot\sin 3x}=\frac{2\cos x}{\sin 3x}.$$

На $\left[0;\frac{\pi}{3}\right)$ $\cos x>0,\ 0<x<\frac{\pi}{3},\ 0<3x<\pi,\ \ \sin 3x>0,\ \ f(x)>0.$

На $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$ $\cos x>0,\ \ \frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}\Big|\cdot 3\ \ \pi<3x<\frac{3\pi}{2},\ \ \sin 3x<0,\ \ f(x)<0.$

На $\left(\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right)$ $\frac{\pi}{2}<x<\frac{2\pi}{3}\Big|\cdot 3\ \ \frac{3\pi}{2}<3x<2\pi,\ \ \cos x<0,\ \ \sin 3x<0,\ f(x)>0.$

На $\left(\frac{3\pi}{3};\pi\right)$ $\cos x<0,\ \ \frac{2\pi}{3}<x<\pi\Big|\cdot 3\ \ 2\pi<3x<3\pi,\ \ \sin 3x>0,\ f(x)<0.$

Вибираємо проміжки, на яких $f(x)>0$:

$\left[0;\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right)$. Додаємо період функції $f(x)$ $T=\pi$:

Відповідь: $\left(k\pi;\frac{\pi}{3}+k\pi\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{2\pi}{3}+k\pi\right), k\in Z.$

$$\cos^3 x \cdot \cos 3x - \sin^3 x \cdot \sin 3x > \frac{5}{8}.$$

Розв'язання:

За формулою потроєного аргументу маємо:

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x, \quad \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$

$$4\cos^3 x = \cos 3x + 3\cos x, \quad 4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x,$$

$$\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}. \quad \sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}.$$

Тоді вихідна нерівність матиме вигляд:

$$\frac{\cos 3x + 3\cos x}{4} \cdot \cos 3x - \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} \cdot \sin 3x > \frac{5}{8} \quad \Big| \cdot 4$$

$$(\cos 3x + 3\cos x) \cdot \cos 3x - (3\sin x - \sin 3x) \cdot \sin 3x > \frac{5}{2},$$

$$\cos^2 3x + 3\cos x \cdot \cos 3x - 3\sin x \cdot \sin 3x + \sin^2 3x > \frac{5}{2},$$

$$\underbrace{\cos^2 3x + \sin^2 3x}_{1} + 3 \cdot (\cos x \cdot \cos 3x - \sin x \cdot \sin 3x) > \frac{5}{2},$$

$$1 + 3 \cdot \cos(x + 3x) > \frac{5}{2},$$

$$3\cos 4x > 2{,}5 - 1,$$

$$\cos 4x > \frac{1{,}5}{3},$$

$$\cos 4x > \frac{1}{2},$$

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 4x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n \quad \Big| : 4$$

$$-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z.$$

Відповідь: $\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{12}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in Z.$

Завдання для самостійної роботи:

$\sin x > -\frac{1}{2}.$ Відповідь: $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in Z.$

$\cos x \le -\frac{1}{2}.$ Відповідь: $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in Z.$

$tgx < 2.$ Відповідь: $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ arctg2 + \pi n\right), n \in Z.$

$\sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{12}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}.$ Відповідь: $\left(\frac{4}{9}\pi + \frac{4}{3}\pi n;\ \frac{13}{9}\pi + \frac{4}{3}\pi n\right), n \in Z.$

$\cos 2x - \sin 3x \ge 0.$ Відповідь: $\left[-\frac{3}{8}\pi + \pi n;\ \frac{\pi}{8} + \pi n\right], n \in Z.$

$\sin x + \cos 2x > 1.$ Відповідь: $\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in Z.$

$\sin 3x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x \ge \frac{1}{2}.$ Відповідь: $\left[\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2};\ \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}\right],\ n \in Z.$

$6\sin^2 x - 5\sin x + 1 \ge 0.$ Відповідь: $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right],\ n \in Z.$

$\frac{15}{\sin x + 1} < 11 - 2\sin x.$ Відповідь: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in Z.$

$\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{4}.$ Відповідь: $\left(k\pi;\ \frac{\pi}{3} + k\pi\right),\ k \in Z.$

$2 - \frac{5}{2} - \sin x > \cos^2 x.$ Відповідь: $\left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in Z.$

$2\sin 2x < 5 \cdot (1 + \cos x - \sin x).$ Відповідь: $\left(-\pi + 2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in Z.$

$\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} > 0.$ Відповідь: $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ 2k\pi\right) \cup \left(2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in Z.$

$\sin 2x < \sin 3x.$ Відповідь:

$\left(2k\pi;\ \frac{\pi}{5} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{3}{5}\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{7}{5}\pi + 2k\pi; \frac{9}{5}\pi + 2\pi\right).$

$\sin\frac{2 - x}{3} > \frac{1}{2}.$ Відповідь: $(6k\pi + 3{,}5\pi + 2; 6k\pi + 5{,}5\pi + 2),\ k \in Z.$

$\cos\sqrt{1 - x} < \frac{1}{\sqrt{2}}.$ Відповідь: $\left(1 - \left(2k\pi + \frac{7\pi}{4}\right)^2; 1 - \left(2k\pi + \frac{\pi}{4}\right)^2\right),\ k \in Z.$

$tg\frac{\pi x}{3(x - 1)} > \sqrt{3}.$ Відповідь: $(3; +\infty).$

$\frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{\sin x - 1} > 0.$ Відповідь: $\left(\frac{\pi}{2}(4n - 1); \frac{\pi}{6}(12n + 1)\right), n \in Z.$

$2\cos 2x + \sin 2x \ge tgx.$ Відповідь: $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -arctg2 + \pi n\right) \cup \left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right], n \in Z.$

$4\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\leq -1.$ Відповідь: $\left[\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right],\ n\in Z.$

$ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\leq\sqrt{3}.$ Відповідь: $\left[-\pi+\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+\pi n\right],\ n\in Z.$