Розділ 14
Алгебраїчні нерівності

Нерівності степеня вище двох розв'язуються вищеописаним методом інтервалів.
Цим же методом доцільно розв'язувати і нерівності вигляду:

$$\frac{\left(\sqrt{2^x}-8^{\frac{2}{3}}\right)\cdot(x-6)^2\cdot(x+3)}{\log_3(x+2)}\ge 0.$$

Розв'язання:

Позначимо $f(x)=\dfrac{\left(\sqrt{2^x}-8^{\frac{2}{3}}\right)\cdot(x-6)^2\cdot(x+3)}{\log_3(x+2)}$.

Знайдемо область визначення функції $f(x)$:

$$\begin{cases}x+2>0,\\ \log_3(x+2)\ne 0.\end{cases}\quad \begin{cases}x>-2,\\ \log_3(x+2)\ne \log_3 1.\end{cases}\quad \begin{cases}x>-2,\\ x+2\ne 1.\end{cases}\quad \begin{cases}x>-2,\\ x\ne 1-2.\end{cases}\quad \begin{cases}x>-2,\\ x\ne -1.\end{cases}$$

$D(f)=(-2;-1)\cup(-1;+\infty).$

Знайдемо нулі функції $f(x)$: $\dfrac{\left(\sqrt{2^x}-8^{\frac{2}{3}}\right)\cdot(x-6)^2\cdot(x+3)}{\log_3(x+2)}=0.$

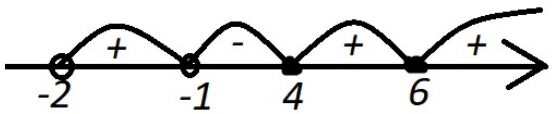
Це рівняння рівносильне такій системі:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{2^x}-8^{\frac{2}{3}}=0,\\ (x-6)^2=0,\\ x+3=0,\end{array}\right.\\ x\in(-2;-1)\cup(-1;+\infty)\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}2^{\frac{x}{2}}-\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}=0,\\ x-6=0,\\ x+3=0,\end{array}\right.\\ x\in(-2;-1)\cup(-1;+\infty)\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}2^{\frac{x}{2}}=2^2,\\ x=6,\\ x=-3,\end{array}\right.\\ x\in(-2;-1)\cup(-1;+\infty)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}=2,\\ x=6,\\ x=-3,\end{array}\right.\\ x\in(-2;-1)\cup(-1;+\infty)\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=4,\\ x=6,\\ x=-3,\end{array}\right.\\ x\in(-2;-1)\cup(-1;+\infty)\end{cases}\quad \begin{array}{l}4\in D(f),\\ 6\in D(f),\\ -3\notin D(f)\end{array}$$

Нулі функції: $x=4$ і $x=6$.

На числовій прямій позначимо область визначення функції і в ній відмітимо нулі функції:



Виберемо по одній точці з кожного інтервалу і обчислимо знак значення функції: $f(x)$ в ній:

$f(-1{,}5)=\dfrac{"-"\cdot"+"\cdot"+"}{"-"}>0;$ $f(0)=\dfrac{"-"\cdot"+"\cdot"+"}{"+"}<0;$ $f(5)=\dfrac{"+"\cdot"+"\cdot"+"}{"+"}>0;$ $f(8)=\dfrac{"+"\cdot"+"\cdot"+"}{"+"}>0;$

У відповідь записуємо ті проміжки, на яких функція $f(x)\geq 0$:

Відповідь: $(-2;-1)\cup[4;+\infty)$.

Дробово-раціональні нерівності розв'язуються теж методом інтервалів, але серед них є такі, які можна розв'язувати трохи раціональним методом, так званим методом «змійки». Суть його полягає в тому, що встановлюють ОДЗН, наносять її на числову пряму. Ліву частину нерівності позначають як функцію від *x*, наприклад $f(x)$. Шукають корені функції і позначають їх в області визначення. При цьому числа, які перетворюють знаменник в нуль, позначають мініатюрними колами, а нулі функції в разі строгої нерівності – теж колами, у випадку нестрогої нерівності – кружечками. Якщо показник степеня при множнику $(x-a_i)$– парне число, то число a_i називають нулем парної кратності. Доцільно на рисунках нулі парної кратності підкреслювати. Починаючи з правого верхнього краю маємо лінію (так звану *змійку*), що проходить через усі позначені в області визначення точки. При проходженні через точки парної кратності «змійка» не переходить з однієї числової прямої, а спрямовується до наступної точки. Над інтервалом, де «змійка» розміщена вище числової прямої, пишуть знак «+», а де нижче «–». Проілюструємо сказана на прикладах.

Розв'язати нерівність:

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\geq\frac{2}{3x+1}.$$

Розв'язання:

$\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{3x+1}\geq 0;$ $\dfrac{(3x+1)\cdot(x-1)-(x+1)\cdot(3x+1)\cdot 2\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(3x+1)}\geq 0;$

$\dfrac{3x^2-3x+x-1-3x^2-x-3x-1-2x^2+2}{(x+1)(x-1)(3x+1)}\geq 0;$ $\dfrac{-2x^2-6x}{(x+1)(x-1)(3x+1)}\geq 0;$

$\dfrac{-2x(x+3)}{(x+1)(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)}\geq 0\Big|\times\left(-\dfrac{3}{2}\right);$ $\dfrac{x(x+3)}{\left(x+\frac{1}{3}\right)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}\leq 0$ *(A)*

Позначимо $f(x)=\dfrac{x(x+3)}{\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+1)(x-1)}$.

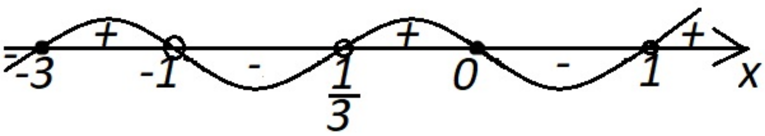
Шукаємо ОДЗН: $\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+1)(x-1)\neq 0.$

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{3}\neq 0, \\ x+1\neq 0, \\ x-1\neq 0. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x\neq \dfrac{1}{3}, \\ x\neq -1, \\ x\neq 1. \end{array}\right.$$

Область визначення $D(f)=(-\infty;-1)\cup\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{3};1\right)\cup(1;+\infty).$

Шукаємо нулі функції:

$$x\cdot(x+3)=0\rightarrow\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x+3=0. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-3. \end{array}\right.$$



Оскільки нулі парної кратності функції немає, то викреслюємо послідовно «змійку», починаючи з верхнього правого краю, через усі позначені в області визначення точки.

Враховуючи знак нерівності *(A)*, у відповідь записуємо числові проміжки, над якими стоїть знак «–».

Відповідь: $(-\infty;-3]\cup\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right)\cup(0;1).$

Правило «змійки» зручніше від методу інтервалів тим, що відпадає необхідність вибирати з кожного проміжку по одній точці і обчислювати значення функції в цих точках.

$$\frac{x}{x+1}+\frac{x-2}{x^3+1}>\frac{2}{x^2-x+1}.$$

Розв'язання:

$$\frac{x}{x+1}+\frac{x-2}{x^3+1}\frac{2}{x^2-x+1}>0;\rightarrow\frac{x}{x+1}+\frac{x-2}{(x+1)(x^2-x+1)}-\frac{2}{x^2-x+1}>0;$$

$$\rightarrow\frac{x(x^2-x+1)+x-2-2(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}>0;\rightarrow\frac{x^3-x^2+x+x-2-2x-2}{(x+1)(x^2-x+1)}>0;$$

$$\rightarrow\frac{x^3-x^2-4}{(x+1)(x^2-x+1)}>0.$$

Розкладаємо чисельник x^3-x^2-4 на множники. Неважко переконатися, що число 2 є коренем цього рівняння, тобто $x_1=2$.

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-4 & x-2 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3-2x^2} & x^2+x+2 \\ x^2-4 & \\ -\underline{x^2-2x} & \\ 2x-4 & \\ -\underline{2x-4} & \\ 0 & \end{array}$$

$x^2+x+2=0,\ D=1-8=-7<0,\ x\in\varnothing.$

Цей тричлен набуває лише додатних значень.

Аналогічно можна довести, що $x^2-x+1>0.$

Тоді $\dfrac{(x-2)\cdot\left(x^2+x+2\right)}{(x+1)\cdot\left(x^2-x+1\right)}>0 \;\left|\times\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+2}\right.$

Утворилась рівняння рівносильне даній:

$\dfrac{x-2}{x+1}>0.$

ОДЗН: $x+1\neq 0,\ x\neq -1.$

$D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty).$

Нуль функції $x-2=0,\quad x=2.$

Коренів парної кратності функції немає. Починаючи з верхнього правого краю, викреслюємо "змійку".

Відповідь: $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty).$

$\dfrac{\left(-x^2-1\right)\cdot(x-1)^3\cdot\left(x^2-4\right)^2\cdot\left(x^2-9\right)^5}{(1+3x)\cdot\left(x^2-x-6\right)}\leq 0.$

Розв'язання:

$\dfrac{-\left(x^2+1\right)\cdot(x-1)^3\cdot(x-2)^2\cdot\left(x^2+2\right)^2\cdot(x-3)^5\cdot(x+3)^5}{3\cdot\left(\dfrac{1}{3}+x\right)\cdot\left(x^2-x-6\right)}\leq 0\left|\times(-3)\right.;$

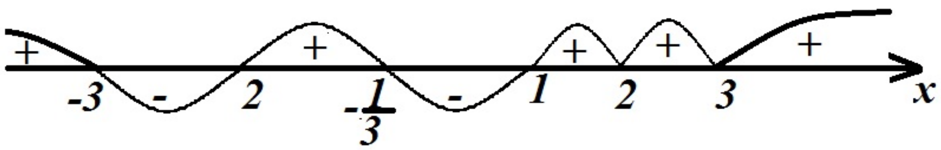
$\dfrac{\left(x^2+1\right)\cdot(x-1)^3\cdot(x-2)^2\cdot(x+2)^2\cdot(x-3)^5\cdot(x+3)^5}{\left(x+\dfrac{1}{3}\right)\cdot(x-3)(x+2)}\geq 0.$

Оскільки $\begin{matrix}x-3\neq 0,\\ x+2\neq 0\end{matrix}$ то можна скоротити:

$\dfrac{\left(x^2+1\right)\cdot(x-1)^3\cdot(x-2)^2\cdot(x+2)\cdot(x-3)^4\cdot(x+3)^5}{x+\dfrac{1}{3}}\geq 0.$

Область визначення $(-\infty;-2)\cup\left(-2;-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{3};3\right)\cup(3;+\infty),\ \ x^2+1>0$ при всіх значеннях *x*. Розділимо обидві частини нерівності на $\left(x^2+1\right)$:

$\dfrac{(x-1)^3\cdot(x-2)^2\cdot(x+2)\cdot(x-3)\ \cdot(x+3)^5}{x+\dfrac{1}{3}}\geq 0$



Враховуючи той факт, що *2* і *3* - нулі парності функції, викреслюємо "змійку".

Відповідь: $(-\infty;-3]\cup\left(-2;-\dfrac{1}{3}\right)\cup[1;3)\cup(3;+\infty).$

$$\frac{\left(x^2-x-2\right)\cdot\left(x^2+5x+6\right)^3\cdot(2x+5)^4}{\left(x^2-2x-3\right)^2\cdot\left(x^2-x-20\right)}\le 0.$$

Розв'язання:

Застосовуючи теорему Вієта, розкладемо квадратні тричлени на множники:

$x^2-x-2=(x-2)\cdot(x+1);\;\; x^2+5x+6=(x+2)\cdot(x+3);\;\; x^2-2x-3=(x-3)(x+1);$

$x^2-x-20=(x+4)(x-5).$

Тоді дана нерівність матиме вигляд:

$$\frac{(x-2)\cdot(x+1)\cdot((x+2)\cdot(x+3))^3\cdot(2\cdot(x+2{,}5))^4}{((x-3)(x+1))^2\cdot(x+4)(x-5)}\le 0;$$

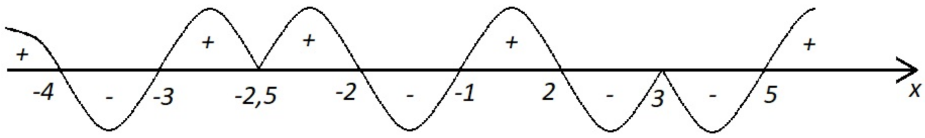
$$\frac{(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+2)^3\cdot(x+3)^3\cdot 16\cdot(x+2{,}5)^4}{(x-3)^2\cdot(x+1)^2\cdot(x+4)\cdot(x-5)}\le 0;$$

$D(f)=(-\infty;-4)\cup(-4;-1)\cup(-1;3)\cup(3;5).$

Так як $x+1\ne 0,$ то на цей вираз скоротимо:

$$\frac{(x-2)\cdot(x+2)^3\cdot(x+3)^3\cdot 16\cdot(x+2{,}5)^4}{(x-3)^2\cdot(x+1)\cdot(x+4)\cdot(x-5)}\le 0;$$

Нулі функції $x=2;\; x=-2;\; x=-3;\; x=-2{,}5.$



Враховуючи, що числа $-2{,}5$ і 3 є нулями парної кратності викреслюємо «змійку».

Відповідь: $(-4;-3)\cup\{-2{,}5\}\cup[-2;-1)\cup[2;3)\cup(3;5).$

$\left(x^2-4\right)\cdot\left(x^2-4x+4\right)\cdot\left(x^2-6x+8\right)\cdot\left(x^2+4x+4\right)\cdot\left(x^2-4x+5\right)\le 0.$

Розв'язання:

Розкладемо на множники вирази, що знаходяться в дужках:

$x^2-4=(x-2)\cdot(x+2);\;\; x^2-4x+4=(x-2)^2;\;\; x^2-6x+8=0,\;\; x_1=2;\;\; x_2=4.$

$x^2-6x+8=(x-2)\cdot(x-4);\;\; x^2+4x+4=(x+2)^2;\;\; x^2-4x+5=0;\;\; D=16-25=-9<0$

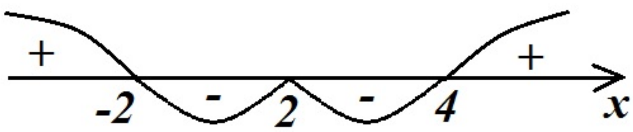
$x^2-4x+5>0$ при всіх значеннях *x*. Тоді

$(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-2)^2\cdot(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x+2)^2\cdot\left(x^2-4x+5\right)\le 0;$

$(x-2)^4\cdot(x+2)^3\cdot(x-4)\cdot\left(x^2-4x+5\right)\le 0 \,\big|\, :\left(x^2-4x+5\right);$

$(x-2)^4\cdot(x+2)^3\cdot(x-4)\le 0;\;\; D(f)=(-\infty;+\infty).$

Нулі функції: $x=2-$ парної кратності; $x=-2;\;\; x=4.$



$x\in[-2;2]\cup[2;4].$

Відповідь: $[-2;4].$

$\left(x^2 - x - 6\right)^2 - 6 \cdot \left(x^2 - x - 5\right) + 6 \geq 0.$

Розв'язання:

Введемо нову змінну $t = x^2 - x - 6 \,|+1;\ t + 1 = x^2 - x - 5.$

Тоді $t^2 - 6 \cdot (t+1) + 6 \geq 0,\ t^2 - 6t - 6 + 6 \geq 0,\ t^2 - 6t \geq 0,\ t(t-6) \geq 0,\ t = 0,\ t = 6 -$ нулі функції.

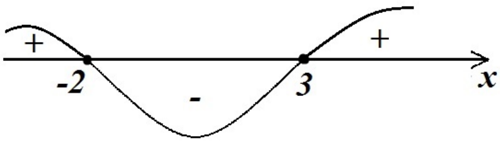
$t \in (-\infty; 0] \cup [6; +\infty).$

Використовуючи заміну, дістанемо сукупність нерівностей:

$\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 6 \leq 0, \\ x^2 - x - 6 \geq 0. \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 6 \leq 0, \\ x^2 - x - 12 \geq 0. \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} (x-3)(x+2) \leq 0, \\ (x-4)(x+3) \geq 0. \end{array}\right.$

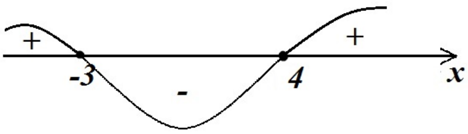
Розв'яжемо кожну нерівність сукупність методом "змійки":

$(x-3)(x+2) \leq 0$



$x \in [-2; 3]$

$(x-4)(x+3) \geq 0$



$x \in (-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$

Відповідь: $(-\infty; -3] \cup [-2; 3] \cup [4; +\infty).$

$(x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-5) \cdot (x-7) > 9.$

Розв'язання:

Перемножимо два крайніх множники і два середніх:

$(x-1) \cdot (x-7) \cdot (x-3) \cdot (x-5) = \left(x^2 - 7x - x + 7\right) \cdot \left(x^2 - 5x - 3x + 15\right) =$

$= \left(x^2 - 8x + 7\right) \cdot \left(x^2 - 8x + 15\right).$ Тоді $\left(x^2 - 8x + 7\right) \cdot \left(x^2 - 8x + 15\right) - 9 > 0.\ (A)$

Введемо нову змінну: $x^2 - 8x + 7 = t \,|+8,\ x^2 - 8x + 15 = t + 8.$

Нерівність *(A)* набуває вигляду:

$t \cdot (t+8) - 9 > 0,\ t^2 + 8t - 9 > 0,\ t_1 = -9,\ t_2 = 1.$

Несподіваний хід: $t^2 + 8t - 9 = (t+9) \cdot (t-1).$

$(t+9) \cdot (t-1) = \left(x^2 - 8x + 7 + 9\right) \cdot \left(x^2 - 8x + 7 - 1\right) = \left(x^2 - 8x + 16\right) \cdot \left(x^2 - 8x + 6\right) =$

$= (x-4)^2 \cdot \left(x - 4 + \sqrt{10}\right) \cdot \left(x + 4 + \sqrt{10}\right);$

$D = 64 - 24 = 40 = 4 \cdot 10.$

$x_1 = \frac{8 - 2\sqrt{10}}{2} = 4 - \sqrt{10}; \; x_2 = 4 + \sqrt{10}.$

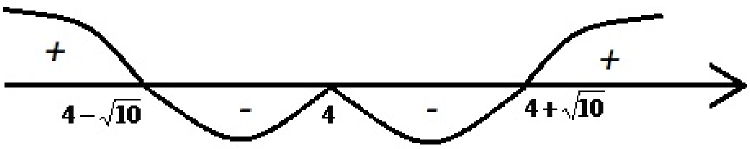
Тоді $(x-4)^2 \cdot \left(x - \left(4 - \sqrt{10}\right)\right) \cdot \left(x + \left(4 + \sqrt{10}\right)\right) > 0.$

Позначимо $f(x) = (x-4)^2 \cdot \left(x - \left(4 - \sqrt{10}\right)\right) \cdot \left(x + \left(4 + \sqrt{10}\right)\right).$

Нулями цієї функції є числа:

$x = 4, \; x = 4 - \sqrt{10}, \; x = 4 + \sqrt{10}.$

Розв'язуємо нерівність методом «змійки».



Відповідь: $\left(-\infty; 4 - \sqrt{10}\right) \cup \left(4 + \sqrt{10}; +\infty\right).$

Ірраціональні нерівності

Їх зручно розв'язувати методом інтервалів.

$$\frac{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}{x + 1} < 1.$$

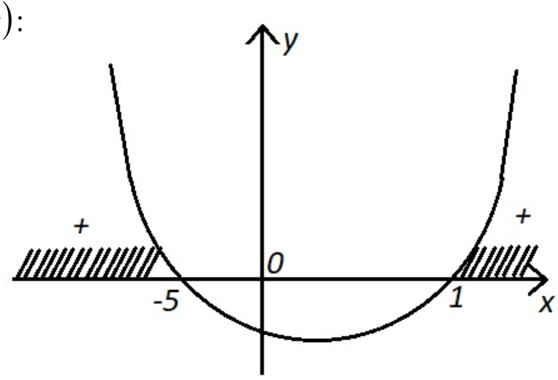
Розв'язання:

$$\frac{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}{x + 1} - 1 < 0; \; \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 5} - x - 1}{x + 1} < 0;$$

Позначимо $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 5} - x - 1}{x + 1}.$

Знайдемо область визначення функції $f(x)$:

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 \geq 0, \\ x + 1 \neq 0. \end{cases}$$



За теоремою Вієта $x_1 = -5, \; x_2 = 1.$

Тоді $\begin{cases} (x-1) \cdot (x+5) \geq 0, \\ x \neq -1. \end{cases}$

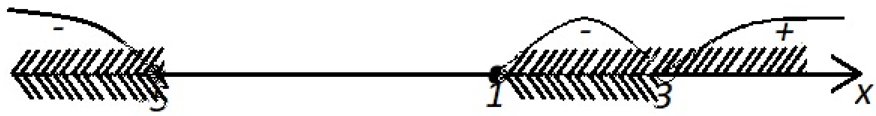
$D(f) = (-\infty; -5] \cup [1; +\infty).$

Знайдемо нулі функції $f(x)$: $f(x) = 0,$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 4x - 5} - x - 1}{x + 1} = 0, \; \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4x - 5} - x - 1 = 0, \\ x + 1 \neq 0. \end{cases} \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4x - 5} = x + 1, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 = (x+1)^2, \\ x + 1 \geq 0, \\ x \neq -1. \end{cases} \begin{cases} x^2 + 4x - 5 = x^2 + 2x + 1, \\ x > -1. \end{cases} \begin{cases} 2x - 6 = 0, \\ x > -1. \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ x > -1. \end{cases}$$



Заштрихуємо область визначення функції $f(x)$.
Позначимо в ній $x = 3 -$ нуль функції.
Відмітимо утворені інтервали і визначимо знак функції $f(x)$ на кожному з них:

$$f(-8) = \frac{\sqrt{64-32-5}+8-1}{-8+1} = \frac{\sqrt{27}+7}{-7} = \frac{"+"}{"-"} < 0,$$

$$f(2) = \frac{\sqrt{2^2+8-5}-2-1}{2+1} = \frac{\sqrt{7}-3}{3} = \frac{"-"}{"+"} < 0,$$

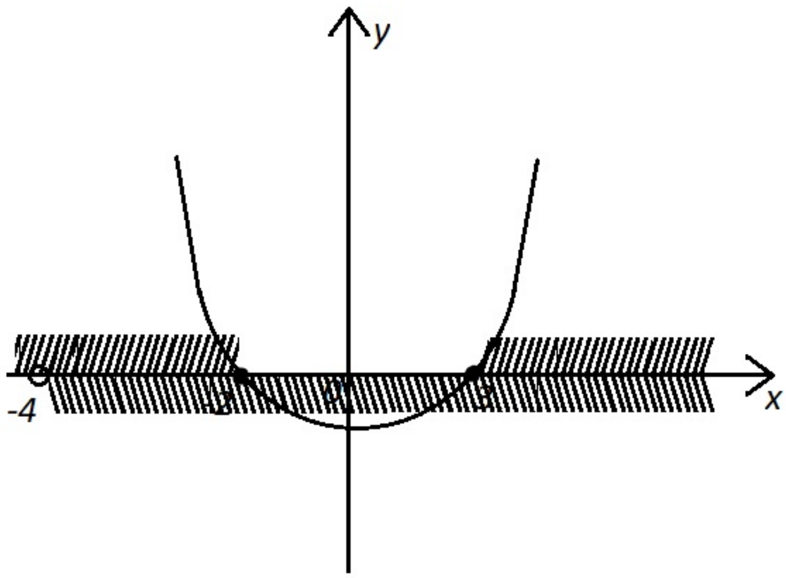
$$f(5) = \frac{\sqrt{25+20-5}-5-1}{5+1} = \frac{\sqrt{40}-6}{6} = \frac{"+"}{"+"} > 0.$$

Заштрихуємо проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень. У відповідь запишемо проміжки, на яких утворилась «ялинка».
Відповідь: $(-\infty;-5] \cup [1;3)$.
Є велика кількість ірраціональних нерівностей, які доцільно розв'язувати шляхом переходу до рівносильних систем або сукупностей систем простіших нерівностей.

$$\sqrt[4]{x^2-x-6} < \sqrt[4]{x^2+3x+10}.$$

Розв'язання:
Піднесемо обидві частини нерівності до 4-го степеня:

$$\begin{cases} x^2-x-6 < x^2+3x+10, \\ x^2-x-6 \ge 0. \end{cases} \quad \begin{cases} -4x < 16, |:(-4) \\ (x-3)\cdot(x+2) \ge 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x < -4, \\ (x-3)\cdot(x+2) \ge 0. \end{cases}$$

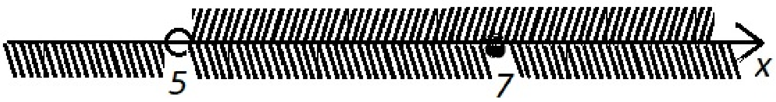


Відповідь: $(-4;-2] \cup [3;+\infty)$.

$$\sqrt{2x-8} > \sqrt{7-x}.$$

Розв'язання:

$$\begin{cases}2x-8>7-x,\\ 7-x\ge 0.\end{cases}\quad \begin{cases}3x>15,\\ x\le 7.\end{cases}\quad \begin{cases}x>5,\\ x\le 7.\end{cases}$$



Відповідь: $(5;7]$.

$\sqrt{4x-x^2}<4-x.$

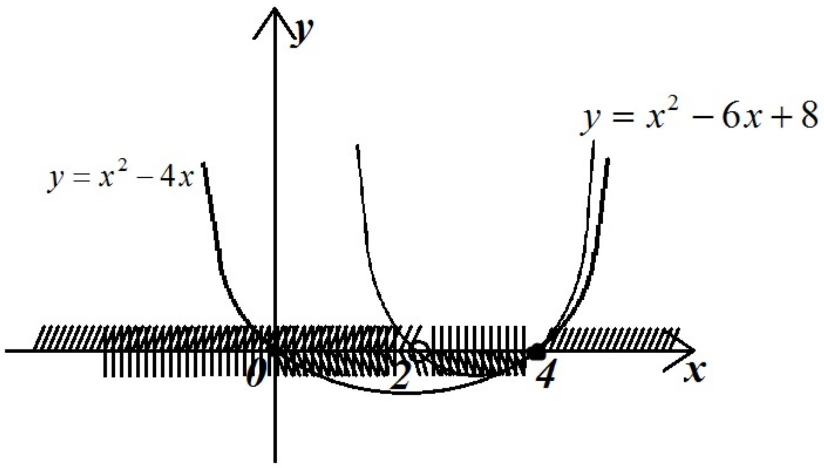
Розв'язання:

$$\begin{cases}4x-x^2<(4-x)^2,\\ 4x-x^2\ge 0,\\ 4-x\ge 0.\end{cases}\quad \begin{cases}4x-x^2<16-8x+x^2,\\ x(4-x)\ge 0\,|\cdot(-1),\\ x\le 4.\end{cases}\quad \begin{cases}-2x+12x-16<0\,|:(-2),\\ x\cdot(x-4)\le 0,\\ x\le 4.\end{cases}\quad \begin{cases}x^2-6x+8>0,\\ (x-4)x\le 0,\\ x\le 4.\end{cases}$$

За теоремою Вієта маємо: $x_1=2,\quad x_2=4,$ тоді має місце така система нерівностей:

$$\begin{cases}(x-2)\cdot(x-4)>0,\\ x\cdot(x-4)\le 0,\\ x\le 4.\end{cases}$$

На наш погляд, тут доречне графічна ілюстрація розв'язування системи нерівностей.



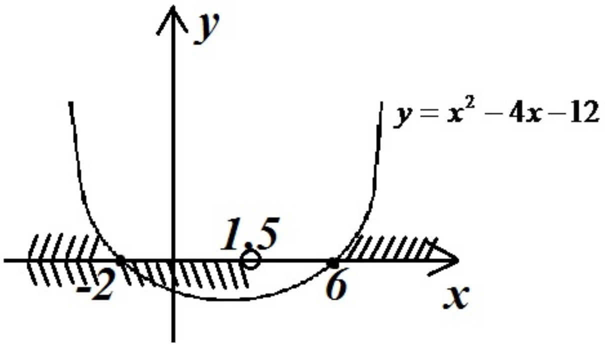
Відповідь: $[0;2)$.

$\sqrt{x^2-4x-12}>2x-3.$

Розв'язання:

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}2x-3\ge 0,\\ x^2-4x-12>(2x-3)^2.\end{cases}\\ &\begin{cases}2x-3<0,\\ x^2-4x-12\ge 0.\end{cases}\end{aligned}\right.\quad \left[\begin{aligned}&\begin{cases}x\ge 1{,}5,\\ x^2-4x-12>4x^2-12x+9.\end{cases}\\ &\begin{cases}x<1{,}5,\\ (x-6)(x+2)\ge 0.\end{cases}\end{aligned}\right.\quad \left[\begin{aligned}&\begin{cases}x\ge 1{,}5,\\ -3x^2+8x-21>0.\,|\cdot(-1)\end{cases}\\ &\begin{cases}x<1{,}5,\\ (x-6)(x+2)\ge 0.\end{cases}\end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases}x\ge 1{,}5,\\ 3x^2-8x+21<0.\end{cases}\quad \begin{cases}D=64-252<0,\\ x\ge 1{,}5.\end{cases}\quad \begin{cases}x<1{,}5,\\ (x-6)(x+2)\ge 0.\end{cases}$$

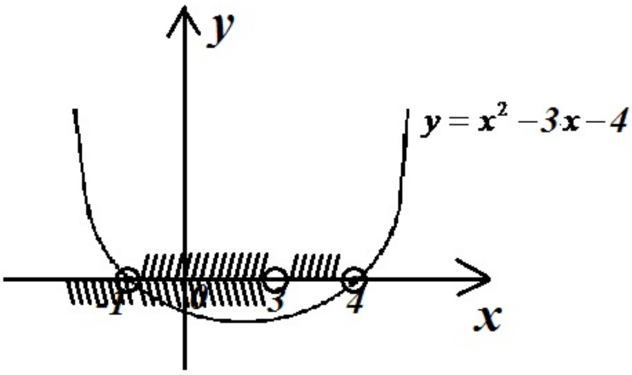


Відповідь: $(-\infty;-2]$.

$(3-x)\cdot\sqrt{4+3x-x^2} > 0.$

Розв'язання:

$\begin{cases} 3-x>0, \\ 4+3x-x^2>0 \,|\cdot(-1) \end{cases}$ $\begin{cases} x<3, \\ x^2-3x-4<0 \end{cases}$ $\begin{cases} x<3, \\ (x+1)(x-4)<0. \end{cases}$



Відповідь: $(-1;3)$.

$\dfrac{x^2-13x+40}{\sqrt[6]{19x-x^2-78}} \le 0.$

Розв'язання:

Оскільки $\sqrt[6]{19x-x^2-78} \ge 0$, то

$\begin{cases} x^2-13x+40 \le 0, \\ 19x-x^2-78>0. \end{cases}$

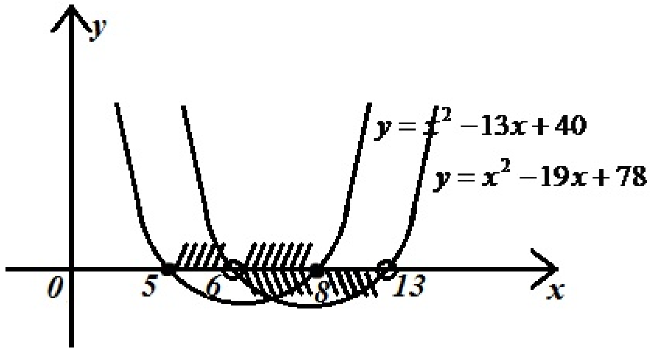
$x^2-13x+40=0$ за теоремою Вієта $x_1=5,\ x_2=8,$ тоді $x^2-13x+40=(x-5)(x-8)$

$-x^2+19x-78=0,\ \ x^2-19x+78=0,\ \ x_1=6,\ \ x_2=13.$

$x^2-19x+78=(x-6)(x-13)$

Система нерівностей матиме вигляд:

$\begin{cases} (x-5)(x-8)\le 0, \\ -(x^2-19x+78)>0 \,|\cdot(-1) \end{cases}$ $\begin{cases} (x-5)(x-8)\le 0, \\ x^2-19x+78>0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-5)(x-8)\le 0, \\ (x-6)(x-13)<0. \end{cases}$



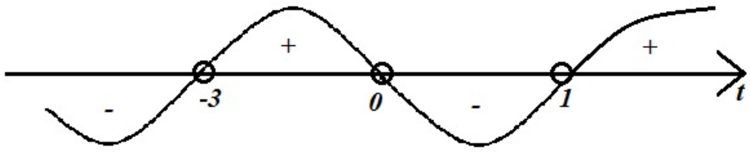
Відповідь: $(6;8]$.

$\frac{3}{\sqrt{x-2}} - \sqrt{2-x} < 2.$

Розв'язання:

Позначимо $\sqrt{2-x} = t,\ \ t > 0.$ Тоді $\frac{3}{t} - t - 2 < 0,\ \ \frac{-t^2 - 2t + 3}{t} < 0, |\cdot(-1)$

$\frac{t^2 + 2t - 3}{t} > 0,\ \ \frac{(t-1)(t+3)}{t} > 0.$



$t \in (-3;0) \cup (1;+\infty)$. Повертаючись до заміни, маємо:

$-3 < \sqrt{2-x} < 0,\ \ \sqrt{2-x} \geq 0, x \in \varnothing.$

$\sqrt{2-x} > 1.$ Піднесемо до квадрату:

$2 - x > 1, -x > -1, x < 1.\ \ x \in (-\infty;1).$

Відповідь: $(-\infty;1)$.