Розділ 18
Системи тригонометричних рівнянь

Системи тригонометричних рівнянь можна розділити на два великі типи:

а) ті, в яких порівняно легко вдається виключити одне з невідомих, виражаючи його через інші змінні з будь-якого рівняння системи;

б) ті, в яких можна звести тригонометричну систему до системи алгебраїчних рівнянь в яких в якості нових змінних беруться тригонометричні функції.

При розв'язуванні систем тригонометричних рівнянь, як і при розв'язуванні тригонометричних рівнянь з однією змінною потрібно намагатися проводити такі тотожні перетворення, при яких одне або декілька рівнянь розпадаються на найпростіші з двома змінними, наприклад, $\cos(2x+3y)=1,\ ctg(x-y)=\sqrt{3}$ і т.д.

Проілюструємо сказане на прикладах.

Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases}\sqrt{\sin x}\cdot\cos y=0, & (1)\\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0. & (2)\end{cases}$$

Розв'язання:

З рівняння *(1)* слідує, що $\sin x\ge 0.$

Якщо $\sin x=0,\ 0\cdot\cos y=0-$ тотожність.

Якщо $\sin x>0,$ то з рівняння *(1)* випливає, що $\cos y=0.$ Таким чином, вихідна система перетворюється в сукупність двох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=0,\\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0.\end{cases}\\ \begin{cases}\cos y=0,\ \sin x>0,\\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0.\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=0,\\ 0-\cos 2y-2=0.\end{cases}\\ \begin{cases}\cos y=0,\\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0,\\ \sin x>0.\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=0,\\ -\cos 2y=2.\end{cases}\quad\varnothing\\ \begin{cases}\cos y=0,\\ 2\sin^2 x-2=0,\\ \sin x>0.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}\cos y=0,\\ 2\sin^2 x=2.\end{cases}\quad \begin{cases}\cos y=0,\\ 2\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{2}=2.\end{cases}\quad \begin{cases}\cos y=0,\\ 1-\cos 2x=2.\end{cases}\quad \begin{cases}\cos y=0,\\ \cos 2x=-1.\end{cases}\quad \begin{cases}y=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.\\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ n\in Z.\end{cases}$$

Відповідь: $\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right),\ k,n\in Z.$

$$\frac{3+2\cdot\cos(x-y)}{2}=\sqrt{3+2x-x^2}\cdot\cos^2\cdot\frac{x-y}{2}+\frac{\sin^2(x-y)}{2}.$$

Розв'язання:

Понизимо степінь косинуса:

$$\frac{3+2\cdot\cos^2(x-y)}{2}=\sqrt{3+2x-x^2}\cdot\frac{1+\cos\left(2\cdot\dfrac{x-y}{2}\right)}{2}+\frac{\sin^2(x-y)}{2};$$

$$\frac{3+2\cdot\cos^2(x-y)}{2}=\sqrt{3+2x-x^2}\cdot\frac{1+\cos(x-y)}{2}+\frac{\sin^2(x-y)}{2};\Big|\cdot 2$$

$$3+2\cdot\cos^2(x-y)=\sqrt{3+2x-x^2}\cdot(1+\cos(x-y))+\sin^2(x-y);$$

$$3+2\cdot\cos^2(x-y)-\sqrt{3+2x-x^2}\cdot(1+\cos(x-y))-\sin^2(x-y)=0;$$

$$1-\sin^2(x-y)+2+2\cos(x-y)-\sqrt{3+2x-x^2}+\cos(x-y)\cdot\sqrt{3+2x-x^2}=0;$$

$$\cos^2(x-y)+2-\sqrt{3+2x-x^2}+\cos(x-y)\cdot\left(2-\sqrt{3+2x-x^2}\right)=0;$$

$$\cos^2(x-y)+\left(2-\sqrt{3+2x-x^2}\right)\cdot(1-\cos(x-y))=0.$$

Введемо нові змінні:

$\cos(x-y)=t,\ 2-\sqrt{3+2x-x^2}=a,$ тоді $t^2+a\cdot(1-t)=0,\ t^2+a-at=0,\ t^2-at+a=0-$ це квадратне рівняння відносно $t,$ воно має корені тоді, коли $D=a^2-4a\geq 0,$ $a(a-4)\geq 0.$ Ця нерівність можлива тоді, коли $\begin{cases}a>0,\\a-4\geq 0.\end{cases}$ або $\begin{cases}a\leq 0,\\a-4\leq 0.\end{cases}$

$$\begin{cases}a\geq 0,\\a\geq 4.\end{cases}\to a\geq 4 \qquad \begin{cases}a\leq 0,\\a\leq 4.\end{cases}\to a\leq 0.$$

Отже, рівняння $t^2-at+a=0$ має корені при $a\in(-\infty;0]\cup[4;+\infty).$

Так як $a=2-\sqrt{3+2x-x^2}=2-\sqrt{-(x^2-2x-3)}=2-\sqrt{-((x^2-2x+1)+1-3)}=$
$=2-\sqrt{-((x-1)^2-4)}=2-\sqrt{4-(x-1)^2}.$

$2-2-\sqrt{4}\leq a\leq 2.\ \ a=0.$

$2-\sqrt{4-(x-1)^2}=0.\ \ 2^2=\sqrt{4-(x-1)^2};\ \ 4=4-(x-1)^2;\ \ (x-1)^2=0,\ \ x-1=0,\ \ x=1.$

Тоді рівняння $\cos^2(x-y)+\left(2-\sqrt{3+2x-x^2}\right)\cdot(1-\cos(x-y))=0$ набуває вигляду:

$\cos^2(1-y)=0,\ \cos^2(y-1)=0;\ \ y-1=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.\ \ y=1+\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.$

Відповідь: $\left(1;\ 1+\frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z.$

$$\begin{cases}ctgx+\sin 2y=\sin 2x,\\2\sin y\cdot\sin(x+y)=\cos x.\end{cases}$$

Розв'язання:

Перетворимо друге рівняння системи, застосувавши формулу перетворення добутку тригонометричних функцій:

$$2\sin y\cdot\sin(x+y)=2\cdot\frac{\cos(y-x-y)-\cos(y+x+y)}{2}=\cos(-x)-\cos(x+2y)=\cos x-\cos(x+2y).$$

$\cos x-\cos(x+2y)=\cos x,\ \ \cos x-\cos x=\cos(x+2y);\ \ \cos(x+2y)=0,\ \ x+2y=\frac{\pi}{2}+\pi k;$

$x=\frac{\pi}{2}-2y+\pi k,\ k\in Z.$

Підставляємо значення x в перше рівняння системи:

$$ctg\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)+\sin 2y=\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-2y\right);$$

$$tg2y+\sin 2y=\sin(\pi-4y);$$

$$tg2y+\sin 2y=\sin 4y;$$

$$\frac{\sin 2y}{\cos 2y}+\sin 2y-\sin 4y=0\,\Big|\cdot\cos 2y;$$

$$\sin 2y+\sin 2y-2\sin 2y\cdot\cos 2y\cdot\cos 2y=0;$$

$$\sin 2y\cdot\left(1+\cos 2y-2\cos^2 2y\right)=0.$$

$$\sin 2y\cdot\left(1+\cos 2y-\cos 2y-\cos 2y\right)=0;$$

$$\sin 2y(1-\cos 2y)=0\quad \left[\begin{array}{l}\sin 2y=0,\\ 1-\cos 2y=0.\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}2y=\pi n,\ n\in Z,\\ \cos 2y=1.\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}y=-\frac{\pi n}{2}+\pi n,\ n\in Z,\\ 2y=2\pi n,\ y=\frac{\pi n}{2}+n.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\frac{\pi}{2}n\right);\ \left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\frac{\pi}{2}+n\right).$

$$\begin{cases} tgx-tgy=-2\sqrt{3},\\ x-y=\frac{\pi}{3}.\end{cases}$$

Розв'язання

Перетворимо перше рівняння системи:

$$\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin y}{\cos y}=-2\sqrt{3};\quad \frac{\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}=-2\sqrt{3};\quad \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cdot\cos y}=-2\sqrt{3};$$

$$\sin(x-y)=-2\sqrt{3}\cdot\cos x\cdot\cos y;\quad \sin(x-y)=-2\sqrt{3}\cdot\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2};$$

$$\sin(x-y)=-\sqrt{3}\cdot(\cos(x+y)+\cos(x-y)).$$

Підставимо з другого рівняння системи значення $x-y=\frac{\pi}{3}$:

$$\sin\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}\left(\cos(x+y)+\cos\frac{\pi}{3}\right);\quad \frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}\left(\cos(x+y)+\frac{1}{2}\right);\Big|:\left(-\sqrt{3}\right)$$

$$\cos(x+y)+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2};\quad \cos(x+y)=-1;\quad x+y=\pi+2\pi n,\ n\in \mathrm{Z}.$$

Розглянемо систему рівнянь:

$$-\begin{cases} x+y=\pi+2\pi k,\\ x-y=\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

$$2y=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\,\Big|:2\quad y=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in Z.$$

$$+\begin{cases} x+y=\pi+2\pi k,\\ x-y=\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

$$2x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ x=\frac{2\pi}{3}+k\pi.$$

Відповідь: $\left(\frac{2\pi}{3}+k\pi;\ \frac{\pi}{3}+k\pi\right),\ k\in Z.$

$$\begin{cases} \sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\sin\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos x\cdot\cos y=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання:

Перетворюючи добуток синусів у суму, дістанемо рівняння:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)-\cos\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};\ \ \cos y-\cos x=\sqrt{2}.$$

Вихідна система еквівалентна такій системі:

$\begin{cases} \cos y-\cos x=\sqrt{2}, \\ \cos x\cdot\cos y=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ Нехай $\cos x=a, \cos y=b.$

Тоді $\begin{cases} b-a=\sqrt{2}, \\ a\cdot b=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ $\begin{cases} b=a+\sqrt{2}, \\ a\cdot\left(a+\sqrt{2}\right)=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ $\begin{cases} b=a+\sqrt{2}, \\ a^2+a\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}=0. \end{cases}$

$$D=2-4\cdot\frac{1}{2}=0;\ \ \left(a+\sqrt{2}\right)^2=0;\ \ a=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$b=a+\sqrt{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}=\frac{-\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2};\ \ \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \ \cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$x=\pm\frac{3\pi}{2}+2\pi m,\ m\in Z;\ \ y=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Відповідь: $\left(\pm\dfrac{3\pi}{2}+2\pi m;\ \pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n\right),\ m\in Z,\ n\in Z.$

$$\begin{cases} \cos\pi x\cdot\cos\pi y=\dfrac{1}{4}, \\ tg\pi x\cdot tg\pi y=-3. \end{cases}$$

Розв'язання:

$\begin{cases} \cos\pi x\cdot\cos\pi y=\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{\sin\pi x}{\cos\pi x}\cdot\dfrac{\sin\pi y}{\cos\pi y}=-3. \end{cases}$ Перемножимо:

$$\frac{\sin\pi x\cdot\sin\pi y}{\cos\pi x\cdot\cos\pi y}\cdot\cos\pi x\cdot\cos\pi y=\frac{1}{4}\cdot(-3);$$

$$\sin\pi x\cdot\sin\pi y=-\frac{3}{4}.$$

Розглянемо систему рівносильну вихідній:

$$-\begin{cases}\cos\pi x\cdot\cos\pi y=\dfrac{1}{4},\\ \sin\pi x\cdot\sin\pi y=-\dfrac{3}{4}.\end{cases}$$ Віднімемо і додамо:

$$\begin{cases}\cos\pi x\cdot\cos\pi y-\sin\pi x\cdot\sin\pi y=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4},\\ \cos\pi x\cdot\cos\pi y+\sin\pi x\cdot\sin\pi y=\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(\pi x+\pi y)=1,\\ \cos(\pi x-\pi y)=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}\quad \begin{cases}\pi x+\pi y=2k\pi,\\ \pi x-\pi y=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n.\end{cases}\begin{vmatrix}:\pi\\ :\pi\end{vmatrix}\quad \begin{cases}x+y=2k,\\ x-y=2\pi>\dfrac{2}{3}.\end{cases}\quad k\in Z,\ n\in Z.$$

Додамо і віднімемо:

$$2x=2k+2\pi+\frac{2}{3}\Big|:2\quad x=k+n+\frac{1}{3},\ y=k-n-\frac{1}{3};\ \ x=k+n-\frac{1}{3};\ \ x=k-n+\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $\left(k+n+\dfrac{1}{3};k-n-\dfrac{1}{3}\right),\ \left(k+n-\dfrac{1}{3};k-n+\dfrac{1}{3}\right).$

$$\begin{cases}\sin x-\sin y=\dfrac{1}{2},\\ \cos x-\cos y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$

Розв'язання:

Перетворимо різниці однойменних функцій в добутки:

$$\begin{cases}2\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\sin\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{2}, & (1)\\ -2\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\sin\dfrac{x-y}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}. & (2)\end{cases}$$

Розділивши друге рівняння на перше, дістанемо:

$$tg\frac{x+y}{2}=\sqrt{3},\ \ \frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{3}+k\pi,\ \ k\in Z.$$

Розглянемо два випадки:

а) $k=2n,\ k-$ парне число, тоді $\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$

Підставимо значення $\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$ в рівняння *(1)*:

$$2\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2},\ \ 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\sin\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2},\ \frac{x-y}{2}=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z.$$

Тоді має місце така система рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\\ \dfrac{x-y}{2}=(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi n.\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\\ \dfrac{x-y}{2}=\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)+\pi n.\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\\ \dfrac{x-y}{2}=\dfrac{5\pi}{3}+\pi n.\end{cases}\begin{vmatrix}\cdot 2\\ \cdot 2\end{vmatrix}$$

$$+\begin{cases} x+y=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi, \\ x-y=\dfrac{10\pi}{3}+2\pi n. \end{cases} \qquad -\begin{cases} x+y=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi, \\ x-y=\dfrac{10\pi}{3}+2\pi n. \end{cases}$$

$$2x=\frac{12\pi}{3}+2k\pi+2\pi n, \Big|:2 \qquad 2y=-\frac{8\pi}{3}+2k\pi-2\pi n,$$

$$x=2\pi+k\pi+\pi n, \qquad y=-\frac{4}{3}\pi+\pi(k-n),$$

$$x=2\pi+\pi(k+n),$$

$$x=\pi(2+k+n). \qquad y=\pi\left(\frac{4}{3}+k-n\right).$$

б) $k=2n+1,\ k-$непарне число.

$\dfrac{x+y}{2}=2\pi n+\dfrac{4\pi}{3}. \qquad x=\dfrac{7\pi}{6}+2\pi(n+k);$

$y=\dfrac{3\pi}{2}+2\pi(n-k).$

Відповідь: $\left(\pi(2+k+n);\ \pi\left(-\frac{4}{3}+k-n\right)\right),\ \left(\frac{7\pi}{6}+2\pi(n+k);\ \frac{3\pi}{2}+2\pi(n-k)\right).$

$$\begin{cases} \cos x:\cos y:\cos z=5:4:3, \\ x+y+z=\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання:

Нехай $k-$коефіцієнт пропорційності, тоді $\cos x=5k,\ \cos y=4k,\ coz=3k,\ k\neq 0.$ *(A)*

З рівняння $x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$ маємо $x+y=\dfrac{\pi}{2}-z.$

$\sin(x+y)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)=\cos z.$

$y+z=\dfrac{\pi}{2}-x,\ \sin(y+z)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x.$

$x+z=\dfrac{\pi}{2}-y,\ \sin(z+x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)=\cos y.$

Маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sin(x+y)=\cos z, \\ \sin(y+z)=\cos x, \\ \sin(z+x)=\cos y. \end{cases} \begin{cases} \sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y=\cos z, \\ \sin y\cdot\cos z+\cos y\cdot\sin z=\cos x, \\ \sin z\cdot\cos x+\cos z\cdot\sin x=\cos y. \end{cases}$$

Використавши співвідношення *A,* дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4k\cdot\sin x+5k\cdot\sin y=3k, \\ 3k\cdot\sin y+4k\cdot\sin z=5k, \\ 5k\cdot\sin z+3k\cdot\sin x=4k. \end{cases}$$ Кожне рівняння системи розділимо на k:

$$\begin{cases} 4\sin x+5\sin y=3, \\ 3\sin y+4\sin z=5, \\ 5\sin z+3\sin x=4. \end{cases}$$ Позначимо $\sin x=a,\ \sin y=b,\ \sin z=c.$

$$\begin{cases}4a+5b=3,\\3b+4c=5,\\5c+3a=4.\end{cases}\quad \begin{cases}a=\dfrac{3-5b}{4},\\3b+4c=5,\\5c+3\cdot\dfrac{3-5b}{4}=4 \;\Big|\cdot 4\end{cases}\quad \begin{cases}3b+4c=5,\\20c+9-15b=16.\end{cases}\quad \begin{cases}3b+4c=5 \;\Big|\cdot 5\\20c-15b=7.\end{cases}$$

$$+\begin{cases}15b+20c=25,\\-15b+20c=7.\end{cases}$$

$$\overline{\qquad 40c=32. \qquad}$$

$$c=\frac{32}{40}=\frac{8}{10}=0{,}8;\;\; 15b+20\cdot 0{,}8=25;\;\; 15b=25-16=9,\;\; b=\frac{9}{15}=0{,}6.$$

$$a=\frac{3-5\cdot 0{,}6}{4}=\frac{3-3}{4}=0.$$

$$\begin{cases}\sin x=0, & x=\pi n,\; n\in Z.\\ \sin y=0{,}6, & y=(-1)^m\arcsin 0{,}6+\pi m,\; m\in Z.\\ \sin z=0{,}8. & z=(-1)^k\arcsin 0{,}8+\pi k,\; k\in Z.\end{cases}$$

Відповідь: $\left(\pi n;\; (-1)^m\arcsin 0{,}6+\pi m;\; (-1)^k\arcsin 0{,}8+k\pi\right),\; n\in Z,\quad m\in Z,\quad k\in Z.$

$$\begin{cases}\cos x\cdot\cos 2y+\sin y\cdot\cos 2x+2\cos x=1, & (1)\\ \cos 2x+3\cos 2y+8\sin y=8+4\sin x\cdot\cos y. & (2)\end{cases}$$

Розв'язання:

Виконаємо деякі тотожні перетворення рівняння *(2)*:

$$\cos^2 x-\sin^2 x+3\cdot\left(\cos^2 y-\sin^2 y\right)+8\sin y=8+4\sin x\cdot\cos y;$$

$$1-\sin^2 x-\sin^2 x+3\left(\cos^2 y-1+\cos^2 y\right)+8\sin y=8+4\sin x\cdot\cos y;$$

$$1-2\sin^2 x+6\cos^2 y-3+8\sin y=8+4\sin x\cdot\cos y;$$

$$-2\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos y-2\cos^2 y+8\cos^2 y+8\sin x-10=0\;\Big|\cdot(-1)$$

$$2\sin^2 x+4\sin x\cdot\cos y+2\cos^2 y-8\cos^2 y-8\sin x+10=0;$$

$$2\left(\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos y+\cos^2 y\right)-8\left(1-\sin^2 y\right)-8\sin x+10=0;$$

$$2\cdot\left(\sin x+\cos y\right)^2-8+8\sin^2 y-8\sin x+10=0\;\Big|:2$$

$$\left(\sin x+\cos y\right)^2+4\sin^2 y-4\sin y+1=0;$$

$$\left(\sin x+\cos y\right)^2+\left(2\sin y-1\right)^2=0;$$

Ця рівність можлива тільки в тому випадку, коли $\sin x+\cos y=0$ *(3)* і

$$2\sin y-1=0\to\sin y=\frac{1}{2}.$$

Перетворимо рівняння *(1)*:

$$\cos x\cdot\left(\cos^2 y-\sin^2 y\right)+\sin y\cdot\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+2\cos x=1;$$

$$\cos x\cdot\left(1-\sin^2 y-\sin^2 y\right)+\sin y\cdot\left(\cos^2 x-1+\cos^2 x\right)+2\cos x=1;$$

$$\cos x\cdot\left(1-2\sin^2 y\right)+\sin y\cdot\left(2\cos^2 x-1\right)+2\cos x=1;$$

Підставимо в це рівняння $\sin y=\dfrac{1}{2}$:

$$\cos x\cdot\left(1-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(2\cos^2 x-1\right)+2\cos x=1;$$

$$\cos x\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(2\cos^2 x-1\right)+2\cos x-1=0;$$

$$\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\left(2\cos^2 x-1\right)+2\cos x-1=0;$$

$$\cos^2 x+2{,}5\cos x-1{,}5=0;\ \ |\cos x|\le 1.$$

$D=6{,}25+6=12{,}25;\ \ \cos x=\dfrac{-2{,}5-3{,}5}{2}=-3$ не задовольняє умову $|\cos x|\le 1.$

$$\cos x=\frac{-2{,}5+3{,}5}{2}=\frac{1}{2};\ \ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi;\ \ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi.$$

Із знайдених значень вибираємо ті, які задовольняють рівняння *(3)*:

$$x=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ y=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \ y=\frac{\pi}{6}+2k\pi.$$

Відповідь: $\left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi n;\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi n\right),\ \left(-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi;\ \dfrac{\pi}{6}+2k\pi\right),\ n\in Z,\ k\in Z.$

Завдання для самостійної роботи:

$\begin{cases} x-y=-\dfrac{\pi}{6}, \\ \sin x\cdot\sin y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$ Відповідь: $\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}\right),\ k\in Z.$

$\begin{cases} x+y=\dfrac{3}{4}, \\ tg\pi x-tg\pi y=2. \end{cases}$ Відповідь: $\left(k+\dfrac{5}{12};\ -k+\dfrac{1}{3}\right),\ \left(k+\dfrac{1}{12};\ -k+\dfrac{2}{3}\right).$

$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3}, \\ tgx\cdot tgy=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$ Відповідь: $\left(\dfrac{\pi}{6}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{6}-k\pi\right).$

$\begin{cases} 3\cos x+\cos y=2, \\ \sin y=5\sin x. \end{cases}$ Відповідь: $(2k\pi;\ \pi+2n\pi),\ k\in Z,\ n\in Z.$

$\begin{cases} \sin x:\sin y:\sin z=4:3:5, \\ x+y+z=\pi. \end{cases}$ Відповідь:

$\left(\left(\dfrac{\pi}{2}-\arccos\dfrac{4}{5};\ 2k+n\right)\pi,\ 2k\pi-\arccos\dfrac{4}{5};\ \pi n+\dfrac{\pi}{2}\right),\ k\in Z,\ n\in Z.$

$\begin{cases} \sin x\cdot\cos 2y+\sin y\cdot\cos 2x+\sin y=1, \\ 2\cos 2x+8\cos x\cdot\cos y+7=4\sin y. \end{cases}$ Відповідь:

$\left((-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n;(2k-n+1)\pi-(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{6}\right),\ k\in Z\ \ n\in Z.$

$\begin{cases} \cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}=0, \\ 2\sin^2 x-\cos\left(2y-\dfrac{\pi}{3}\right)=0. \end{cases}$ Відповідь: $\left(\dfrac{\pi}{4}(2k+1);\ \dfrac{\pi}{6}(6m+1)\right),\ k,m\in Z.$

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{6}, \\ 5(\sin 2x+\sin 2y)=2\cdot\left(1+\cos^2(x-y)\right). \end{cases}$$ Відповідь:

$\left(\frac{\pi}{4}(4k+1);\ -\frac{\pi}{12}(12k+1)\right),\ \left(\frac{\pi}{12}(12k-1);\ \frac{\pi}{4}(1-4k)\right),\ k\in Z.$

$$\begin{cases} x-y=\frac{5\pi}{3}, \\ \sin 2x=2\sin y. \end{cases}$$ Відповідь: $\left(\frac{\pi}{2}(2k+1);\ \frac{\pi}{6}(6k-1)\right),\ k\in Z.$

$$\begin{cases} \sin x\cdot\cos y=\frac{1}{4}, \\ \sin y\cdot\cos x=\frac{3}{4}. \end{cases}$$ Відповідь:

$\left(\frac{\pi}{6}+\pi(k-m);\ \frac{\pi}{3}+\pi(k+m)\right),\ \left(-\frac{\pi}{6}+\pi(k-m);\ \frac{2\pi}{3}+\pi(k+m)\right),\ k,m\in Z.$

$$\begin{cases} x-y=-\frac{1}{3}, \\ \cos^2\pi x-\sin^2\pi x=\frac{1}{2}. \end{cases}$$ Відповідь: $\left(\frac{6k-1}{6};\ \frac{6k+1}{6}\right),\ k\in Z.$

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4}, \\ tgx\cdot tgy=\frac{1}{6}. \end{cases}$$ Відповідь: $\left(arctg\frac{1}{2}+\pi k;\ arctg\frac{1}{3}-\pi k\right),\ k\in Z.$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cdot\sin x=\sin y, \\ \sqrt{2}\cdot\cos x=\sqrt{3}\cdot\cos y. \end{cases}$$ Відповідь: $\left(\pm\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \pm\frac{\pi}{4}+\pi m\right),\ k,m\in Z.$

$4\cdot\left(3\cdot\sqrt{4x-x^2}\cdot\sin^2\frac{x+y}{2}+2\cos(x+y)\right)=13+4\cos^2(x+y).$ Відповідь:

$\left(2;\ \pm\frac{2\pi}{3}-2+2\pi k\right),\ k\in Z.$