Раздел 8
Логарифмические уравнения

Уравнения вида $\log_a x = b,$ де $a > 0$ и $a \neq 1$ называется простейшим логарифмическим. А вообще, можно сказать, трансцендентное уравнение, хоть один член которого содержит переменную под знаком логарифма, называется логарифмическим.

Одним из способов решения логарифмических уравнений является применение основного логарифмического тождества $a^{\log_a n=N}$.

Например: $4^{\log_{64}(x-3)} + \log_2 5 = 50.$

Решение:

ОДЗ уравнения: $x - 3 > 0, \quad x > 3, \quad x \in (3;\ +\infty).$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$4^{\log_{64}(x-3)} + ^{\log_2 5} = 4^{\log_2 5} = 4^{\log_{64}(x-3)} \cdot 4^{\log_2 5} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^{\log_{64}(x-3)} \cdot \left(2^2\right)^{\log_2 5} =$$

$$\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^{\log_{64}(x-3)} \cdot 2^{2\log_2 5} = 64^{\frac{1}{3}\log_{64}(x-3)} \cdot 2^{\log_2 5^2} = 64^{\log_{64}(x-3)^{\frac{1}{3}}} \cdot 2^{\log_2 25} = (x-3)^{\frac{1}{3}} \cdot 25.$$

Данное уравнение имеет вид: $(x-3)^{\frac{1}{3}} \cdot 25 = 50, \quad (x-3)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{50}{25}, \quad (x-3)^{\frac{1}{3}} = 2,$

$\left((x-3)^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^3; \quad x - 3 = 8, \quad x = 11.$ $11 \in$ ОДЗ. Но не помешает сделать проверку.

Если $x = 11,$ то $4^{\log_{64}(11-3)} + ^{\log_2 5} = 4^{\log_{64} 8} + ^{\log_2 5} = 4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\log_2 5} = 2 \cdot 2^{\log_2 25} = 2 \cdot 25 = 50.$

$50 = 50.$ $x = 11 -$ корень уравнения.

Ответ: 11.

В процессе решения логарифмических уравнений возможно появление посторонних корней, а потому проверка целесообразна во всяком случае.

Хорошим рычагом есть формула $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b A}$ перехода от одного основания логарифма к другому, значительно упрощает решение тригонометрических уравнений.

Например, $2\log_x 25 - 3\log_{25} x = 1.$

Решение:

ОДЗ: $x \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty).$ $\quad 2 \cdot \dfrac{\log_{25} 25}{\log_{25} x} - 3 \cdot \log_{25} x = 1; \quad \dfrac{2 \cdot 1}{\log_{25} x - 3 \cdot \log_{25} x} = 1;$

Обозначим: $\log_{25} x = y,$ тогда $\dfrac{2}{y} - 3y - 1 = 0; \quad \begin{cases} 3y^2 - y + 2 = 0; \\ y \neq 0; \end{cases} \qquad D = 1 + 24 = 25;$

$y_1 = \dfrac{1-5}{-6} = \dfrac{2}{3} \in$ ОДЗ. $\quad y_2 = \dfrac{1+5}{-6} = -1 \notin$ ОДЗ. $\quad \log_{25} x = \dfrac{2}{3}; \quad x = 25^{\frac{2}{3}}.$

Ответ: $x = 25^{\frac{2}{3}}.$

Решим следующее уравнение: $x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{100}} = 0.$

Решение:

Возведем обе части уравнения в квадрат: $\left(x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{100}}\right)^2;$

$\left(x^2\right)^{1-\frac{1}{3}\lg x^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{10000}};$ Прологарифмуем с основой 10:

$\left(1-\frac{1}{3}\lg x^2\right)\lg x^2 = \lg(10)^{-\frac{4}{3}};$ $\left(1-\frac{1}{3}\lg x^2\right)\cdot\lg x^2 = -\frac{4}{3};$

Обозначим $\lg x^2 = y,$ тогда $\left(1-\frac{1}{3}y\right)y + \frac{4}{3} = 0;$ $y - \frac{1}{3}y^2 + \frac{4}{3} = 0\Big|\cdot 3,$ $3y - y^2 + 4 = 0,$

$y^2 - 3y - 4 = 0.$ По теореме Виета имеем:

$y_1 = -1;$ $y_2 = 4.$ Возвращаясь к замене, получим:

$\lg x^2 = -1;$ $x^2 = 10^{-1};$

$x^2 = \frac{1}{10};$ $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{10}};$ $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{10}};$ $x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}};$ $\lg x^2 = 4;$ $x^2 = 100;$ $x_3 = 100;$ $x_4 = -100.$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}};$ 100.

$\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5.$

Решение:

$\sqrt{\log_x\left(\sqrt{5x}\right)^{\frac{1}{2}}} = -\log_x 5;$ $\sqrt{\frac{1}{2}\log_x 5 + \frac{1}{2}\log_x x} = -\log_x 5;$ $\sqrt{\frac{1}{2}\log_x 5 + \frac{1}{2}} = -\log_x 5;$

Возведем обе части в квадрат:

$\frac{1}{2}\log_x 5 + \frac{1}{2} = \left(-\log_x 5\right)^2\Big|:2;$ $\log_5 x + 1 = 2\log^2{}_x 5;$

Подстановка: $\log_x 5 = Z,$ тогда $2z^2 - z - 1 = 0;$ $\begin{cases} 2\log^2{}_x 5 - \log_x 5 - 1 = 0; \\ -\log_x 5 \ge 0. \end{cases}$

$D = 1 + 8 = 9.$ $Z = -\frac{1}{2};$ $Z = 1.$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_x 5 = -\frac{1}{2}, \\ \log_x 5 = 1, \end{array}\right. \\ \log_x 5 \le 0. \end{cases}$

$x^{-1/2} = 5,$ $\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2} = 5^{-2};$ $x = \frac{1}{25};$ $x = 5$ – не удовлетворяет неравенство

$\log x^5 \le 0.$

Ответ: $\frac{1}{25}.$

$\log_x 25 = \frac{1}{\log_{25} x},$ тогда $2\cdot\frac{1}{\log_{25} x} - 3\log_{25} x = 1,$ $\frac{2}{\log_{25} x} - 3\log_{25} x = 1.$ Введем новую переменную $\log_{25} x = y,$ $\frac{2}{y} - 3y = 1,$ $-3y^2 - y + 2 = 0,$ $3y^2 + y - 2 = 0,$

$D = 1 + 24 = 25 = 5^2$. $y_1 = \frac{-1-5}{6} = -1$; $y_2 = \frac{-1+5}{6} = \frac{2}{3}$. $\log_{25} x = -1$, $x = 25^{-1} = \frac{1}{25}$;

$\log_{25} x = \frac{2}{3}$; $x = 25^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{25^2} = \sqrt[3]{\left(5^2\right)^2} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5} = 5 \cdot \sqrt[3]{5}.$

Ответ: $\frac{1}{25}$; $5 \cdot \sqrt[3]{5}$.

Упомянутая формула является полезной и при решении уравнений типа: $\log_x 3 + \log_{x^2} 9 + \log_{\sqrt{x}} \sqrt{3} = 1.$

Решение:

О.Д.З: $(0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$. Преобразуем каждый член уравнения: $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$;

$\log_{x^2} 9 = 2\log_{x^2} 3 = \frac{2}{\log_3 x^2} = \frac{2}{2\log_3 x} = \frac{1}{\log_3 x}$; $\log_{\sqrt{x}} \sqrt{3} = \frac{1}{\log_{\sqrt{3}} \sqrt{x}} = \frac{1}{\log_{3^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\log_3 x}$.

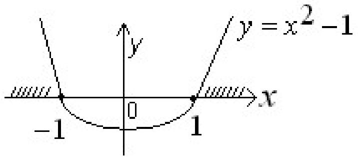
Данное уравнение будет иметь вид: $\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 x} = 1$; $\frac{3}{\log_3 x} = 1$,

$\lg_3 x = 3$, $x = 3^3 = 27$. Ответ: 27.

Или такое уравнение: $\log_3\left(2^{\sqrt{x^2-1}} + 1\right) = 2.$

Решение:

О.Д.З: $x^2 - 1 > 0$, $(x-1)\cdot(x+1) > 0$,
$x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$



По определению логарифма числа имеем:

$2^{\sqrt{x^2-1}} + 1 = 3^2$; $2^{\sqrt{x^2-1}} = 9 - 1$; $2^{\sqrt{x^2-1}} = 8$; $2^{\sqrt{x^2-1}} = 2^3$; $\sqrt{x^2-1} = 3$; $x^2 - 1 = 9$;
$x^2 = 10$; $x_1 = -\sqrt{10}$; $x_2 = \sqrt{10}$.

Ответ: $-\sqrt{10}$; $\sqrt{10}$.

Задания для самостоятельной работы:

Упомянутое тождество необходимое и при решении логарифмических уравнений типа:

8.1 $10^{\lg^2 x} + x^{\lg x} = 20.$ Ответ: 0,1; 10.

8.2 $\sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} \cdot \log_{\sqrt{5}} x = -\sqrt{6}.$ Ответ: $\frac{1}{5}$.

8.3 $\log_x x = \log_2\left(6 - x^2\right).$ Ответ: -3; 2.

8.4 $x^{\log_x\left(x^2+3\right)} = -4.$ Ответ: $x \in \varnothing$.

8.5 $\log_6(x-1) + \log_6(5x+3) = 2.$ Ответ: 3.

8.6 $\log_{\frac{1}{9}}\left(2x^2 - 2x - 1\right) = -\frac{1}{2}.$ Ответ: -1; 2.

8.7 $2\log_3(x-2)-\log_3\left(x^2-4x+\frac{28}{9}\right)=2.$ Ответ: 1; 3.

8.8 $\log_{x-1}9=2.$ Ответ: 4.

8.9 $\lg\left(x^2-x-6\right)+x=\lg(x+2)+4.$ Ответ: 4.

8.10 $x^{\log_2 x+2}=8.$ Ответ: $\frac{1}{8}$.

8.11 $\log_x 9x^2\cdot\log^2{}_3 x=4.$ Ответ: 3; $\frac{1}{9}$.

8.12 $\lg^2 x=1.$ Ответ: 0,1; 10.

8.13 $\frac{1}{\log x-6}+\frac{5}{\log x+2}=1.$ Ответ: 10^2; 10^8.

8.14 $\lg\left(x^{\lg x}\right)=1.$ Ответ: 0,1; 10.

8.15 $\sqrt{2\lg(-x)}=\lg\sqrt{x^2}.$ Ответ: -100; -1.

8.16 $\log_x(125x)\cdot\log^2{}_{25}x=1.$ Ответ: 5; 5^{-4}.

8.17 $\lg(x+1)-\frac{1}{2}\lg(2x-3)-\lg\sqrt{x-3}=\frac{1}{2}-\lg\sqrt{2}.$ Ответ: $\frac{11}{9}$; 4.

8.18 $x^{3-\lg\frac{200}{x}}=400.$ Ответ: 0,01; 20.

8.19 $x^{3+\lg\frac{20}{x}}=8000.$ Ответ: 0,001; 20.

8.20 $\sqrt{2\log_8(-x)}-\log_8\sqrt{x^2}=0.$ Ответ: -1; -64.

8.21 $3^{\log^2{}_3 x}+x^{\log_3 x}=162.$ Ответ: $\frac{1}{3}$; 9.

8.22 $2{,}5^{\log_3 x}+0{,}4^{\log_3 x}=2{,}9.$ Ответ: $\frac{1}{3}$; 3.

8.23 $\log_x 9x^2\cdot\log^2{}_3 x=4.$ Ответ: $\frac{1}{9}$; 3.

8.24 $\lg(\lg x)+\lg\left(\lg x^4-3\right)=0.$ Ответ: $\frac{1}{\sqrt[4]{10}}$; 10.

8.25 $x^{\lg x-2}=1000.$ Ответ: $\frac{1}{\sqrt[3]{100}}$; $\frac{1}{\sqrt[5]{100}}$.

8.26 $\log^2{}_5 x+3\log_5 x-4=0.$ Ответ: 5; $\frac{1}{625}$.

8.27 $1+\log_2(x+5)=\log_2(3x-1)+\log_2(x-1).$ Ответ: 3.

8.28 $x^{1+\lg x}=100.$ Ответ: 0,01; 10.

8.29 $14^{\log_7 2}\cdot x^{\log_7 4x}=2.$ Ответ: 0,5.