Розділ 24
Похідна функції

Похідна функції - це границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Операція знаходження похідної функції називається диференціюванням функції.

Правила диференціювання:

1). $c' = 0,\ c -$ стала величина;

2). $x' = 1,\ x -$ змінна

2а). $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$

2б). $\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2};$

3). $(cu)' = c \cdot u',\ c -$ стала, $u -$ змінна.

4). $(u \pm v')= u' \pm v';$

5). $(u \cdot v')= u' \cdot v + u \cdot v';$

6). $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$

Таблиця похідних:

1). $(x^n)' = n \cdot x^{n-1};$

2). $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$

3). $(a^x)' = a^x \cdot \ln a,\ (a > 0, a \neq 1);$

4). $(e^x)' = e^x;$

5). $(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x};$

6). $(\ln x)' = \frac{1}{x};$

7). $(\sin x)' = \cos x;$

8). $(\cos x)' = -\sin x;$

9). $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x};$

10). $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

Похідна складеної функції $f(\varphi(\psi(x)))' = f' \cdot \varphi' \cdot \psi'.$

Вправи:

$(x^4)' = 4x^3$; $(x^5)' = 5x^4$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $(\sqrt[4]{x^3})' = \left(x^{\frac{3}{4}}\right)' = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

$(5x^3)' = 5\cdot 3x^2 = 15x^2$;

$(-4x^2)' = -4\cdot 2x = -8x$;

$(7\sqrt{x})' = 7\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\left(\frac{8}{x^2}\right)' = (8\cdot x^{-2})' = 8\cdot(-2)x^{-3} = -\frac{16}{x^3}$;

$(4\sqrt[3]{x^2})' = \left(4x^{\frac{2}{3}}\right)' = 4\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{8}{3\sqrt[3]{x}}$;

$\left(\frac{6}{\sqrt{x}}\right)' = 6\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = 6\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot(\sqrt{x})' = -\frac{6}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{3}{x\sqrt{x}}$;

$\left(\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = \left(\frac{4}{x^{\frac{2}{3}}}\right)' = 4\cdot\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)' = 4\cdot\left(-\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\right)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{8}{3x^{\frac{5}{3}}} = -\frac{8}{3x\sqrt[3]{x^2}}$;

$\left(-\frac{5}{4x^3}\right)' = -\frac{5}{4}\left(-\frac{1}{x^6}\right)\cdot 3x^2 = \frac{15}{4\cdot x^4}$;

$\left(\frac{4\sqrt{x}}{8}\right)' = \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{16\sqrt{x}}$;

$(5x^3 - 3x^2 + x - 1)' = 15x^2 - 6x + 1$;

$\left((5x^2+7)^3\right)' = 3\cdot(5x+7)^2\cdot(10x) = 30x(5x+7)^2$;

$\left((1+5x-8x^2)^5\right)' = 5(1+5x-8x^2)^4\cdot(5-16x)$;

$\left(\left(1+2\sqrt{x}-\frac{3}{x^2}\right)^4\right)' = 4\left(1+2\sqrt{x}-\frac{3}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{6}{x^3}\right)$;

$\left(\sqrt{x^2+2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$;

$(\sqrt{3})' = \frac{1}{2\sqrt{3x}}\cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x}}$;

$\left(\frac{2}{(3x^2-5)^3}\right)' = -\frac{2}{(3x^2-5)^6}\cdot 3(3x^2-5)^2\cdot 6x = -\frac{36x(3x^2-5)^2}{(3x^2-5)^6} = -\frac{36x}{(3x^2-5)^4}$;

$\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\cdot(2x+1) = -\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)\cdot\sqrt{x^2+x+1}}$;

$\left(\sqrt[3]{(3t-2t^2)}\right)' = \left((3t-2t^2)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\cdot(3t-2t^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(3-4t) = \frac{3-4t}{3\sqrt{(3t-2t^2)^3}}$;

$$\left(\sqrt[4]{\left(2t^2-t^3\right)^3}\right)'=\left(\left(2t^2-t^3\right)^{\frac{3}{4}}\right)'=\frac{3}{4}\left(2t^2-t^3\right)^{-\frac{1}{4}}\cdot\left(4t-3t^2\right)=\frac{3\cdot\left(4t-3t^2\right)}{4\cdot\sqrt[4]{2t^2-t^3}};$$

$$\left(x^2\cdot(5x-4)^6\right)'=2x\cdot(5x-4)^6+x^2\cdot6(5x-4)^5\cdot5=2x(5x-4)^5\cdot(5x-4+15x)=2x(5x-4)^5(20x-4)=$$
$$=8x(5x-4)^5(5x-1);$$

$$\left(\left(40-12x+\frac{27}{5}x^2\right)\cdot\sqrt{5+3x}\right)'=\left(-12+\frac{54}{5}x\right)\cdot\sqrt{5+3x}+\left(40-12x+\frac{27}{5}x^2\right)\cdot\frac{3}{2\sqrt{5+3x}}=$$

$$=\left(-12+\frac{54}{5}x\right)\sqrt{5+3x}+\frac{\frac{200-60x+27x^2}{5}}{2\sqrt{5+3x}}\cdot3=\frac{-60+54x}{5}\cdot\sqrt{5+3x}+\frac{\frac{600-180x+81x^2}{5}}{2\sqrt{5+3x}}=$$

$$=\frac{\frac{-120+108x}{5}\cdot(5+3x)+\frac{600-180x+81x^2}{5}}{2\sqrt{5+3x}}=\frac{\frac{-600-360x+540x+324x^2+600-180x+81x^2}{5}}{2\sqrt{5+3x}}=$$

$$=\frac{81x^2}{2\sqrt{5+3x}};$$

$$\left(\left(\frac{2}{27x}-\frac{1}{9x^2}\right)\cdot\sqrt{3x+x^2}\right)'=\left(-\frac{2}{27x^2}+\frac{1\cdot2x}{9x^4}\right)\sqrt{3x+x^2}+\frac{1}{2\sqrt{3x+x^2}}\cdot(3+2x)\cdot\left(\frac{2}{27x}-\frac{1}{9x^2}\right)=$$

$$=\frac{-2x^2+6x}{27x^4}\cdot\sqrt{3x+x^2}+\frac{3+2x}{2\sqrt{3x+x^2}}\cdot\frac{2x-3}{27x^2}=\frac{\left(-2x^2+6x\right)\cdot\sqrt{3x+x^2}}{27x^4}+\frac{4x^2-9}{2\cdot27x^2\cdot\sqrt{3x+x^2}}=$$

$$=\frac{2\left(-2x^2+6x\right)\cdot\left(3x+x^2\right)+\left(4x^2-9\right)\cdot x^2}{2\cdot27x^4\cdot\sqrt{3x+x^2}}=\frac{\left(-4x^2+12x\right)\cdot\left(3x+x^2\right)+4x^4-9x^2}{54x^4\cdot\sqrt{3x+x^2}}=$$

$$=\frac{-12x^3-4x^4+36x^2+12x^3+4x^4-9x^2}{54x^4\cdot\sqrt{3x+x^2}}=\frac{27x^2}{54x^4\cdot\sqrt{3x+x^2}}=\frac{1}{2x^2\cdot\sqrt{3x+x^2}};$$

$$\left(\left(8x^3-21\right)\cdot\sqrt[3]{\left(7+4x^3\right)^2}\right)'=24x^2\cdot\sqrt[3]{\left(7+4x^3\right)^2}+\left(8x^3-21\right)\cdot\frac{2}{3}\left(7+4x^3\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot12x^2=$$

$$=24x^2\cdot\sqrt[3]{\left(7+4x^3\right)^2}+\frac{8x^2\cdot\left(8x^3-21\right)}{\sqrt[3]{7+4x^3}}=\frac{24x^2\sqrt[3]{\left(7+4x^3\right)^2}+8x^2\left(8x^3-21\right)}{\sqrt[3]{7+4x^3}}=$$

$$=\frac{24x^2\left(7+4x^3\right)+8x^2\cdot\left(8x^3-21\right)}{\sqrt[3]{7+4x^3}}=\frac{168x^2+96x^5+64x^5-168x^2}{\sqrt[3]{7+4x^3}}=\frac{160x^5}{\sqrt[3]{7+4x^3}}.$$

$$\left((4x-7)\cdot(3x+7)\cdot\sqrt[3]{3x+7}\right)'=\left(\left(12x^2+28x-21x-49\right)\cdot\sqrt[3]{3x+7}\right)'=\left(\left(12x^2+7x-49\right)\cdot\sqrt[3]{3x+7}\right)'=$$

$$=(24x+7)\cdot\sqrt[3]{3x+7}+\left(12x^2+7x-49\right)\cdot\frac{(3x+7)^{-\frac{2}{3}}\cdot3}{-3}$$

(див. після правила)

Щоб обчислити похідну добутку трьох і більше функцій доречно користуватися таким правилом:

1) визначити похідну першого співмножника;
2) помножити її на добуток всіх інших множників;
3) додати похідну другого співмножника, помножену на добуток двох інших співмножників;

4) додати похідну третього співмножника, помножену на добуток двох інших співмножників.

Тобто, якщо f, φ і g – диференційовані функції, то

$$(f \cdot \varphi \cdot g)' = f' \cdot \varphi \cdot g + f \cdot \varphi' \cdot g + f \cdot \varphi \cdot g'.$$

$$\left((4x-7)\cdot(3x+7)\cdot\sqrt[3]{3x+7}\right)' = (4x-7)'\cdot(3x+7)\cdot\sqrt[3]{3x+7} + (4x-7)\cdot(3x+7)'\cdot\sqrt[3]{3x+7} +$$

$$+(4x-7)\cdot(3x+7)\cdot\left(\sqrt[3]{3x+7}\right)' = 4\cdot(3x+7)\cdot\sqrt[3]{3x+7} + 3\cdot(4x-7)\cdot\sqrt[3]{3x+7} +$$

$$+(4x-7)\cdot(3x+7)\cdot\frac{1\cdot 3}{3\cdot(3x+7)^{\frac{2}{3}}} = 4\cdot(3x+7)\cdot\sqrt[3]{3x+7} + 3\cdot(4x-7)\cdot\sqrt[3]{3x+7} + (4x-7)\cdot\sqrt[3]{3x+7} =$$

$$= \sqrt[3]{3x+7}\cdot(12x+28+12x-21+4x-7) = \sqrt[3]{3x+7}\cdot 28x = 28x\cdot\sqrt[3]{3x+7}.$$

$$\left(\frac{5+3x+x^2}{5-3x+x^2}\right)' = \frac{(3+2x)\cdot(5-3x+x^2)-(5+3x+x^2)\cdot(-3+2x)}{(5-3x+x^2)^2} =$$

$$= \frac{15-9x+3x^2+10x-6x^2+2x^3+15-10x+9x-6x^2+3x^2-2x^3}{(5-3x+x^2)^2} =$$

$$= \frac{30+3x-6x^2}{(5-3x+x^2)^2} = \frac{6\cdot(5-x^2)}{(5-3x+x^2)^2}.$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{1\cdot\sqrt{1+x^2} - x\cdot\dfrac{1\cdot 2x}{2\cdot\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{\dfrac{2(1+x^2)-2x^2}{2\cdot\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{2+2x^2-2x^2}{2\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot(1+x^2)} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$(\sin kx)' = \cos kx\cdot(kx)' = k\cdot\cos kx.$$

$$(\sin kx)' = \cos kx\cdot(kx)' = k\cdot\cos x.$$

$$(tgkx)' = \frac{1}{\cos^2 kx}\cdot(kx)' = \frac{k}{\cos^2 kx}.$$

$$(ctgkx)' = \frac{1}{\cos^2 kx}\cdot(kx) = \frac{k}{\cos^2 kx}.$$

$$(\sin 2x^2)' = \cos 2x^2\cdot(2x^2)' = \cos 2x^2\cdot 4x = 4x\cdot\cos 2x^2.$$

$$(\sin\sqrt{x})' = \cos\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}.$$

$$\left(tg\frac{1+x}{x}\right)' = \frac{1}{\cos^2\dfrac{1+x}{x}}\cdot\left(\frac{1+x}{x}\right)' = \frac{1}{\cos^2\dfrac{1+x}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}+1\right)' = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\dfrac{1+x}{x}}.$$

$$\left(\cos\sqrt{\frac{1}{1+x}}\right)' = -\sin\sqrt{\frac{1}{1+x}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\dfrac{1}{1+x}}}\cdot\left(-\frac{1}{\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^2}\right) = \frac{\sin\sqrt{\dfrac{1}{1+x}}}{2\cdot\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{2,5}}.$$

$$(3\sin^2 x)' = 3\cdot 2\sin x\cdot\cos x = 3\cdot\sin 2x.$$

$$(\cos^6 x)' = 6\cos^5 x\cdot(-\sin x) = -3\sin 2x\cdot\cos 4x.$$

$$\left(\sqrt{\sin x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x.$$

$$\left(\sqrt{\sin^2 x + \cos^3 4x}\right)' = \frac{1\cdot\left(2\sin x\cdot\cos x + 3\cdot 3\cos^2 4x\cdot(-\sin 4x)\cdot 4\right)}{2\cdot\sqrt{\sin^2 x + \cos^3 4x}} = \frac{\sin 2x - 18\sin 8x\cdot\cos 4x}{2\cdot\sqrt{\sin^2 x + \cos^3 4x}}.$$

$$\left(\frac{1}{\cos^3 x}\right)' = -\frac{1}{\cos^6 x}\cdot 3\cdot\cos^2 x\cdot(-\sin x) = -\frac{3\sin x}{\cos^4 x}.$$

$$\left(x^3\cdot\sin x + 3x^2\cos x - 6x\cdot\sin x - 6\cos x\right)' =$$

$$= 3x^2\cdot\sin x + x^3\cdot\cos x + 6x\cdot\cos x + 3x^2\cdot(-\sin x) - 6\cdot\sin x - 6x\cos x - 6\cdot(-\sin x) = x^3\cdot\cos x.$$

У випадках невизначеностей вигляду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ можна скористатися правилом Лопіталя (французький математик XVIII ст.) яке полягає в тому, що обчислення границі функції відношення замінюється обчисленням границі відношення похідних чисельника та знаменника.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \lim_{x\to a}\frac{\left(x^m - a^m\right)'}{\left(x^n - a^n\right)'} = \lim_{x\to a}\frac{m\cdot x^{m-1} - 0}{n\cdot x^{n-1} - 0} = \frac{m\cdot x^{m-1}}{n\cdot x^{n-1}} = \frac{m}{n}\cdot a^{m-1-(n-1)} = \frac{m}{n}a^{m-n}.$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15} = \lim_{x\to -1}\frac{3x^2 - 10x + 2}{4x^3 - 6x^2 - 32x + 2} =$$

$$= \frac{3\cdot(-1)^2 - 10\cdot(-1) + 2}{4\cdot(-1)^3 - 6\cdot(-1)^2 - 32\cdot(-1) + 2} = \frac{3 + 10 + 2}{-4 - 6 + 32 + 2} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}.$$

Якщо після перших похідних чисельника та знаменника знову утворюється невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, потрібно переходити до других похідних і т.д.

Завдання для самостійної роботи:

$\left(7x^6\right)'$. Відповідь: $42x^5$.

$\left(8\sqrt{x}\right)'$. Відповідь: $\frac{4}{\sqrt{x}}$.

$\left(\frac{4}{x^5}\right)'$. Відповідь: $-\frac{20}{x^6}$.

$\left(\frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}\right)'$. Відповідь: $-\frac{15}{4x\cdot\sqrt[4]{x^3}}$.

$\left(\frac{\sqrt[6]{x^5}}{8}\right)'$. Відповідь: $\frac{5}{48\cdot\sqrt[6]{x}}$.

$\left(\frac{4\sqrt{x}}{7}\right)'$. Відповідь: $\frac{2}{7\sqrt{x}}$.

$\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{13}{5}x^5-2x^6+\frac{4}{7}x^7\right)'$. Відповідь: $x^2\cdot\left(1-6x+13x^2-12x^3+4x^4\right)$.

$\left(9x^7-\frac{3}{x^5}+\frac{3}{x^{11}}\right)'$. Відповідь: $63^6+\frac{15}{x^6}+\frac{33}{x^{12}}$.

$\left(3x^2\sqrt[3]{x}-4x\sqrt[4]{x^3}+9\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{4}{7x^2\cdot\sqrt[3]{x}}\right)'$.

Відповідь: $7x\sqrt[3]{x}-7\sqrt[4]{x}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}-\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x\sqrt{x}}+\frac{4}{3x^3\sqrt[3]{x}}$.

$\left(\frac{5x^2}{\sqrt[3]{x^2}}+30\cdot\sqrt[15]{x}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)'$. Відповідь: $8\cdot\sqrt[5]{x^3}+\frac{\sqrt[15]{x}}{x}-\frac{2}{x\cdot\sqrt[3]{x}}$.

$\left(27x^3-\frac{81}{2}x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}+12x^2+\frac{12}{5}x\cdot\sqrt[3]{x^2}\right)'$. Відповідь: $\left(9x-6\cdot\sqrt[3]{x^2}-2\cdot\sqrt[3]{x}\right)^2$.

$\left(\left(5x^2+7x+2\right)^3\right)'$. Відповідь: $3\cdot\left(5x^2+7x+2\right)^2\cdot\left(10x+7\right)$.

$\left(\left(5x^3+4x^2+8\right)^4\right)'$. Відповідь: $4\cdot\left(5x^3+4x^2+8\right)^3\cdot\left(15x^2+8x\right)$.

$\left(\sqrt{3x^2+5x+1}\right)'$. Відповідь: $\frac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x+1}}$.

$\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right)'$. Відповідь: $-\frac{x}{\left(x^2+5\right)\cdot\sqrt{x^2+5}}$.

$\left(\frac{10}{\left(4x^3-5x^2+7x+1\right)^2}\right)'$. Відповідь: $-\frac{40\cdot\left(12x^2-10x+7\right)}{\left(4x^3-5x^2+7x-1\right)^5}$.

$\left(\sqrt[3]{4+2\sqrt{3x}+3x}\right)'$. Відповідь: $\frac{1+\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}\cdot\left(\sqrt[3]{4+2\sqrt{3x}+3x}\right)^2}$.

$\left(\sqrt[4]{\left(3+4\cdot\sqrt[3]{2x}\right)^3}\right)'$. Відповідь: $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{3+4\cdot\sqrt[3]{2x}}}$.

$\left(\left(5x^2-7x+2\right)\cdot\left(15x^2+5\right)^3\right)'$. Відповідь: $\left(10x-7\right)\cdot\left(15x^2+5\right)^3+90x\cdot\left(15x^2+5\right)^2\cdot\left(5x^2-7x+2\right)$.

$\left(\left(\frac{10}{3}-2x+x^2\right)\cdot\sqrt{\left(5+2x\right)^3}\right)'$. Відповідь: $7x^2\cdot\sqrt{5+2x}$.

$\left(\left(3x^4+4\right)\cdot\sqrt[4]{9x^4-3}\right)'$. Відповідь: $\frac{135x^7}{\sqrt[4]{\left(9x^4-3\right)^3}}$.

$\left(\left(\frac{2}{3x^3}+\frac{28}{27x}\right)\cdot\sqrt{7x^2-9}\right)'$. Відповідь: $\frac{18}{x^4\cdot\sqrt{7x^2-9}}$.

$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'$. Відповідь: $\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$.

$\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)'$. Відповідь: $\frac{4x}{\left(1-x^2\right)^2}$.

$(\sin 3x)'$. Відповідь: $3\cos x$.

$(\sin 5x)'$. Відповідь: $5\cos 5x$.

$(\sin 15x)'$. Відповідь: $15\cos 15x$.

$(\sin 4x)'$. Відповідь: $-4\sin 4x$.

$(-\cos 3x)'$. Відповідь: $3\sin 3x$.

$(\cos 9x)'$. Відповідь: $-9\sin 9x$.

$\left(\sin\sqrt{\frac{1}{1-x}}\right)'$. Відповідь: $\frac{\cos\sqrt{\frac{1}{1-x}}}{2\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)^{2,5}}$.

$\left(\sqrt{\sin x}\right)'$. Відповідь: $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.

$\left(\sqrt{\frac{1}{\cos x}}\right)'$. Відповідь: $\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{\cos x}}}\cdot\frac{tgx}{\cos x}$.

$\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)'$. Відповідь: $-\frac{2\cos x}{(-1+\sin x)^2}$.

$(\sin 3x)'$. Відповідь: $3\sin^2 x\cdot\cos x$.

$\left(tg^3 x\right)'$. Відповідь: $3tg^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$.

$\left(ctgx^4 x\right)'$. Відповідь: $-4ctg^3 x\cdot\frac{1}{\sin^2 x}$.

$\left(5\cos^5 x\right)'$. Відповідь: $-24\cos^4 x\cdot\sin x$.

$(7\cdot tg6x)'$. Відповідь: $42tg^5 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$.

$\left(8\sin^2 x\right)'$. Відповідь: $8\sin 2x$.

$\left(tgx+\frac{1}{3}tg^3 x\right)'$. Відповідь: $\frac{1}{\cos^4 x}$.

$\left(\left(\frac{2}{\cos^4 x}+\frac{3}{\cos^2 x}\right)\cdot\sin x\right)'$. Відповідь: $\frac{8-3\cos^4 x}{\cos^5 x}$.

$(tgx-ctgx-2)'$. Відповідь: $tg^2 x+ctg^2 x$.

$\left(\left(\cos^2 x+\frac{2}{3}\right)\cdot\sin^3 x\right)'$. Відповідь: $5\sin^2 x\cdot\cos^3 x$.

$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-8x^2+17x-10}{x^4-5x^3-2x^2+11x-5}$. Відповідь: $\dfrac{3}{29}$.

$f(x)=\dfrac{x^3-2}{x^3+2}$; $f'(1)-?$ Відповідь: $1\dfrac{1}{3}$.

$f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$; $f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-?$ Відповідь: 0.

$f(x)=x^3\ln x-\sin^4 x$; $f'''(x)-?$ Відповідь: $6\ln x+64\cos 4x+11$.

$S=-\dfrac{1}{6}t^3+3\cdot t^2-5,\ a=0,\ t=?$ Відповідь: *6 с; 18 м/с.*

<u>Задача.</u> Під яким кутом нахилена дотична до осі OX до $y=x^3-x^2-7x+6$ в т. $(2;-4)$?

Відповідь: 45°.

<u>Задача.</u> Написати рівняння дотичної до графіка функції $y=\dfrac{x^2-5}{x^2-4}$ в т. $x_0=1$.

Відповідь: $y=\dfrac{2}{9}x+1\dfrac{1}{9}$.

<u>Задача.</u> Визначити розміри відкритого басейну з квадратним дном об'ємом 32 $м^3$ так, щоб на облицювання його стін і дна пішло найменше матеріалу.

Відповідь: *4 м, 2 м.*

<u>Задача.</u> При якому значенні параметра *a* функція $y=x^3-2{,}4x^2+ax-8{,}4$ не має екстремумів в критичних точках?

Відповідь: $a\neq 1{,}92$.