Розділ 4

Перетворення тригонометричних виразів

Перетворення тригонометричних виразів, як і перетворення будь-яких інших виразів є надійною пропедевтикою для дальнійшого розв’язування тригонометричних рівнянь, нерівностей та їх систем; доведення тотожностей, тощо. Оскільки цей матеріал становить значну частину всього об’єму математичного матеріалу загальноосвітньої школи, то перетворенню тригонометричних виразів необхідно приділяти велику увагу. Дуже важливо підібрати таку систему вправ, яка сприяла б виробленню вмінь і навичок обчислення значень тригонометричних функцій будь-яких значень аргументу за відомим значенням однієї з них. Деякі методисти для полегшення запам’ятовування тригонометричних формул та орієнтування в них рекомендують розділити основні тригонометричні тотожності на три групи:

1). Формули квадратів:

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1,$

$\sec^2\alpha - tg^2\alpha = 1, \qquad \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha};$

$\cos ec^2\alpha - ctg^2\alpha = 1, \qquad \cos ec\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}.$

2). Формули обернених величин:

$\sin\alpha \cdot \cos ec\alpha = 1,$

$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1,$

$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1.$

3). Формули ділення:

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha, \qquad \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = ctg\alpha.$ Груп формул слід дотримуватися такої послідовності: спочатку використати формули квадратів, потім –формули обернених величин, після них – формули ділення і, нарешті – знову формули обернених величин. Проілюструємо цю пораду на розв’язуванні такої вправи.

Дано: $\sec\alpha = -\dfrac{25}{7}$, $180^\circ \langle \alpha \ \langle 270^\circ$

Обчислити значення решти п’яти тригонометричних функцій. Розв’язання: З формул квадратів вибираємо $\sec^2\alpha - tg^2\alpha = 1.$ Визначаємо $tg^2 a = \sec^2 a - 1,$ $tg\alpha = \pm\sqrt{\sec^2\alpha - 1}.$ Оскільки α – кут третьої чверті, то $tg\alpha \rangle 0,$ а тому $tg\alpha = \sqrt{\left(-\dfrac{25}{7}\right)^2 - 1} = \sqrt{\dfrac{625}{49} - 1} = \sqrt{\dfrac{625-49}{49}} = \sqrt{\dfrac{576}{49}} = \dfrac{24}{7}.$ З формул обернених величин $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$ та $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$ знаходимо $ctg\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha} = \dfrac{1}{\frac{24}{7}} = \dfrac{7}{24}$ і

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{-\frac{25}{7}} = -\frac{7}{25}.$$

Формули ділення дають $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha, \quad \sin\alpha = tg\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{24}{7} \cdot \left(-\frac{7}{25}\right) = -\frac{24}{25}.$

Відповідь: $\sin\alpha = -\frac{24}{25}; \;\; \cos\alpha = -\frac{7}{25}; \;\; tg\alpha = \frac{24}{7}; \;\; ctg\alpha = \frac{7}{24}; \;\; \cos ec\alpha = -\frac{25}{24}.$

Так доцільно поступати і в тому випадку, коли потрібні всі тригонометричні функції виразити через одну з них. Ця робота необхідна при розв'язуванні тригонометричних рівнянь, нерівностей, доведенні тотожностей, тощо.

Довести тотожність: $2 \cdot \left(\cos^6\alpha + \sin^6\alpha\right) - 3 \cdot \left(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha\right) = -1.$

Розв'язання:

Рекомендація: складнішу частину (тобто праву) необхідно спростити:

л.ч. $= 2 \cdot \left(\cos^6\alpha + \sin^6\alpha\right) - 3 \cdot \left(\cos^4 + \sin^4\alpha\right) = 2 \cdot \left(\cos^4\alpha - \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + \sin^4\alpha\right) -$

$$\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = \left(\cos^2\alpha\right)^3 + \left(\sin^2\right)^3 =$$
$$= \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) \cdot \left(\cos^4\alpha - \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + \sin^4\alpha\right) =$$
$$= 1 \cdot \left(\cos^4\alpha - \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + \sin^4\alpha\right).$$

$$-3\left(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha\right) =$$
$$2\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha +$$
$$+ 2\sin^4\alpha - 3\cos^4\alpha - 3\sin^4\alpha =$$

$$= -\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha - \sin^4\alpha = -\left(\cos^4\alpha + 2\cos^2 \cdot \sin^2\alpha + \sin^4\alpha\right) =$$
$$= -\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)^2 = -1^2 = -1 = п.ч.$$

л.ч. = п.ч.

Якщо ліва і права частини рівності приблизно однакової складності, то простішою потрібно вважати ту частину, яка містить синус і косинус.

Довести тотожність: $\frac{1}{4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha} - 1 = \frac{\left(1 - tg^2\alpha\right)^2}{4tg^2\alpha}.$

Доведення:

Простішою є ліва частина тотожності. Складнішу частину зведемо до простішої:

$$\frac{\left(1-tg^2\alpha\right)^2}{4tg^2\alpha}=\frac{\left(1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)^2}{4\cdot\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\left(\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)^2}{\dfrac{4\cdot\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)^2}{4\cdot\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^4\alpha}=$$

$$=\frac{\cos^4\alpha-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin^4\alpha}{4\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=$$

п.ч $=\dfrac{\cos^4\alpha-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin^4\alpha+4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=$

$$=\frac{\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin^4\alpha-4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)^2-4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{1-4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\frac{1}{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}-\frac{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\frac{1}{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}-1=\text{л.ч.}$$

Довести тотожність: $tg^2\beta+\sin^2\alpha=tg^2\beta\cdot\cos^2\alpha+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta}$.

Доведення:

Складнішою є права частина, її і спростимо:

$$tg^2\beta\cdot\cos^2\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta}=tg^2\beta\cdot\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2\beta}=tg^2\beta\cdot\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\left(1+tg^2\beta\right)=$$

п.ч.= $=tg^2\beta\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)+\sin^2\alpha\cdot\left(1+tg^2\beta\right)=tg^2\beta-tg^2\alpha\cdot\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+tg^2\beta\cdot\sin^2\alpha=$

$$=tg^2\beta+\sin^2\alpha=\text{л.ч.}$$

Отже, п.ч. = л.ч.

Спростити: $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}-tg^2\alpha\cdot tg^2\beta.$

Розв'язання:

$$\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}-tg^2\alpha\cdot tg^2\beta=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}-\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}-tg^2\alpha\cdot tg^2\beta=$$

$$=tg^2\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2\beta}-\frac{1}{\cos^2\alpha}-tg^2\alpha\cdot tg^2\beta=tg^2\alpha\cdot\left(1+tg^2\beta\right)-\left(1+tg^2\alpha\right)=tg^2\alpha\cdot tg^2\beta=$$

$$=tg^2\alpha+tg^2\beta\cdot tg^2\alpha-1-tg^2\alpha-tg^2\alpha\cdot tg^2\beta=-1.$$

Відповідь: –1.

Спростити вираз: $\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$ при $\dfrac{3\pi}{2}\langle\alpha\langle 2\pi.$

Розв'язання:

$$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)\cdot(1-\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha)\cdot(1-\sin\alpha)}}-\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)\cdot(1+\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)\cdot(1+\sin\alpha)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}}-\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}}=\frac{|1-\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}-\frac{|1+\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}=\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=$$

Враховуючи, що α – кут четвертої чверті,

маємо: $\sin\alpha\langle 0,\ \ 1-\sin\alpha\rangle 0.$

Тоді $|1-\sin\alpha| = 1-\sin\alpha.\ \ 1+\sin\alpha\rangle 0,$ тоді

$|1+\sin\alpha| = 1+\sin\alpha.\quad \cos\alpha\rangle 0,\ \ |\cos\alpha| = \cos\alpha.$

$$= \frac{1-\sin\alpha-1-\sin\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{-2\sin\alpha}{\cos\alpha} = -2tg\alpha.$$

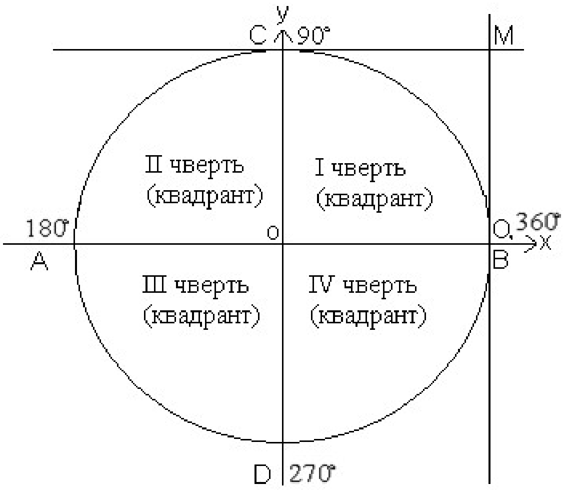
Відповідь: $-2tg\alpha.$

Потрібними знаряддями при перетворені тригонометричних виразів є вміння переходити від градусної міри аргументу до радіанної і навпаки. Краще всього це робити за допомогою пропорції:

$$\begin{array}{l} \pi\text{рад} - 180^{\circ}, \\ \alpha\text{рад} - \chi^{\circ}, \end{array} \to \chi^{\circ} = \frac{\alpha\text{рад}\cdot 180^{\circ}}{\pi\text{рад}}.$$

$$\longrightarrow \alpha\text{рад} = \frac{\chi^{\circ}\cdot\pi\text{рад}}{180^{\circ}}.$$

«Відпрацювати» знаки тригонометричних функцій необхідно на одиничному крузі.



Відрізок AB-вісь косинусів, відрізок CD – вісь синусів ,пряма BM – вісь тангенсів, пряма CM – вісь котангенсів. Так як OB$\rangle$O «обслуговує» першу і четверту чверті, то в них косинус кута додатний; OD$\langle$ O – в третій і четвертій чвертях синус від'ємний і т.д.

Значення тригонометричних функцій деяких кутів потрібно занести в таблицю, що полегшить запам'ятовування їх.

α *в рад.*	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0
$ctg\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—	0	—
α в *град.*	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°

Цю таблицю слід доповнити вміннями знаходити значення тригонометричних функцій гострих кутів, які містяться в «Чотиризначних таблицях Брадіса В.М.» та послідовністю застосування «Формул зведення», яка дає можливість звести тригонометричну функцію як завгодно великого по модулю кута до тригонометричної функції гострого кута.

Мнемонічне правило користування формулами зведення:1.

1). Якщо перетворюється синус косинус кута по модулю більшого за 360°, то його

Величину ділять на 360° і добуток 360° помножити на неповну частку опускають; У випадку тангенса, або котангенса ділять на 180° і добуток 180° на неповну частку опускають.

2). Остачу від ділення подають у вигляді суми, або різниці одного з граничних кутів на одиничному колі (90°, 180°, 270°, 360°) та гострого кута.

3). Якщо в утвореній сумі, або різниці є кут 90°, або 270° то назва функції змінюється на схожу, а якщо є кут 180°, або 360°, то назва функції не змінюється.

4). Знак «–» чи «+» результату визначається по лівій частині останньої в цьому ланцюгу перетворень рівності.

5). При цьому необхідно враховувати парність тригонометричних функцій.

Проілюструємо це на прикладах:

1). $\cos(-3102^\circ) = \cos 3102^\circ (\text{парність функції косинус}) = \cos\left(\underbrace{8\cdot 360^\circ}_{\text{опускаємо}} + 222^\circ\right) =$

$= \cos 222^\circ = \cos(270^\circ - 48^\circ) = -\sin 48^\circ.$

2). $tg(-2280^\circ) = -tg2280^\circ = -tg(12\cdot 180^\circ) = -tg120^\circ = -tg(90^\circ + 30^\circ) = ctg30^\circ = \sqrt{3}.$

3). $\sin\left(\alpha - 3\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\left(-\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \sin\left(-\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \sin\alpha\right) = \cos\alpha.$

4) $ctg^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \left(ctg\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)\right)^2 = \left(-ctg\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2 = (-tg\alpha)^2 = tg^2\alpha.$

Завдання для самостійної роботи:

4.1 Обчислити: $\sin 450^\circ \cdot \cos 675^\circ + tg562^\circ \cdot tg788^\circ.$ Відповідь: $\frac{\sqrt{2}+2}{2}.$

4.2 Довести, що $\frac{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{tg\alpha + 1}{tg\alpha - 1}.$

4.3 Довести тотожність: $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}.$

4.4 Довести тотожність: $\frac{1+tg\alpha}{1+ctg\alpha} = tg\alpha.$

4.5 Довести тотожність: $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{ctg\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha} = 2tg^2\alpha.$

4.6 Спростити вираз: $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ при $\pi\langle\alpha\langle\frac{3\pi}{2}.$ Відповідь: $-2ctg\alpha.$

4.7 Обчислити: $\dfrac{ctg\alpha - \cos\alpha}{ctg\alpha}$ при $\sin\alpha = \dfrac{3}{4}$. Відповідь: $\dfrac{1}{4}$.

4.8 Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = m$. Знайти: а). $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$;

б). $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.

Відповідь: а). $\dfrac{m^2 - 1}{2}$; б). $\dfrac{1 + 6m^2 - 3m^4}{4}$.

4.9 Спростити вираз: $\dfrac{\sin(\pi - \alpha) - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{2\cos 2\alpha - 1}$. Відповідь: $\sin 3\alpha$.

4.10 Спростити вираз: $tg\alpha + \dfrac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1 + \sin\alpha \cdot \cos\alpha}$. Відповідь: 1.

4.11 Спростити вираз: $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$. Відповідь:1.

4.12 Обчислити: $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3 \cos\dfrac{\pi}{6} - \log_3 \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$. Відповідь: 1.

4.13 Спростити: $\dfrac{tg(180^\circ - \alpha) \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \cdot tg(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha) \cdot ctg(90^\circ + \alpha) \cdot tg(90^\circ + \alpha)}$. Відповідь: 1.

4.14 Спростити: $\dfrac{1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1}$. Відповідь: 1.

4.15 Спростити: $\left(2 - \dfrac{2 - \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}\right) \cdot \dfrac{1 - \cos\alpha}{2\cos\alpha}$. Відповідь: –0,5.

Формули додавання

Так називаються формули, які виражають тригонометричні функції кутів $\alpha + \beta$ або $\alpha - \beta$ через тригонометричні функцій кутів α і β:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$, $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$,

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$, $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$,

$tg(\alpha + \beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$, $tg(\alpha - \beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$,

$ctg(\alpha + \beta) = \dfrac{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}{tg\alpha + tg\beta}$, $ctg(\alpha - \beta) = \dfrac{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}{tg\alpha - tg\beta}$.

Покажемо застосування цих формул до розв'язування деяких вправ.
Обчислити:

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right).$$

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right)$.

$$tg15^o = tg\left(60^o - 45^o\right) = \frac{tg60^o - tg45^o}{1 + tg60^o \cdot tg45^o} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{3-1} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{2} =$$

$$= \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

Відповідь: $2-\sqrt{3}.$

Дано: $\sin\alpha = -0{,}8, \quad 180\langle\alpha\langle 270^o$ Знайти $tg\left(\alpha - 45^o\right)$.

Розв'язання

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \quad \cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha, \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Оскільки $\alpha -$ кут третьої чверті, то $\cos\alpha\langle 0,$ і тоді $\cos\alpha = -\sqrt{1-(-0{,}8)^2} = -\sqrt{1-0{,}64} = -\sqrt{0{,}36} = -0{,}6.$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-0{,}8}{-0{,}6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}. \quad tg\left(\alpha-45^o\right) = \frac{tg\alpha - tg45^o}{1+tg\alpha\cdot tg45^o} = \frac{\frac{4}{3}-1}{1+\frac{4}{3}\cdot 1} = \frac{1\frac{1}{3}-1}{1+1\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{2\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{1}{7}.$$

Відповідь: $\frac{1}{7}.$

Дано: $\cos\alpha = -\frac{4}{5}, \quad \pi\langle\alpha\langle\frac{3\pi}{2}, \quad \sin\beta = -\frac{3}{5}, \ \frac{3\pi}{2}\langle\ \beta\langle 2\pi.$

Обчислити: $\cos(\alpha-\beta)$. Розв'язання:

Використовуючи основну тригонометричну тотожність знайдемо $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Так як $\alpha -$ кут III чверті, то $\sin\alpha\langle 0,$ а тому

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}.$$

$\cos\beta = \pm\sqrt{1-\sin^2\beta}$, $\beta -$ кут IV чверті, $\cos\beta\rangle 0,$ $\cos\beta = \sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta = -\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{16}{25} + \frac{9}{25} = -\frac{7}{25}.$$

Відповідь: $-\frac{7}{25}.$

Дано: $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = -\frac{2}{5}, \ \frac{5\pi}{6}\langle\alpha\langle\frac{4\pi}{3}.$ Знайти $\sin\alpha.$

Розв'язання

Застосуємо такий прийом:

$$\sin\alpha = \left(\frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{3} - \sin\alpha\right)\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) - \cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) - \frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = -\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)} =$$

Визначимо знак виразу

$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$: за умовою $\frac{5\pi}{6}\langle\alpha\langle\frac{4\pi}{3}\big|\cdot(-1),$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^2} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{4}{25}} =$$

$$-\frac{4\pi}{3}\langle-\alpha\langle-\frac{5\pi}{6}\Big|+\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}\langle\frac{\pi}{3}-\alpha\langle\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6},$$

$$-\pi\langle\frac{\pi}{3}-\alpha\langle-\frac{3\pi}{6},\ -\pi\langle\frac{\pi}{3}-\alpha\langle-\frac{\pi}{2},$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{5}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{21}{25}}=-\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{21}{10}}=$$

$$=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{21}}{10}.$$

це означає, що $\frac{\pi}{3}-\alpha-$кут третьої чверті.

Отже, $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\langle 0.$

Відповідь: $\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{21}}{10}.$

Дано:$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \alpha$ і $\beta-$ кути першої чверті. Знайти $\alpha+\beta.$

Розв'язання:

$$+\begin{array}{l}0^\circ\langle\alpha\langle 90^\circ\\ 0^\circ\langle\beta\langle 90^\circ\\ \hline 0^\circ\langle\alpha+\beta\langle 180^\circ\end{array}.$$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta.$ З основної тригонометричної формули маємо: $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha},\ \cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5};$

$$\sin\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2\beta};\quad \sin\beta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

Тоді:

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{5}}{5\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}-\frac{6\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{5}\cdot 10}=\frac{1}{5\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{2}}{5}=\frac{1-3\cdot 2}{5\sqrt{2}}=-\frac{5}{5\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Так як $\alpha+\beta-$кут II чверті, то $\alpha+\beta=180^\circ-45^\circ=135^\circ.$ Відповідь: $135^\circ.$

Довести, що $tg\alpha\cdot tg\beta+tg\beta\cdot tg\gamma+tg\alpha\cdot tg\gamma=1,$ якщо $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}.$

Доведення:

$$tg\alpha\cdot tg\beta+tg\beta\cdot tg\gamma+tg\gamma\cdot tg\alpha=tg\alpha\cdot tg\beta+\underbrace{tg\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)}_{tg\gamma}\cdot tg\beta+\underbrace{tg\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)}_{tg\gamma}\cdot tg\alpha=$$

Л.ч.= $=tg\alpha\cdot tg\beta+tg\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)\cdot(tg\beta+tg\alpha)=tg\alpha\cdot tg\beta+ctg(\alpha+\beta)\cdot(tg\alpha+tg\beta)=$

$$=tg\alpha\cdot tg\beta+\frac{1-tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha+tg\beta}\cdot(tg\alpha+tg\beta)=tg\alpha\cdot tg\beta+1-tg\alpha\cdot tg\beta=1=п.ч.$$

Л.ч. = П.ч.

Завдання для самостійної роботи:

4.16 Довести тотожність: $tg27^\circ+tg33^\circ+\sqrt{3}\cdot tg27^\circ\cdot tg33^\circ=3.$

4.17 Дано: $tg\alpha=\frac{1}{4},\ \ 0\langle\alpha\langle\frac{\pi}{2},\ \ tg\beta=\frac{5}{3},\ \ 0\langle\beta\langle\frac{\pi}{2}.$ Знайти $\alpha-\beta.$ Відповідв:0,5.

4.18 $\cos 63^\circ\cdot\sin 27^\circ+\sin 63^\circ\cdot\cos 27^\circ.$ Відповідь:1.

4.19 $\cos 107^\circ\cdot\cos 17^\circ+\sin 107^\circ\cdot\sin 17^\circ.$ Відповідь:0.

4.20 $\cos 31^\circ\cdot\cos 24^\circ-\sin 24^\circ\cdot\sin 31^\circ-\cos 55^\circ.$ Відповідь:0.

4.21 $\sqrt{3}\cos\alpha - 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\alpha.$ Відповідь:0.

4.22 $\sqrt{2}\sin\left(\alpha - 45^{o}\right) - \sin\alpha + \cos\alpha.$ Відповідь: 0.

4.23 $2\cos\left(60^{o} - \alpha\right) - \sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha.$Відповідь: 0.

4.24 $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\alpha - \sin\alpha.$ Відповідь: 0.

4.25 Дано: $\sin\alpha = \frac{8}{17},\ \cos\beta = \frac{4}{5},\ \alpha$ і β – кути І чверті.

Знайти: **4.26** $\sin(\alpha + \beta).$ Відповідь: $\frac{77}{85}.$

4.27 $\cos(\alpha + \beta).$ Відповідь: $\frac{36}{85}.$

4.28 $\cos(\alpha - \beta).$ Відповідь: $\frac{84}{85}.$

4.29 $tg(\alpha + \beta).$ Відповідь: $2\frac{5}{36}.$

4.30 $ctg(\alpha + \beta).$ Відповідь: $\frac{36}{77}.$

Довести, що: **4.31** $\dfrac{tg\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) + tg\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}{1 - tg\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) \cdot tg\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)} = 1.$

4.32 $\dfrac{tg\frac{\pi}{9} + tg\frac{5\pi}{36}}{1 + tg\frac{8\pi}{9} \cdot tg\frac{5\pi}{36}} = 1.$

4.33 $\dfrac{tg\alpha + tg\beta}{tg(\alpha + \beta)} + \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{tg(\alpha - \beta)} = 2.$

4.341+tg$\alpha \cdot tg\beta \cdot \dfrac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} = 0.$

4.35 Спростити вираз: $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} + \dfrac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\cos 3\alpha + \cos\alpha}$.Відповідь: $\dfrac{1}{\sin 2\alpha}.$

4.36 Спростити вираз і обчислити його значення:

4.37 $\dfrac{\left(\cos^2\alpha - 4\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot(\sin\alpha + \sin 3\alpha)}{2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}$ при $\alpha = \frac{\pi}{24}$. Відповідь: $\frac{1}{2}.$

4.38 Довести тотожність: $\left(\dfrac{1}{\sin 2\alpha} - \dfrac{1}{\sin 6\alpha}\right)\cdot\dfrac{\cos 7\alpha - \cos 5\alpha}{\sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha} = 4\sin\alpha.$

4.39 Обчислити: $\cos(\alpha + \beta)$, якщо $\sin\alpha = 0{,}6,\ 90^{o}\langle\alpha\langle 180^{o},\ \sin\beta = 0{,}8,\ 0^{o}\langle\beta\langle 90^{o}.$
Відповідь: 0.

Формули подвійних і потрійних аргументів

Синус подвоєного аргументу: $\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha.$
Косинус подвоєного аргументу: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$

Тангенс подвоєного кута: $tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha},\quad tg2\alpha = \dfrac{2ctg\alpha}{ctg^2\alpha - 1}.$

Формули пониження степеня: $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}.$

Синус потрійного аргументу: $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$
Косинус потрійного аргументу: $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$
Тангенс потрійного аргументу: $tg3\alpha = \dfrac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}\quad \left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}\right),\ n\in Z.$

Котангенс потрійного аргументу: $ctg3\alpha = \dfrac{3ctg\alpha - ctg^3\alpha}{1-3ctg^2\alpha},\quad \left(\alpha \neq \dfrac{\pi n}{3}\right),\ n\in Z.$

Покажемо застосування цих формул в процесі розв’язування вправ для вступників до ВУЗів.
Спростити вираз: $\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta.$

Розв’язання:

$$\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta = (\sin(\alpha+\beta))^2 + (\cos(\alpha-\beta))^2 - \sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta =$$
$$= (\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta)^2 + (\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta)^2 - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot 2\sin\beta\cdot\cos\beta =$$
$$= \sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta + 2\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta + \cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta + \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\times$$
$$\times\sin\alpha\cdot\sin\beta + \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta - 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta = \left(\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta + \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\right)+$$
$$+\left(\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta + \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta\right) = \sin^2\alpha\cdot\left(\cos^2\beta+\sin^2\beta\right) + \cos^2\alpha\cdot\left(\sin^2\beta + \cos^2\beta\right) =$$
$$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Відповідь: 1.

Знайти значення виразу: $\cos\dfrac{\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{7}.$

Розв’язання:

Оскільки $\sin\dfrac{\pi}{7}\neq 0,$ то можна даний вираз помножити і розділити на

$2\sin\dfrac{\pi}{7}$:
$$\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{2\cdot\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{2\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{2\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{7}} =$$
$$= \frac{2\sin\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{2\cdot 4\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\cdot\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}{8\cdot\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{8\cdot\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{8}$.

Спростити вираз: $4\cos^4\alpha - 2\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\cos 4\alpha$.

Розв’язання:

$$4\cos^4\alpha - 2\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\cos 4\alpha = 4\left(\cos^2\alpha\right)^2 - 2\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\cos 4\alpha = 4\cdot\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2 - 2\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\cos 4\alpha =$$

$$= 4\cdot\frac{1+2\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha}{4} - 2\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\cos 4\alpha = 1 + 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha - 2\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\cos 4\alpha =$$

$$= 1 + \frac{1+\cos 4\alpha}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\alpha = \frac{2+1+\cos 4\alpha - \cos 4\alpha}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Відповідь: 1,5.

Обчислити без таблиць і мікрокалькулятора: $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.

Розв’язання:

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ} = \frac{2\cdot\left(\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ\right)}{2\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ} = \frac{2\cdot 2\left(\frac{1}{2}\cdot\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{4\cdot\left(\sin 30^\circ\cdot\cos 10^\circ - \cos 30^\circ\cdot 10^\circ\right)}{\sin 20^\circ} = \frac{4\cdot\sin\left(30^\circ - 10^\circ\right)}{\sin 20^\circ} = \frac{4\cdot\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4.$$

Відповідь: 4.

Знайти $tg\alpha$, якщо $tg\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}$.

Розв’язання:

Перетворимо вираз $tg\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{tg\alpha - tg\frac{\pi}{4}}{1 + tg\alpha\cdot\frac{\pi}{4}} = \dfrac{tg\alpha - 1}{1 + tg\alpha}$.

Використовуючи умову, маємо $\frac{tg\alpha - 1}{1 + tg\alpha} = \frac{3}{4}$. За основною властивістю пропорції дістаємо рівність $4\cdot(tg\alpha - 1) = 3\cdot(1 + tg\alpha)$; $4tg\alpha - 4 = 3 + 3tg\alpha$; $4tg\alpha - 3tg\alpha = 3 + 4$; $tg\alpha = 7$. Відповідь: 7.

Завдання для самостійної роботи:

Спростити вирази: **4.40** $0{,}125 - \cos^2\alpha + \cos^4\alpha$. Відповідь: $\frac{1}{8}\cos 4\alpha$.

4.41 $\cos 36^\circ\cdot\cos 72^\circ$. Відповідь: $\frac{1}{4}$.

4.42 $1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi\right) - \cos^2\frac{\alpha}{4} + \sin^2\frac{\alpha}{4}$. Відповідь: 1.

4.43 $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$. Відповідь: $2\cos\alpha$.

4.44 $\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$. Відповідь: $\sin\alpha$.

4.45 $\frac{\sin 100^\circ}{\cos 50^\circ}$. Відповідь: $2\sin 50^\circ$.

4.46 $\frac{\cos 36^\circ + \sin^2 18^\circ}{\cos^2 18^\circ}$. Відповідь: 1.

Довести, що **4.47** $tg\alpha + 2tg2\alpha + 4ctg4\alpha = ctg\alpha$.

4.48 $\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 8\alpha = \frac{\sin\cdot 16\alpha}{16 \cdot \sin\alpha}$.

4.49 $\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$.

4.50 Дано: $\sin\alpha = 0{,}8,\ 0^\circ\langle\alpha\langle 90^\circ$.

Обчислити:

4.51 $\sin 2\alpha$. Відповідь: 0,96.

4.52 $\cos 2\alpha$. Відповідь: – 0,28.

4.53 $tg2\alpha$. Відповідь: $-\frac{24}{7}$.

4.54 $ctg2\alpha$. Відповідь: $-\frac{7}{24}$.

4.55 $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$. Відповідь: $\frac{1}{4}$.

4.56 $12\sin 15^\circ \cdot \sin 105^\circ$. Відповідь: 3.

4.57 $6\cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ$. Відповідь: 1,5.

4.58 $15\sin 165^\circ \cdot \cos 15^\circ$. Відповідь: 3,75.

4.59 $3\sin^2 30^\circ + 8\cos^2 30^\circ$. Відповідь: 6,75.

4.60 $2\cos^2 45^\circ + 6\sin^2 45^\circ$. Відповідь: $2+2\sqrt{2}$.

4.61 $15tg157^\circ \cdot tg427^\circ$. Відповідь: 15.

4.62 $15\cos 120^\circ \cdot tg315^\circ$. Відповідь: 7,5.

4.63 $\sin 15^\circ \cdot \cos 75^\circ + \cos 15^\circ \cdot \sin 75^\circ$. Відповідь: 1.

4.64 $\cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ + \sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ$. Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.65 $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin 2x}$. Відповідь: 1.

4.66 $2\cos 4\alpha + 2\sin 4\alpha \cdot tg2\alpha$. Відповідь: 2.

4.67 $\frac{1+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \cdot \frac{2}{(1+tg\alpha)^2}$. Відповідь: 1.

Тригонометричні функції половинного аргументу

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \quad tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}; \quad ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

Дано: $\sin\alpha = \frac{24}{25},\quad 450^\circ\langle\alpha\langle 540^\circ$. Знайти $\sin\frac{\alpha}{4}$.

Розв'язання:

Знайдемо межі для аргументів $\frac{\alpha}{2}$ і $\frac{\alpha}{4}$: $\quad 450^\circ \langle \alpha \langle 540^\circ \Big| : 2, \quad 225^\circ \langle \frac{\alpha}{2} \langle 270^\circ \Big| : 2,$

$122{,}5^\circ \langle \frac{\alpha}{4} \langle 135^\circ.\quad \sin\frac{\alpha}{4} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}},\quad \frac{\alpha}{4}$ – кут II чверті, $\sin\frac{\alpha}{4}\rangle 0,$ отже $\sin\frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}}.$

Для знаходження $\cos\frac{\alpha}{2}$ знайдемо $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha},$ α – кут II чверті,

тому $\cos\alpha\langle 0,\quad \cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{24}{25}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{376}{625}} = -\sqrt{\frac{49}{625}} = -\frac{7}{25}.\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$

$\frac{\alpha}{2}$ – кут III чверті $\cos\frac{\alpha}{2}\langle 0.\quad \cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = -\sqrt{\frac{18}{25}\cdot\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}.$

$\sin\frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$ Відповідь: $\frac{2\sqrt{5}}{5}.$

Обчислити: $ctg 7^\circ 30'.$ Розв'язання:

Обчислимо: $\cos\left(2\cdot 7^\circ 30'\right) = \cos 15^\circ = \cos\left(60^\circ - 45^\circ\right) = \cos 60^\circ\cdot\cos 45^\circ + \sin 60^\circ\cdot\sin 45^\circ =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},$ тоді $ctg 7^\circ 30' = \sqrt{\frac{1+\cos 15^\circ}{1-\cos 15^\circ}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{1-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}} =$

$$= \sqrt{\frac{\frac{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{2}}+1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{2}}-1-\sqrt{3}\right)}} = \sqrt{\frac{\frac{2\cdot 2}{\sqrt{2}}+1+\sqrt{3}}{\frac{2\cdot 2}{\sqrt{2}}-1-\sqrt{3}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\sqrt{2}+1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-1-\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{8}+1+\sqrt{3}}{\sqrt{8}-1-\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}+1}{\sqrt{8}-\left(\sqrt{3}+1\right)}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{8}-\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}+1\right)\right)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}+1\right)^2}{\left(\sqrt{8}\right)^2-\left(\sqrt{3}+1\right)^2}} = \frac{\left|\sqrt{8}+\sqrt{3}+1\right|}{\sqrt{8-3-2\sqrt{3}-1}} = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}+1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}+1}{\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}} = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}+1}{\left|\sqrt{3}-1\right|} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{\sqrt{24}+3+\sqrt{3}+\sqrt{8}+\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{2\sqrt{6}+4+2\sqrt{3}+\sqrt{8}}{2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{3}+4+2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2.$$ Відповідь: $\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2.$

Спростити вираз: $1+2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha.$ Розв'язання:

$1+2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha = \cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha =$

$= 2\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha = 2\cdot\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right) = 2.$ Відповідь: 2.

Обчислити: $tg112^{\circ}30'$. Так, як кут $112^{\circ}30'$ – кут II чверті, то

$$tg112^{\circ}30' \langle 0,\ tg112^{\circ}30' = -\sqrt{\frac{1-\cos 225^{\circ}}{1+\cos 225^{\circ}}} = -\sqrt{\frac{1-\cos(180^{\circ}+45^{\circ})}{1+\cos(180^{\circ}+45^{\circ})}} = -\sqrt{\frac{1+\cos 45^{\circ}}{1-\cos 45^{\circ}}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = -\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})\cdot(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})\cdot(2+\sqrt{2})}} = -\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})^2}{4-2}} = -\frac{|2+\sqrt{2}|}{2} = -\frac{2+\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь: $-\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Обчислити: $\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}$. Розв’язання:
Використовуючи формули зведення маємо:

$$\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16} = \sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\cos^4\frac{3\pi}{16}+\cos^4\frac{\pi}{16} =$$

$$= \left(\sin^4\frac{\pi}{16}+\cos^4\frac{\pi}{16}+2\sin^2\frac{\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{\pi}{16}-2\sin^2\frac{\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{\pi}{16}\right)+$$

$$+\left(\sin^4\frac{3\pi}{16}+\cos^4\frac{4\pi}{16}+2\sin^2\frac{3\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{3\pi}{16}-2\sin^2\frac{3\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{3\pi}{16}\right) = \left(\sin^2\frac{\pi}{16}+\cos^2\frac{\pi}{16}\right)^2 -$$

$$-2\sin^2\frac{\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{\pi}{16}+\left(\sin^2\frac{3\pi}{16}+\cos^2\frac{3\pi}{16}\right)^2-2\sin^2\frac{3\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{3\pi}{16} = 1-2\sin^2\frac{\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{\pi}{16}+$$

$$+1-2\sin^2\frac{3\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{3\pi}{16} = 2-\frac{1}{2}\left(\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{16}\right)\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{16}\left(2\cdot\frac{3\pi}{16}\right)\right)^2 = 2-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\sin^2\frac{3\pi}{8} =$$

$$= 2-\frac{1}{2}\cdot\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}\right) = 2-\frac{1}{2}\cdot\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}\right) = 2-\frac{1}{2}\cdot 1 = 1{,}5.$$

Відповідь: 1,5.

Завдання для самостійної роботи:

Обчислити:

4.68 $\sin 15^{\circ}$. Відповідь: $0{,}5\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

4.69 $\cos 15^{\circ}$. Відповідь: $\sqrt{2}-1$.

4.70 $\mathrm{tg}\, 22^{\circ}30'$. Відповідь: $\sqrt{2}-1$.

4.71 $\sin 75^{\circ}$. Відповідь: $\frac{5}{\sqrt{26}}$.

4.72 $\cos 75^{\circ}$. Відповідь: $-\frac{1}{\sqrt{26}}$.

4.73 $tg75^{\circ}$. Відповідь: -5.

4.74 $ctg75^{\circ}$. Відповідь: $-\frac{1}{5}$.

4.75 $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$. Відповідь: 1,5.

Дано: $\sin\alpha = 0{,}8,\ \ 90^\circ\langle\alpha\langle180^\circ$. Знайти: **4.76** $\sin\frac{\alpha}{2}$. Відповідь: $\sqrt{0{,}8}$.

4.77 $\cos\frac{\alpha}{2}$. Відповідь: $\sqrt{0{,}2}$.

4.78 $tg\frac{\alpha}{2}$. Відповідь: 2.

4.79 $ctg\frac{\alpha}{2}$. Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}};\quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}};$$

Дано:$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$. Знайти $x = \frac{2\sin\alpha}{4-3\cos\alpha}$.

Розв’язання:

$$\sin\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5};\quad \cos\alpha = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5},\ \text{тоді: } x = \frac{2\cdot\frac{4}{5}}{4-3\cdot\frac{3}{5}} = \frac{\frac{8}{5}}{4-1\frac{4}{5}} = \frac{\frac{8}{5}}{2\frac{1}{5}} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{11}{5}} = \frac{8}{11}.$$

Відповідь: $\frac{8}{11}$.

Дано: $ctg\alpha = \frac{1}{3}$. Знайти: $\cos4\alpha$.

Розв’язання:

$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3;\quad tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2\cdot3}{1-3^2} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4};\quad \cos4\alpha = \frac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{25}{16}} = \frac{7}{25}.$$

Відповідь: $\frac{7}{25}$.

Дано:$\mathrm{tg}2\alpha = 4$. Обчислити $\sin4\alpha + \cos4\alpha\cdot ctg2\alpha$.

Розв’язання:

$$\sin4\alpha = \frac{2tg2\alpha}{1+tg^2 2\alpha} = \frac{2\cdot4}{1+4^2} = \frac{8}{17};\quad \cos4\alpha = \frac{1-tg^2 2\alpha}{1+tg^2 2\alpha} = \frac{1-4^2}{1+4^2} = -\frac{15}{17};\quad ctg2\alpha = \frac{1}{tg2\alpha} = \frac{1}{4}.$$

Тоді: $\frac{8}{17} + \left(-\frac{15}{17}\right)\cdot\frac{1}{4} = \frac{8}{17} - \frac{15}{68} = \frac{32-15}{68} = \frac{17}{68} = \frac{1}{4}$. Відповідь: $\frac{1}{4}$.

Завдання для самостійної роботи:

4.80 Дано: $tg\frac{\alpha}{2}=0{,}5.$ Знайти $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha.$ Відповідь: $\frac{7}{25}.$

Знайти:

4.81 $\sin 4\alpha,$ якщо $tg2\alpha=3.$ Відповідь: 0,6.

4.82 $\cos 4\alpha,$ якщо $tg2\alpha=8.$ Відповідь: $-\frac{63}{65}.$

4.83 $\sin\alpha,$ якщо $tg\frac{\alpha}{2}=0{,}5.$ Відповідь: $\frac{4}{5}.$

4.84 $\cos\alpha,$ якщо $tg\frac{\alpha}{2}=0{,}5.$ Відповідь: $\frac{3}{5}.$

4.85 $tg\alpha,$ якщо $tg\frac{\alpha}{2}=0{,}5.$ Відповідь: $\frac{4}{3}.$

4.86 $ctg\alpha,$ якщо $tg\frac{\alpha}{2}=0{,}5.$ Відповідь: $\frac{3}{4}.$

4.87 $\sin\alpha+\cos\alpha$, якщо $tg\frac{\alpha}{2}=3.$ Відповідь: $-0{,}2$.

4.88 $\sin\alpha+\cos\alpha$, якщо $tg\frac{\alpha}{2}=3.$ Відповідь: 1,4.

Перетворення добутків синусів і косинусів на суму

$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}.$ $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$ За допомогою цих формул розв'язуються дуже багато тригонометричних вправ.

Довести тотожність: $\frac{1}{2\sin 10^\circ}-2\sin 70^\circ=1.$

Розв'язання:

$$\text{Л.ч.}=\frac{1}{2\sin 10^\circ}-2\sin 70^\circ=\frac{1-4\cdot\sin 10^\circ\cdot\sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ}=\frac{1-4\frac{\cos(10^\circ-70^\circ)-\cos(10^\circ+70^\circ)}{2}}{2\sin 10^\circ}=$$

$$=\frac{1-2\cdot\cos 60^\circ-\cos 80^\circ}{2\sin 10^\circ}=\frac{1-2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\cos 80^\circ}{2\sin 10^\circ}=\frac{2\cos 80^\circ}{2\cos 80^\circ}=1=\text{ п.ч.}$$

Тотожність доведено.

Довести, що: $\sin\alpha\cdot\sin 7\alpha-\sin 3\alpha\cdot\sin 5\alpha=-\sin 2\alpha\cdot\sin 4\alpha.$

Розв'язання:

$$\sin\alpha\cdot\sin7\alpha-\sin3\alpha\cdot\sin5\alpha=\frac{\cos(\alpha-7\alpha)-\cos(\alpha+7\alpha)}{2}-\frac{\cos(3\alpha-5\alpha)-\cos(3\alpha+5\alpha)}{2}=$$

Л.ч = $=\frac{\cos6\alpha-\cos8\alpha}{2}-\frac{\cos2\alpha-\cos8\alpha}{2}=\frac{\cos6\alpha-\cos8\alpha-\cos2\alpha+\cos8\alpha}{2}=\frac{\cos6\alpha-\cos2\alpha}{2}=$

$$=\frac{-2\sin\frac{6\alpha+2\alpha}{2}\cdot\sin\frac{6\alpha-2\alpha}{2}}{2}=-\frac{\sin4\alpha\cdot\sin2\alpha}{1}=-\sin2\alpha\cdot\sin4\alpha=п.ч.$$

Л.ч. = П. ч.

Показати, що величина виразу $\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)$ не залежить від величини кута β.

Розв'язання:

$$\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)-2\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}\times$$

$$\times\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)-(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))\cdot\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)-$$

$$-\cos^2(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\beta-\frac{\cos(\alpha-\beta-\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta+\alpha+\beta)}{2}=$$

$$=\cos^2\beta-\frac{\cos(-2\beta)+\cos2\alpha}{2}=\frac{1+\cos2\beta}{2}-\frac{\cos2\beta+\cos2\alpha}{2}=\frac{1+\cos2\beta-\cos2\beta-\cos2\alpha}{2}=$$

$=\frac{1-\cos2\alpha}{2}=\sin^2\alpha$ Не залежить від β.

Перетворити в суму: $\cos^2x\cdot\cos3x.$

Розв'язання:

$$\cos^2x\cdot\cos3x=\frac{1+\cos2x}{2}\cdot\cos3x=\frac{1}{2}\cos3x+\frac{\cos2x\cdot\cos3x}{2}=\frac{1}{2}\cdot\cos3x+\frac{1}{2}\cos2x\cdot\cos3x=$$

$$=\frac{1}{2}\cos3x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos(2x-3x)+\cos(2x+3x)}{2}=\frac{1}{2}\cdot\cos3x+\frac{1}{4}\cdot(\cos x+\cos5x)=\frac{1}{2}\cdot\cos3x+\frac{1}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos5x.$$

Спростити: $\sin4^\circ\cdot\sin86^\circ-\cos2^\circ\cdot\sin6^\circ+0{,}5\cdot\sin4^\circ.$

Розв'язання:

$$\sin4^\circ\cdot\sin86^\circ-\cos2^\circ\cdot\sin6^\circ+0{,}5\cdot\sin4^\circ=\sin4^\circ\cdot\cos4^\circ-\cos2^\circ\cdot\sin6^\circ+0{,}5\cdot\sin4^\circ=\frac{1}{2}\sin8^\circ-$$

$$-\frac{\sin(2^\circ+6^\circ)+\sin(2^\circ-6^\circ)}{2}+\frac{1}{2}\sin4^\circ=\frac{1}{2}\sin8^\circ-\frac{1}{2}\sin8^\circ-\frac{1}{2}\sin4^\circ+\frac{1}{2}\sin4^\circ=0.$$

Відповідь: 0.

$$\cos\frac{11\pi}{26}\cdot\cos\frac{3\pi}{56}-\sin\frac{5\pi}{21}\cdot\sin\frac{2\pi}{21}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}.$$

Розв'язання:

$$\cos\frac{11\pi}{26}\cdot\cos\frac{3\pi}{56}-\sin\frac{5\pi}{21}\cdot\sin\frac{2\pi}{21}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\cos\left(\frac{11\pi}{56}+\frac{3\pi}{56}\right)+\cos\frac{11\pi}{56}-\frac{3\pi}{56}}{2}-$$

$$-\frac{\left(\cos\frac{5\pi}{21}-\frac{2\pi}{21}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{21}+\frac{2\pi}{21}\right)}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{7}}{2}-\frac{\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}+\frac{1}{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}+1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{4}.$$

Відповідь: $\frac{1}{4}$.

Обчислити: $\sin 20^{\circ}\cdot\sin 40^{\circ}\cdot\sin 60^{\circ}\cdot\sin 80^{\circ}.$

Розв’язання:

Обчислимо добуток:

$$\sin 20^{\circ}\cdot\sin 40^{\circ}=\frac{\cos\left(20^{\circ}-40^{\circ}\right)-\cos\left(20^{\circ}+40^{\circ}\right)}{2}=\frac{\cos 20^{\circ}-\cos 60^{\circ}}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos 20^{\circ}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\cos 20^{\circ}-\frac{1}{4}.$$

Тоді:

$$\left(\frac{1}{2}\cos 20^{\circ}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 80^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\cos 20^{\circ}\cdot\sin 80^{\circ}-\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 80^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\sin 80^{\circ}\cdot\cos 20^{\circ}-\frac{1}{2}\sin 80^{\circ}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{\sin\left(80^{\circ}+20^{\circ}\right)+\sin\left(80^{\circ}-20^{\circ}\right)}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sin 80^{\circ}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\sin 100^{\circ}+\sin 60^{\circ}-\frac{1}{2}\sin 80^{\circ}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\left(\sin 100^{\circ}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin 80^{\circ}\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\left(\sin\left(90^{\circ}+10^{\circ}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\left(90^{\circ}-10^{\circ}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\left(\cos 10^{\circ}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos 10^{\circ}\right)=$$

$=\frac{3}{16}$. Відповідь $\frac{3}{16}$.

Завдання для самостійної роботи:

4.89 Довести тотожність: $4\sin\alpha\cdot\sin\left(60^{\circ}-\alpha\right)\cdot\sin\left(60^{\circ}+\alpha\right)=\sin 3\alpha.$

Обчислити:

4.90 $\cos 5^{\circ}\cdot\cos 55^{\circ}\cdot\cos 65^{\circ}.$ Відповідь: $\frac{1}{16}\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right).$

4.91 $tg 20^{\circ}\cdot tg 40^{\circ}\cdot tg 60^{\circ}\cdot tg 80^{\circ}.$ Відповідь: 3.

4.92 $2\cos 20^{\circ}\cdot\cos 40^{\circ}-\cos 20^{\circ}.$ Відповідь: 0,5.

4.93 $\sin 2x+2\sin\left(75^{\circ}-x\right)\cdot\cos\left(75^{\circ}+x\right).$ Відповідь: 0,5.

4.94 $\cos^2 5^{\circ}+\cos^2 1^{\circ}-\cos 6^{\circ}\cdot\cos 4^{\circ}.$ Відповідь: 1.

4.95 $\cos 20^{\circ}\cdot\sin 50^{\circ}\cdot\cos 80^{\circ}.$ Відповідь: 0,125.

Перетворити в суму:

4.96 $\sin 10^{\circ}\cdot\cos 8^{\circ}\cdot\cos 6^{\circ}.$ Відповідь: $\frac{1}{4}\left(\sin 24^{\circ}+\sin 12^{\circ}+\sin 8^{\circ}-\sin 4^{\circ}\right).$

4.97 $\cos 3x\cdot\cos 5x\cdot\cos 7.$ Відповідь: $\frac{1}{2}\left(\cos 15x+\cos 5x+\cos 9x+\cos x\right).$

4.98 $\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x\cdot\sin 4x.$ Відповідь: $\frac{1}{8}\left(1+\cos 10x-\cos 8x-\cos 6x\right).$

4.99 $8\sin^3 x\cdot\cos x.$ Відповідь: $2\sin 2x-\sin 4x.$

Перетворення суми і різниці однойменних тригонометричних функцій

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$ $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\right),$ $\left(\beta \neq \frac{\pi}{2}\right).$ $tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$ $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\right),$ $\left(\beta \neq \frac{\pi}{2}\right).$

$ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$ $(\alpha \neq k\pi),$ $(\beta \neq m\pi).$ $ctg\alpha - ctg\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$ $(\alpha \neq k\pi),$ $(\beta \neq m\pi).$

Доцільно до цієї групи формул віднести ще й таку: $a\cdot\sin\alpha + b\cdot\sin\beta = r\cdot\sin(\alpha+\varphi),$

де $r = \sqrt{a^2+b^2},$ $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$ $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

Перетворити в добуток, або частку: $1+\sin\alpha+\cos\alpha.$

Розв'язання:

$$1+\sin\alpha+\cos\alpha = (1+\cos\alpha)+\sin\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{4}\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Відповідь: $2\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$

$$\sqrt{3}-2\cdot\sin\alpha = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\alpha\right) = 2\cdot(\sin 60^\circ - \sin\alpha) = 2\cdot 2\cdot\sin\frac{60^\circ-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{60^\circ+\alpha}{2} =$$

$$= 4\cdot\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\cos 30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Відповідь: $4\cdot\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\cos 30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right).$

$3\sin x + 4\cos x = \sqrt{3^2+4^2}\cdot\sin(x+\varphi) = 5\cdot\sin(x+\varphi),$ де $\cos\varphi = \frac{3}{5},$ $\sin\varphi = \frac{4}{5},$ $\mathrm{tg}\varphi = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3},$

$\varphi = arctg\frac{4}{3}.$ Відповідь: $5\sin+\left(arctg\frac{4}{3}\right).$

$$\frac{\cos\alpha+\sqrt{3}\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha-\sqrt{3}\cdot\sin\alpha}=\frac{2\left(\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\alpha\right)}{2\left(\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\alpha\right)}=\frac{\cos 60^{\circ}\cdot\cos\alpha+\sin 60^{\circ}\cdot\sin\alpha}{\cos 60^{\circ}\cdot\cos\alpha-\sin 60^{\circ}\cdot\sin\alpha}=$$

$=\dfrac{\cos(60^{\circ}-\alpha)}{\cos(60^{\circ}+\alpha)}$. Відповідь: $\dfrac{\cos(60^{\circ}-\alpha)}{\cos(60^{\circ}+\alpha)}$.

Довести, що $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$, де $\angle A+\angle B+\angle C=180^{\circ}$.

Розв'язання:

Оскільки:

$C=180^{\circ}-(A+B)$, то $\sin C=\sin(180^{\circ}-(A+B))=\sin(A+B)=\sin\left(2\cdot\frac{A+B}{2}\right)=2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A+B}{2}$.

л.ч. $=\sin A+\sin B+2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A+B}{2}=2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A+B}{2}=$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)=2\sin\frac{A+B}{2}\cdot 2\cdot\cos\frac{\frac{A}{2}-\frac{B}{2}+\frac{A}{2}+\frac{B}{2}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{A}{2}-\frac{B}{2}-\frac{A}{2}-\frac{B}{2}}{2}=$$

$$=4\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\left(-\frac{B}{2}\right)=4\cdot\sin\frac{180^{\circ}-C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}=4\cdot\sin\left(90^{\circ}-\frac{C}{2}\right)\cdot\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}=$$

$=4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}=п.ч.$ $\quad$ *л.ч. = п.ч.*

Перетворити в добуток:

$$\sin\alpha+\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\beta=2\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta}{2}=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right).$$

Аналогічним способом перетворюються в добуток вирази:
$\sin\alpha-\cos\beta;\ \cos\alpha\pm\sin\beta.$

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha\right)=\sqrt{2}\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

Таким самим способом перетворюються в добуток вирази: $\sin\alpha-\cos\alpha;$
$\cos\alpha\pm\sin\alpha.$

Розглянемо спосіб перетворення в добуток такого виразу:

$$\sin^2\alpha-\cos^2\beta=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}-\frac{1+\cos 2\beta}{2}=\frac{1-\cos 2\alpha-1-\cos 2\beta}{2}=-\frac{(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)}{2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos\frac{2\alpha+2\beta}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha-2\beta}{2}=-\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta).$$

Цей спосіб придатний для перетворення в добуток таких виразів:
$\sin^2\alpha-\sin^2\beta;\ \cos^2\alpha-\cos^2\beta;\ \cos^2\alpha-\sin^2\beta.$

Зведемо до вигляду зручного для логарифмування такий вираз:

$$1+\sin\alpha=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\cos^2\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Так само перетворюються в добуток вирази: $1-\sin\alpha;\ \sin\alpha-1.$

Розглянемо ще деякі способи перетворення тригонометричних виразів в добуток або в частку:

$$tg\alpha+1=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha}=\frac{2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\alpha}=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\alpha}.$$

Аналогічно перетворюються вирази: $\mathrm{tg}\,\alpha-1,\ 1\pm tg\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha\pm1,\ 1\pm ctg\alpha.$

$$2\cos\alpha+1=2\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot2\cos\frac{\alpha+\frac{\pi}{3}}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{3}}{2}=4\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$

Таким самим способом перетворюються вирази: $1\pm2\sin\alpha$;
$\sqrt{2}\cos\alpha\pm1;\sqrt{2}\pm2\sin\alpha;2cos\alpha\pm\sqrt{3}.$

$$3\text{-}4\sin^2\alpha=3-4\frac{1-\cos2\alpha}{2}=\frac{6-4+4\cos2\alpha}{2}=1+2\cos2\alpha=2\cdot\left(\frac{1}{2}+\cos2\alpha\right)=$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos2\alpha\right)=2\cdot2\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{3}-2\alpha}{2}=4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right).$$

Таким самим методом перетворюються вирази: $3-4\cos^2\alpha;\ 4\sin^2\alpha-1; 4\cos^2\alpha-1.$

$$3tg^2\alpha-1=3\cdot\left(tg^2\alpha-\frac{1}{3}\right)=3\cdot\left(tg^2\alpha-tg^2\frac{\pi}{6}\right)=3\cdot\left(tg\alpha-tg\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(tg\alpha+tg\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=3\cdot\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{3\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\alpha\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{3\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{3}{4}\cdot\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{4\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\alpha}.$$ Так само можна перетворити вирази:

$tg^2\alpha-3;\quad ctg^2\alpha-3;\quad 3ctg^2\alpha-1.$

Дано: $\alpha,\ \beta,\ \gamma-$гострі кути і $tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha\cdot tg\beta\cdot tg\gamma$. Довести, що $\alpha+\beta+\gamma=180^{\circ}$.

Розв'язання:

Так, як: $tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha\cdot tg\beta\cdot tg\gamma$, то $tg\alpha+tg\beta+tg\gamma-tg\alpha\cdot tg\beta\cdot tg\gamma=0,$

$tg\alpha+tg\beta+(tg\gamma-tg\alpha\cdot tg\beta\cdot tg\gamma)=0,\ tg\alpha+tg\beta+tg\gamma\cdot(1-tg\alpha\cdot tg\beta)=0|:tg\gamma\cdot(tg\alpha+tg\beta)\neq0,$

$$\frac{tg\alpha+tg\beta}{tg\gamma\cdot(tg\alpha+tg\beta)}+\frac{tg\gamma\cdot(1-tg\alpha\cdot tg\beta)}{tg\gamma\cdot(tg\alpha+tg\beta)}=0,\ \frac{1}{tg\gamma}+\frac{1-tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha+tg\beta}=0,\ ctg\gamma+ctg(\alpha+\beta)=0,$$

$$\frac{\sin(\gamma+\alpha+\beta)}{\sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\beta)}=0\Rightarrow\begin{cases}\sin(\alpha+\beta+\gamma)=0,\\ \sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\beta)\neq0.\end{cases}\quad\alpha+\beta+\gamma=0^{\circ},\text{або }180^{\circ}.$$

З умови випливає, що

$$
\begin{array}{l}
\quad 0^\circ\langle\alpha\langle 90^\circ,\\
+\,0^\circ\langle\beta\langle 90^\circ,\\
\quad \underline{0\langle\gamma\langle 90^\circ.}\\
0^\circ\langle\alpha+\beta+\gamma\langle 270^\circ,\\
\alpha+\beta+\gamma=180^\circ,
\end{array}
$$
що й треба було довести.

Дано:

$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ, \sin\alpha:\sin\beta:\sin\beta\gamma=2:3:4.$ Знайти : $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma.$

Розв'язання:

Нехай к-коефіцієнт пропорційності, тоді $\sin\alpha=2k, \sin\beta=3k, \sin\gamma=4k$.
За умовою задачі $\alpha+\beta+\gamma=\pi,$ тоді $\sin(\alpha+\beta)=\sin((\pi-\gamma)),$ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma.$
Аналогічно $\sin(\beta+\gamma)=\sin\alpha,$ $\sin(\alpha+\gamma)=\sin\beta.$

$$
\begin{array}{ll}
\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta=\sin\gamma, & 2k\cdot\cos\beta+3k\cdot\cos\alpha=4k,\\
\sin\beta\cdot\cos\gamma+\cos\beta\cdot\sin\gamma=\sin\alpha, & 3k\cdot\cos\gamma+4k\cdot\cos\beta=2k,\\
\sin\alpha\cdot\cos\gamma+\cos\alpha\cdot\sin\gamma=\sin\beta, & 4k\cdot\cos\alpha+2k\cdot\cos\gamma=3k.
\end{array}
\Bigg| : k\neq 0
$$

Розв'яжемо таку систему трьох рівнянь з трьома змінними:

$$
\begin{cases}
2\cos\beta+3\cos\alpha=4, \rightarrow \cos\alpha=\dfrac{4-2\cos\beta}{3},\\
3\cos\gamma+4\cos\beta=2,\\
4\cos\alpha+2\cos\gamma=3,
\end{cases}
\quad
\begin{cases}
3\cos\gamma+4\cos\beta=2,\\
4\cdot\dfrac{4-2\cos\beta}{3}+2\cos\gamma=3
\end{cases}
\quad
\begin{cases}
\cos\gamma=\dfrac{2-4\cos\beta}{3}\\
\dfrac{4}{3}\cdot(4-2\cos\beta)+\dfrac{2}{3}\cdot(2-4\cos\beta)=3\Big|\cdot 3.
\end{cases}
$$

$$4\cdot(4-2\cos\beta)+2\cdot(2-4\cos\beta)=9, \qquad 16-8\cos\beta+4-8\cos\beta=9,$$

$$20-16\cos\beta=9, \qquad 16\cos\beta=20-9, \quad \cos\beta=\frac{11}{16}.$$

$$\cos\gamma=\frac{2-4\cdot\frac{11}{16}}{3}=\frac{2-\frac{11}{4}}{3}=\frac{-\frac{3}{4}}{3}=-\frac{1}{4}. \qquad \cos\alpha=\frac{4-2\cdot\frac{11}{16}}{3}=\frac{4-1\frac{3}{8}}{3}=\frac{2\frac{5}{8}}{3}=\frac{\frac{21}{8}}{3}=\frac{21}{24}.$$

Відповідь: $\cos\alpha=\dfrac{7}{8};$ $\cos\beta=\dfrac{11}{16};$ $\cos\gamma=-\dfrac{1}{4}.$

Завдання для самостійної роботи:

4.100 Перетворити в добуток: $\text{tg}\,\alpha+ctg\beta.$ Відповідь: $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}.$

4.101 Дано: $0\langle\alpha\langle\dfrac{\pi}{2},$ $0\langle\beta\langle\dfrac{\pi}{2},$ $0\langle\gamma\langle\dfrac{\pi}{2};$

$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-1-4\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma.$

Довести, що $\alpha+\beta+\gamma=\pi.$

4.102 Дано: $\frac{5\pi}{6}\langle\alpha\langle\frac{11\pi}{6}$, $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{5}$.

Знайти $\cos\alpha$. Відповідь: $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{7}+2\right)}{10}$.

Обчислити: **4.103** $\cos 20^{o}\cdot\cos 40^{o}\cdot\cos 60^{o}\cdot\cos 80^{o}$. Відповідь: $\frac{1}{16}$.

4.104 $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}$. Відповідь: $\frac{1}{8}$.

4.105 Дано: $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=2{,}2$. Довести, що $\cos 2\alpha=0{,}6$.

4.106 Довести, що $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

4.107 $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

Дано: **4.108** $540^{o}\langle\alpha\langle 630^{o}$. $tg\alpha=\frac{3}{4}$. Знайти $tg\frac{\alpha}{4}$. Відповідь: $\frac{1-\sqrt{10}}{3}$.

4.109 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{2}$, $0\langle\alpha\langle\frac{\pi}{4}$. Знайти $tg\frac{\alpha}{2}$. Відповідь: $\frac{\sqrt{7}-2}{3}$.

Подати у вигляді добутку:

4.110 $\sin 16^{o}+\sin 40^{o}$. Відповідь: $2\cdot\sin 28^{o}\cdot\cos 12^{o}$.

4.111 $\sin 20^{o}-\sin 40^{o}$. Відповідь: $-\sqrt{3}\cdot\sin 10^{o}$.

4.112 $\cos 20^{o}-\cos 30^{o}$. Відповідь: $2\cdot\sin 25^{o}\cdot\sin 5^{o}$.

4.113 $\cos 15^{o}+\cos 45^{o}$. Відповідь: $\sqrt{3}\cdot\cos 15^{o}$.

4.114 $tg2x+tgx$. Відповідь: $\frac{\sin 3x}{\cos x\cdot\cos 2x}$.

4.115 $tg3x-tgx$. Відповідь: $\frac{\sin 2x}{\cos 3x\cdot\cos x}$.

4.116 $\cos 18^{o}-\sin 22^{o}$. Відповідь: $2\sin 25^{o}\cdot\cos 47^{o}$.

4.117 $\cos 50^{o}+\sin 80^{o}$. Відповідь: $\sqrt{3}\cdot\cos^{o}$.

4.118 $\cos\alpha+\sin\alpha$. Відповідь: $\sqrt{2}\cdot\cos\left(\alpha-45^{o}\right)$.

4.119 $tg4x+ctg2x$. Відповідь: $\frac{ctg2x}{\cos 4x}$.

4.120 $\sin^2 x-\sin^2 y$. Відповідь: $\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)$.

4.121 $1+2\cos x$. Відповідь: $4\cos\left(30^{o}+0{,}5x\right)\cdot\cos 30^{o}-0{,}5x$.

4.122 $\cos 2\alpha-\cos 4\alpha-\cos 6\alpha+\cos 8\alpha$. Відповідь: $-4\cos 5x\cdot\sin 2x\cdot\sin x$.

4.123 $3-\sqrt{3}\cdot ctg2x$. Відповідь: $\frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\left(2x-30^{o}\right)}{\sin 2x}$.

4.124 $\frac{4\sin^2 5x-3}{4\cos^2 5x-1}$. Відповідь: -1.

Деякі відомості про обернені тригонометричні функції

Нехай існує функція $y = f(x)$ з областю визначення X і множиною значень $У$.

Якщо виразити x через y, тобто $x = \varphi(y)$ і в цій формулі поміняти місцями область визначення і множину значень, то дістанемо функцію $y = \varphi(x)$, яка називається оберненою до даної функції $y = f(x)$.

Функція, обернена до функції $y = \sin x$, називається арксинусом, $y = \arcsin x$.

Функція, обернена до функції $y = \cos x$, називається арккосинусом, $y = \arccos x$.

Функція, обернена до функції $y = tgx$, називається арктангенсом, $y = arctgx$.

Функція, обернена до функції $y = ctgx$, називається арккотангенсом, $y = arcctgx$.

Деякі важливі властивості обернених тригонометричних функцій:

$\sin(\arcsin x) = x$ і $\cos(\arccos x) = x$ при $-1 \le x \le 1$;

$tg(arctgx) = x$ і $ctg(arcctgx) = x$ при $x \in R$;

$\arcsin(\sin x) = x$ при $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$;

$\arccos(\cos x) = x$ при $0 \le x \le \pi$;

$arctg(tgx) = x$ при $-\dfrac{\pi}{2} \langle x \langle \dfrac{\pi}{2}$;

$arcctg(ctgx) = x$ при $0 \langle x \pi$;

$\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad (-1 \le x \le 1)$;

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x \quad (-1 \le x \le 1)$;

$\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad (-1 \le x \le 1)$;

$arctg(-x) = -arctgx \quad (-\infty \langle x \langle +\infty)$;

$arcctg(-x) = \pi - arcctgx \quad (-\infty \langle x \langle +\infty)$.

Неважко вивести такі формули:

$\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}$ при $0 \langle x \langle 1$;

$\arcsin x = arctg \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ при $0 \langle x \langle 1$;

$\arcsin x = arcctg \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ при $0 \langle x \langle 1$;

$\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2}$ при $0 \langle x \langle 1$;

$\arccos x = arctg \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \mathrm{arctg} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ при $0 \langle x \langle 1$;

$\arccos x = arcctg \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ при $0 \langle x \langle 1$;

$$arctgx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ при } 0 \langle x \langle +\infty ;$$

$$arctgx = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ при } 0 \langle x \langle +\infty ;$$

$$arctgx = arcctg \frac{1}{x} \text{ при } 0 \langle x \langle +\infty ;$$

$$arcctgx = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ при } 0 \langle x \langle +\infty ;$$

$$arcctgx = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ при } 0 \langle x \langle +\infty ;$$

$$arcctgx = arctg \frac{1}{x} \text{ при } 0 \langle x \langle +\infty ;$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \text{ при } -1 \le x \le 1;$$

$$arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2} \text{ при } x \in R.$$

Покажемо застосування цих формул до розв’язування деяких вправ на властивості обернених тригонометричних функцій.

Обчислити: $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) - arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$

Розв’язання:

Як відомо $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\right); \quad arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$

Тоді:
$$\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) - arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sin\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$
Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Обчислити: $tg\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + arctg1\right).$

Розв’язання:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2}; \quad arctg1 = \frac{\pi}{4};$$

$$tg\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + arctg1\right) = tg\left(-\frac{\pi}{3} + \pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = tg\frac{-4\pi + 12\pi - 4\pi + 3\pi}{12} =$$

$$= tg\frac{7}{12}\pi = tg\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg\frac{\pi}{3} + tg\frac{\pi}{4}}{1 - tg\frac{\pi}{3}\cdot tg\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{1-3} = -\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Відповідь: $-\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Довести, що: $\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\arccos\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$

Розв’язання:

$\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\arccos\frac{1}{2}\right)=\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$ л.ч. = п.ч.

Довести, що: $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$.

Розв'язання:

Нехай $\arccos x=\alpha,$ тоді $x=\cos\alpha,$ $0\le\alpha\le\pi.$ З основної тригонометричної тотожності $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, маємо $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha;$ $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha};$ $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$. Л.ч. = п.ч.

Довести: $ctg(\arccos)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання:

Нехай $\arccos x=\alpha,$ тоді $x=\cos\alpha.$ Оскільки $ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$ а $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha},$ то $\sin\alpha=\sqrt{1-x^2}$. Таким чином, $ctg(\arccos x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, що й треба було довести.

Довести, що: $\sin(arcctgx)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Розв'язання:

Нехай $arcctgx=\alpha,$ тоді $0\langle\alpha\langle\pi,$ $x=ctg\alpha.$ Як відомо $\frac{1}{\sin^2\alpha}=1+ctg^2\alpha,$ $\sin^2\alpha=\frac{1}{1+ctg^2\alpha},$

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}.$ $\sin(arcctgx)=\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$ Що й треба було довести.

Обчислити: $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Розв'язання:

$$\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\cos\left(-\arcsin\frac{1}{3}\right)=\cos\left(\underbrace{\arcsin\frac{1}{3}}_{\alpha}\right)=\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=$$

$$=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}.$$ Відповідь: $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}.$

Обчислити: $tg\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$.

Розв'язання:

$$tg\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)=tg\left(\pi-\arccos\frac{1}{4}\right)=-tg\left(\underbrace{\arccos\frac{1}{4}}_{\alpha}\right)=-tg\alpha=-\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{1-\frac{1}{4}^2}}{\frac{1}{4}}=$$

$$=-\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}}=-\sqrt{15}.$$ Відповідь: $-\sqrt{15}.$

Обчислити:

Розв'язання:

$$\sin(arctg(-2)) = \sin(\pi - arctg2) = \sin\Big(\underbrace{arctg2}_{\alpha}\Big) = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Обчислити: $\sin\left(\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13}\right)$.

Розв'язання:

$$\sin\Bigg(\underbrace{\arcsin\frac{5}{13}}_{\alpha} + \underbrace{\arcsin\frac{12}{13}}_{\beta}\Bigg) = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta = \frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13} + \frac{12}{13}\cdot\frac{12}{13} = \frac{25+144}{169} = 1$$

$-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{5}{13}. \qquad -\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}, \quad \sin\beta = \frac{12}{13}.$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13};$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}.$$

Відповідь: 1.

Обчислити: $tg\left(arctg\frac{1}{2} - arctg\frac{1}{4}\right)$.

Розв'язання:

$$tg\Bigg(\underbrace{arctg\frac{1}{2}}_{\alpha} - \underbrace{arctg\frac{1}{4}}_{\beta}\Bigg) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta} =$$

$arctg\frac{1}{2} = \alpha, \quad tg\alpha = \frac{1}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$

$$= \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{1\frac{1}{8}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{9} = \frac{2}{9}.$$

$arctg\frac{1}{4} = \beta, \quad tg\beta = \frac{1}{4}, \quad -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}.$

Відповідь: $\frac{2}{9}$.

Обчислити: $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{7}\right)$.

Розв'язання:

$$\sin\Bigg(2\underbrace{\arcsin\frac{1}{7}}_{\alpha}\Bigg) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha =$$

$\arcsin\frac{1}{7} = \alpha, \quad \sin\alpha = \frac{1}{7}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2};$

$$= 2\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{8\sqrt{3}}{49}.$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1-\frac{1}{49}} = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

Відповідь: $\frac{8\sqrt{3}}{49}$.

Подати $\arcsin\frac{4}{5}$ у вигляді арккосинуса.

Розв'язання:

Нехай $\arcsin\frac{4}{5}=\alpha,$ тоді

$\sin\alpha=\frac{4}{5},\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.\quad \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}.$

$\alpha=\arccos\frac{3}{5}$, тоді $\arcsin\frac{4}{5}=\arccos\frac{3}{5}.$ Відповідь: $\arccos\frac{3}{5}.$

Виразити $\frac{\pi}{2}-\arcsin 0{,}2$ через арккосинус.

Розв'язання:

З формули $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ маємо: $\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x,$ тоді

$\frac{\pi}{2}-\arcsin 0{,}2=\arccos 0{,}2.$ Відповідь: $\arccos 0{,}2.$

Чи правильна рівність: $\arcsin\frac{9}{41}-\arccos\frac{4}{5}=-\arcsin\frac{84}{205}$?

Розв'язання:

$0<\arcsin\frac{9}{41}<\frac{\pi}{2};\quad 0<\arccos\frac{4}{5}<\frac{\pi}{2}\Big|\times(-1),\quad 0>-\arccos\frac{4}{5}>-\frac{\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2}<-\arccos\frac{4}{5}<0.$

Додамо почленно нерівності однакового змісту:

$$\begin{array}{r} 0<\arcsin\frac{9}{41}<\frac{\pi}{2}, \\ + \qquad -\frac{\pi}{2}<-\arccos\frac{4}{5}<0. \\ \hline -\frac{\pi}{2}<\arcsin\frac{9}{41}-\arccos\frac{4}{5}<\frac{\pi}{2}. \end{array}$$

$0<\arcsin\frac{8}{205}<\frac{\pi}{2}\Big|\times(-1)\quad 0<-\arcsin\frac{84}{205}>-\frac{\pi}{2};\to-\frac{\pi}{2}<-\arcsin\frac{84}{205}<0.$

Ліва і права частини вихідної рівності містяться на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. На цьому проміжку функція $y=\sin x$ зростає. Обчислимо синус лівої частини рівності $\sin\left(\underbrace{\arcsin\frac{9}{41}}_{\alpha}-\underbrace{\arccos\frac{4}{5}}_{\beta}\right)=\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta=$

$\arcsin\frac{9}{41}=\alpha,\quad \sin\alpha=\frac{9}{41},\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2},\quad \arccos\frac{4}{5}=\beta,\quad \cos\beta=\frac{4}{5},\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2}.$

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{9}{41}\right)^2}=\frac{40}{41};\quad \sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5};$

$\sin\left(-\arcsin\frac{84}{205}\right)=-\sin\left(\arcsin\frac{84}{205}\right)=-\frac{84}{205}.$

$=\frac{9}{41}\cdot\frac{4}{5}-\frac{40}{41}\cdot\frac{3}{5}=\frac{36}{205}-\frac{120}{205}=-\frac{84}{205}.$

Відповідь: рівність правильна.

Подати у вигляді арксинуса: $arctg\frac{9}{40}+\arccos\frac{4}{5}$.

Розв'язання:

$$0<\frac{9}{40}<1;\ \ arctg0<arctg\frac{9}{40}<arctg1,\quad 0<arctg\frac{9}{40}<\frac{\pi}{4}.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{4}{5}<1,\quad \arccos 1<\arccos\frac{4}{5}<\arccos\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ 0<\arccos\frac{4}{5}<\frac{\pi}{4}.$$

Додамо почленно нерівності

$$+\begin{array}{l} 0<arctg\frac{9}{40}<\frac{\pi}{4}, \\ 0<\arccos\frac{4}{5}<\frac{\pi}{4} \end{array}$$

$$arctg\frac{9}{40}=\alpha,\ \ tg\alpha=\frac{9}{40},\ \ 0<\alpha<\frac{\pi}{4}.$$

$$\arccos\frac{4}{5}=\beta,\ \ \cos\beta=\frac{4}{5},\ \ 0<\beta<\frac{\pi}{4}.$$

$$0<arctg\frac{9}{40}+\arccos\frac{4}{5}<\frac{\pi}{2}$$

Як відомо $\frac{1}{\sin^2\alpha}=1+ctg^2\alpha=1+\frac{1}{tg^2\alpha}=\frac{1+tg^2\alpha}{tg^2\alpha};\quad \sin^2\alpha=\frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha};$

$$\sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{\frac{9}{40}}{\sqrt{1+\left(\frac{9}{40}\right)^2}}=\frac{9}{40}\cdot\frac{40}{41}=\frac{9}{41}.$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{9}{41}\right)^2}=\sqrt{\frac{1600}{1681}}=\frac{40}{41}.$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{9}{41}\cdot\frac{4}{5}+\frac{40}{41}\cdot\frac{3}{5}=\frac{156}{205}.$$

$arctg\frac{9}{40}+\arccos\frac{4}{5}=\arcsin\frac{156}{205}$. Відповідь: $\arcsin\frac{156}{205}$.

Чому дорівнює кут $\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{4}$.

Розв'язання:

$$+\begin{array}{l} 0<\arcsin\frac{1}{3}<\frac{\pi}{2} \\ 0<\arcsin\frac{3}{4}<\frac{\pi}{2} \end{array},$$

$$0<\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{3}{4}<\pi.$$

На проміжку $(0;\ \pi)$ функція $y=\cos x$ спадає.

Обчислимо $\cos\left(\underbrace{\arcsin\frac{1}{3}}_{\alpha}+\underbrace{\arcsin\frac{3}{4}}_{\beta}\right)=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=$

$$\arcsin\frac{1}{3}=\alpha,\quad \sin\alpha=\frac{1}{3},\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2\sqrt{14}-3}{12}.$$

$\arcsin\frac{3}{4}=\beta,\ \ \sin\beta=\frac{3}{4},\ \ \ 0<\beta<\frac{\pi}{2}.$

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$

$\cos\beta=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}.$ Відповідь: $\frac{2\sqrt{14}-3}{12}.$

Обчислити: $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right).$

Розв’язання:

$\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)=\arcsin\left(-\sin\frac{\pi}{7}\right)=-\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)=-\frac{\pi}{7}.$ Відповідь: $-\frac{\pi}{7}.$

Обчислити: $\arccos\left(\cos\frac{6}{5}\pi\right).$

Розв’язання:

$\arccos\left(\cos\frac{6}{5}\pi\right)=\arccos\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)\right)=\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)=\arccos\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\pi}{5}.$

Відповідь: $\frac{\pi}{5}.$

Обчислити: $arctg(tg(-3010^{\circ})).$

Розв’язання:

$arctg(tg(-3010^{\circ}))=arctg(-tg(16\cdot180^{\circ}+130^{\circ}))=arctg(-tg130^{\circ})=-arctg(tg130^{\circ})=-arctg(tg(130^{\circ}-180^{\circ}))=$
$=-arctg(tg(-50^{\circ}))=-arctg(-tg50^{\circ})=arctg(tg50^{\circ})=50^{\circ}.$

Відповідь: $50^{\circ}.$

Завдання для самостійної роботи:

Обчислити:

4.125 $\cos\left(arcctg\left(-\sqrt{3}\right)+arctg\left(-\sqrt{3}\right)+\arcsin\frac{1}{2}\right).$ Відповідь: $-0{,}5.$

4.126 $\sin(\arccos 0{,}6).$ Відповідь: $0{,}8.$

4.127 $tg(\arcsin x).$ Відповідь: $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

4.128 $\cos(arctgx).$ Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

4.129 $\cos\left(arctg\left(-\frac{3}{2}\right)\right).$ Відповідь: $\frac{2}{\sqrt{13}}.$

4.130 $ctg\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right).$ Відповідь: $-\sqrt{15}.$

4.131 $\cos\left(arcctg\left(-\frac{7}{8}\right)\right).$ Відповідь: $-\frac{7\sqrt{113}}{113}.$

4.132 $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)+\arcsin\frac{4}{5}\right).$ Відповідь: $\frac{63}{65}.$

4.133 $\cos\left(arcctg\frac{3}{4}+arcctg\left(-\frac{12}{5}\right)\right)$. Відповідь: $-\frac{16}{65}$.

4.134 $\sin(2arctg3)$. Відповідь: $\frac{3}{5}$.

4.135 $\sin\left(2arctg\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\right)$. Відповідь: $\frac{\sqrt{14}}{5}-\frac{3\sqrt{2}}{20}$.

4.136 $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2arcctg\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$. Відповідь: $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

4.137 $tg\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$. Відповідь: $\frac{4\sqrt{2}}{7}$.

4.138 $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$. Відповідь: $\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

4.139 $\arcsin\left(\sin\frac{11}{10}\pi\right)$. Відповідь: $-\frac{\pi}{10}$.

4.140 $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)$. Відповідь: $\frac{7\pi}{18}$.

4.141 $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$. Відповідь: $\frac{9\pi}{14}$.

4.142 $2arctg\frac{1}{4}+arctg\frac{7}{23}$. Відповідь: $\frac{\pi}{7}$.

4.143 $\sin\left(2arctg\frac{1}{2}\right)-tg\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{12}\right)$. Відповідь: $\frac{1}{5}$.

Подати: **4.144** $\arcsin\frac{4}{5}$ у вигляді $\arccos$. Відповідь: $\arccos\frac{3}{5}$.

4.145 $\arcsin\frac{12}{13}$ у вигляді $arcctg$. Відповідь: $arcctg\frac{5}{12}$.

4.146 $arctg\frac{4}{3}$ у вигляді $\arcsin$. Відповідь: $\arcsin\frac{4}{5}$.

4.147 $\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{2}{3}$ через $\arcsin$. Відповідь: $\arcsin\frac{2}{3}$.

Довести: **4.148** $\frac{1}{3}arctg1+\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{2}=\frac{1}{2}arctg\sqrt{3}$.

4.149 $\arccos\frac{1}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)=\arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$.

4.150 $2arctg\frac{1}{5}+arctg\frac{1}{4}=arctg\frac{32}{43}$.