Раздел 4
Преобразование тригонометрических выражений

Преобразование тригонометрических выражений, как и преобразования любых других выражений является надежной пропедевтикой для дальнийшего решения тригонометрических уравнений и их систем; доведение тождеств и т.д. Поскольку этот материал составляет значительную часть всего объема математического материала общеобразовательной школы, то превращению тригонометрических выражений необходимо уделять большое внимание. Очень важно подобрать такую систему упражнений, которая способствовала бы выработке умений и навыков вычисления значений тригонометрических функций любых значений аргумента по известному значению одной из них. Некоторые методисты для облегчения запоминания тригонометрических формул и ориентирования в них рекомендуют разделить основные тригонометрические тождества на три группы:

1). Формулы квадратов:

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1,$

$\sec^2 \alpha - tg^2\alpha = 1, \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha};$

$\cos ec^2\alpha - ctg^2\alpha = 1, \qquad \cos ec\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$

2). Формулы обратных величин:

$\sin\alpha \cdot \cos ec\,\alpha = 1,$

$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1,$

$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1.$

3). Формулы деления:

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha, \qquad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = ctg\alpha.$

Групп формул следует придерживаться такой последовательности: сначала использовать формулы квадратов, потом – формулы обратных величин, после них – формулы деления и, наконец – опять формулы обратных величин. Проиллюстрируем этот совет на решении такого упражнения.

Дано: $\sec\alpha = -\frac{25}{7},\ 180^\circ\langle\alpha\ \langle 270^\circ$

Вычислить значение остальных пяти тригонометрических функций.

Решение:

Из формул квадратов выбираем $\sec^2\alpha - tg^2\alpha = 1.$ Определяем $tg^2 a = \sec^2 a - 1,$

$tg\alpha = \pm\sqrt{\sec^2\alpha - 1}$. Поскольку α – угол третьей четверти, то $tg\alpha \rangle 0$, а потому $tg\alpha = \sqrt{\left(-\frac{25}{7}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{625}{49} - 1} = \sqrt{\frac{625-49}{49}} = \sqrt{\frac{576}{49}} = \frac{24}{7}$. Из формул обратных величин $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$ та $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$ находим $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{\frac{24}{7}} = \frac{7}{24}$ і

$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{-\frac{25}{7}} = -\frac{7}{25}$.

Формулы деления дают $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$, $\sin\alpha = tg\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{24}{7} \cdot \left(-\frac{7}{25}\right) = -\frac{24}{25}$.

Ответ: $\sin\alpha = -\frac{24}{25}$; $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$; $tg\alpha = \frac{24}{7}$; $ctg\alpha = \frac{7}{24}$; $\cos ec\alpha = -\frac{25}{24}$.

Так целесообразно поступать и в том случае, когда необходимые все тригонометрические функции выразить через одну из них. Эта работа необходима при решении тригонометрических уравнений, неравенств, доведении тождеств, тому подобное.

Доказать тождество: $2\cdot\left(\cos^6\alpha + \sin^6\alpha\right) - 3\cdot\left(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha\right) = -1$.

Решение:

Рекомендация: сложную часть (то есть правую) необходимо упростить:

л.ч. $= 2\cdot\left(\cos^6\alpha + \sin^6\alpha\right) - 3\cdot\left(\cos^4 + \sin^4\alpha\right) = 2\cdot\left(\cos^4\alpha - \cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha + \sin^4\alpha\right) -$

$\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = \left(\cos^2\alpha\right)^3 + \left(\sin^2\right)^3 =$
$= \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)\cdot\left(\cos^4\alpha - \cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha + \sin^4\alpha\right) =$
$= 1\cdot\left(\cos^4\alpha - \cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha + \sin^4\alpha\right).$

$-3\left(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha\right) =$
$2\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha +$
$+ 2\sin^4\alpha - 3\cos^4\alpha - 3\sin^4\alpha =$

$= -\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha - \sin^4\alpha = -\left(\cos^4\alpha + 2\cos^2\cdot\sin^2\alpha + \sin^4\alpha\right) =$

$= -\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)^2 = -1^2 = -1 = п.ч.$

л.ч. = п.ч.

Если левая и правая части равенства примерно одинаковой сложности, то проще нужно считать ту часть, которая содержит синус и косинус.

Доказать тождество: $\frac{1}{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha} - 1 = \frac{\left(1 - tg^2\alpha\right)^2}{4tg^2\alpha}$.

Доказательство:

Проще является левая часть тождества. Сложную часть сведем к простой:

$$\frac{\left(1-tg^2\alpha\right)^2}{4tg^2\alpha}=\frac{\left(1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)^2}{4\cdot\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\left(\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)^2}{\dfrac{4\cdot\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)^2}{4\cdot\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^4\alpha}=$$

$$=\frac{\cos^4\alpha-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin^4\alpha}{4\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=$$

$$\text{п.ч}=\frac{\cos^4\alpha-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin^4\alpha+4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin^4\alpha-4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)^2-4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{1-4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\frac{1}{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}-\frac{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\frac{1}{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}-1=\textit{л.ч.}$$

Доказать тождество: $tg^2\beta+\sin^2\alpha=tg^2\beta\cdot\cos^2\alpha+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta}$.

Доказательство:

Сложнее правая часть, ее и упростим:

$$tg^2\beta\cdot\cos^2\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta}=tg^2\beta\cdot\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2\beta}=tg^2\beta\cdot\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\left(1+tg^2\beta\right)=$$

$$\text{п.ч.}=\quad=tg^2\beta\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)+\sin^2\alpha\cdot\left(1+tg^2\beta\right)=tg^2\beta-tg^2\alpha\cdot\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+tg^2\beta\cdot\sin^2\alpha=$$

$$=tg^2\beta+\sin^2\alpha=\textit{л.ч.}$$

Значит, п.ч. = л.ч.

Упростить: $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}-tg^2\alpha\cdot tg^2\beta.$

Решение:

$$\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}-tg^2\alpha\cdot tg^2\beta=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}-\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}-tg^2\alpha\cdot tg^2\beta=$$

$$=tg^2\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2\beta}-\frac{1}{\cos^2\alpha}-tg^2\alpha\cdot tg^2\beta=tg^2\alpha\cdot\left(1+tg^2\beta\right)-\left(1+tg^2\alpha\right)=tg^2\alpha\cdot tg^2\beta=$$

$$=tg^2\alpha+tg^2\beta\cdot tg^2\alpha-1-tg^2\alpha-tg^2\alpha\cdot tg^2\beta=-1.$$

Ответ: –1.

Упростить выражение: $\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$ при $\dfrac{3\pi}{2}\langle\alpha\langle 2\pi.$

Решение:

$$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{\left(1-\sin\alpha\right)\cdot\left(1-\sin\alpha\right)}{\left(1+\sin\alpha\right)\cdot\left(1-\sin\alpha\right)}}-\sqrt{\frac{\left(1+\sin\alpha\right)\cdot\left(1+\sin\alpha\right)}{\left(1-\sin\alpha\right)\cdot\left(1+\sin\alpha\right)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(1-\sin\alpha\right)^2}{1-\sin^2\alpha}}-\sqrt{\frac{\left(1+\sin\alpha\right)^2}{\cos^2\alpha}}=\frac{\left|1-\sin\alpha\right|}{\left|\cos\alpha\right|}-\frac{\left|1+\sin\alpha\right|}{\left|\cos\alpha\right|}=\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=$$

Учитывая, что $\alpha -$ угол четвертой четверти, имеем: $\sin\alpha\langle 0,\ 1-\sin\alpha\rangle 0.$

Тогда $|1-\sin\alpha| = 1-\sin\alpha.\ 1+\sin\alpha\rangle 0,$ тогда

$|1+\sin\alpha| = 1+\sin\alpha.\quad \cos\alpha\rangle 0,\ \ |\cos\alpha| = \cos\alpha.$

$$= \frac{1-\sin\alpha-1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-2\sin\alpha}{\cos\alpha} = -2tg\alpha.$$

Ответ: $-2tg\alpha.$

Нужными орудиями при преобразованы тригонометрических выражений является умение переходить от градусной меры аргумента к радианной и наоборот. Лучше всего это делать с помощью пропорции:

$$\begin{matrix}\pi\text{рад} - 180^\circ,\\ \alpha\text{рад} - \chi^\circ,\end{matrix} \rightarrow \chi^\circ = \frac{\alpha\text{рад}\cdot 180^\circ}{\pi\text{рад}}.$$

$$\alpha\text{рад} = \frac{\chi^\circ\cdot\pi\text{рад}}{180^\circ}.$$

«Отработать» знаки тригонометрических функций необходимо на единичном круге.

Отрезок АВ-ось косинусов, отрезок CD – ось синусов, прямая ВМ – ось тангенсов, прямая СМ – ось котангенсов. Так как $OB\rangle O$ «обслуживает» первую и четвертую четверти, то в них косинус угла положительный; $OD\langle O$ – в третьей и четвертой четвертях синус отрицательный и т.д.

Значения тригонометрических функций некоторых углов нужно занести в таблицу, что облегчит их запоминание.

α *в рад.*	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0
$ctg\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—	0	—
α в *град.*	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°

Эту таблицу следует дополнить умениями находить значения тригонометрических функций острых углов, содержащиеся в «Четырехзначных таблицах Брадиса В.М.» и последовательностью применения «Формул сведения», которая дает возможность свести тригонометрическую функцию сколь угодно большого по модулю угла к тригонометрической функции острого угла.

Мнемоническое правило пользования формулами сведения:
1). Если превращается синус косинус угла по модулю большего чем 360°, то его величину делят на 360° и произведение 360° умножить на неполное частное опускают; В случае тангенса, или котангенса делят на 180° и произведение 180° на неполную долю опускают.
2). Остаток от деления подают в виде суммы или разницы одного из предельных углов на единичной окружности (90°, 180°, 270°, 360°) и острого угла. 3). Если в образовавшейся сумме, или разнице имеется угол 90°, или 270° то название функции меняется на схожую, а если есть угол 180°, или 360°, то название функции не меняется.
4). Знак «–» или «+»результата определяется по левой части последней в этой цепи преобразований равенства.
5). При этом необходимо учитывать парность тригонометрических функций. Проиллюстрируем это на примерах:

1). $\cos(-3102^\circ) = \cos 3102^\circ (\text{парність функції косинус}) = \cos\left(\underset{\text{опускаємо}}{8\cdot 360^\circ} + 222^\circ\right) =$

$= \cos 222^\circ = \cos(270^\circ - 48^\circ) = -\sin 48^\circ.$

2). $tg(-2280^\circ) = -tg2280^\circ = -tg(12\cdot 180^\circ) = -tg120^\circ = -tg(90^\circ + 30^\circ) = ctg30^\circ = \sqrt{3}.$

3). $\sin\left(\alpha - 3\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\left(-\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \sin\left(-\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \sin\alpha\right) = \cos\alpha.$

4) $ctg^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \left(ctg\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)\right)^2 = \left(-ctg\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2 = (-tg\alpha)^2 = tg^2\alpha.$

Задания для самостоятельной работы:

4.1 Вычислить: $\sin 450^\circ \cdot \cos 675^\circ + tg562^\circ \cdot tg788^\circ.$ Ответ: $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$.

4.2 Доказать, что $\frac{1 + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{tg\alpha + 1}{tg\alpha - 1}$.

4.3 Доказать тождество: $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.

4.4 Доказать тождество: $\frac{1+tg\alpha}{1+ctg\alpha}=tg\alpha.$

4.5 Доказать тождество: $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{ctg\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=2tg^2\alpha.$

4.6 Упростить выражение: $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ при $\pi\langle\alpha\langle\frac{3\pi}{2}$. Ответ: $-2ctg\alpha.$

4.7 Вычислить: $\frac{ctg\alpha-\cos\alpha}{ctg\alpha}$ при $\sin\alpha=\frac{3}{4}$. Ответ: $\frac{1}{4}$.

4.8 Дано: $\sin\alpha+\cos\alpha=m.$ Найти: а). $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$;

б). $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha.$

Ответ: а). $\frac{m^2-1}{2}$; б). $\frac{1+6m^2-3m^4}{4}$.

4.9 Упростить выражение: $\frac{\sin(\pi-\alpha)-\sin3\alpha+\sin5\alpha}{2\cos2\alpha-1}$. Ответ: $\sin3\alpha.$

4.10 Упростить выражение: $tg\alpha+\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$. Ответ: 1.

4.11 Упростить выражение: $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$. Ответ:1.

4.12 Вычислить: $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\cos\frac{\pi}{6}-\log_3\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Ответ: 1.

4.13 Упростить: $\frac{tg(180^\circ-\alpha)\cdot\cos(180^\circ-\alpha)\cdot tg(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)\cdot ctg(90^\circ+\alpha)\cdot tg(90^\circ+\alpha)}$. Ответ: 1.

4.14 Упростить: $\frac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}$. Ответ: 1.

4.15 Упростить: $\left(2-\frac{2-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right)\cdot\frac{1-\cos\alpha}{2\cos\alpha}$. Ответ: –0,5.

Формулы сложения

Так называются формулы, выражающие тригонометрические функции углов $\alpha+\beta$ ***или*** $\alpha-\beta$ ***через тригонометрические функции углов*** α ***и*** β ***:***

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta,$ $\quad\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta,$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta,$ $\quad\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta,$

$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta},$ $\quad tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta},$

$ctg(\alpha+\beta)=\frac{1-tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha+tg\beta},$ $\quad ctg(\alpha-\beta)=\frac{1+tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha-tg\beta}.$

Покажем применение этих формул к решению некоторых упражнений.

Вычислить:

$$\sin105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\sin60^\circ\cdot\cos45^\circ+\cos60^\circ\cdot\sin45^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot(\sqrt{3}+1).$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)$.

$$tg15^\circ = tg\left(60^\circ - 45^\circ\right) = \frac{tg60^\circ - tg45^\circ}{1 + tg60^\circ \cdot tg45^\circ} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{3-1} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{2} =$$

$$= \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

Ответ: $2-\sqrt{3}$.

Дано: $\sin\alpha = -0{,}8, \quad 180\langle\alpha\langle 270^\circ$ Найти $tg\left(\alpha - 45^\circ\right)$.

Решение

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \quad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha, \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Поскольку $\alpha -$ угол третьей четверти, то $\cos\alpha\langle 0,$ и тогда

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-(-0{,}8)^2} = -\sqrt{1-0{,}64} = -\sqrt{0{,}36} = -0{,}6.$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-0{,}8}{-0{,}6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}. \quad tg\left(\alpha - 45^\circ\right) = \frac{tg\alpha - tg45^\circ}{1 + tg\alpha \cdot tg45^\circ} = \frac{\frac{4}{3}-1}{1+\frac{4}{3}\cdot 1} = \frac{1\frac{1}{3}-1}{1+1\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{2\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{1}{7}.$$

Ответ: $\frac{1}{7}$.

Дано: $\cos\alpha = -\frac{4}{5}, \quad \pi\langle\alpha\langle\frac{3\pi}{2}, \quad \sin\beta = -\frac{3}{5}, \quad \frac{3\pi}{2} \langle\ \beta\langle 2\pi.$

Вычислить: $\cos(\alpha-\beta)$. Решение:

Используя основное тригонометрическое тождество найдем

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Так как $\alpha -$ угол III четверти, то $\sin\alpha\langle 0,$ а поэтому

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}.$$

$\cos\beta = \pm\sqrt{1-\sin^2\beta}, \ \beta -$ угол IV четверти, $\cos\beta\rangle 0,$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta = -\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{16}{25} + \frac{9}{25} = -\frac{7}{25}.$$

Ответ: $-\frac{7}{25}$.

Дано: $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = -\frac{2}{5}, \ \frac{5\pi}{6}\langle\alpha\langle\frac{4\pi}{3}$. Найти $\sin\alpha$.

Решение

Применим такой прием:

$$\sin\alpha = \left(\frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{3} - \sin\alpha\right)\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) - \cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) - \frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = -\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)} =$$

Определим знак выражения $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$: по условию $\frac{5\pi}{6}<\alpha<\frac{4\pi}{3}\,|\cdot(-1)$,

$-\frac{4\pi}{3}<-\alpha<-\frac{5\pi}{6}\,\Big|+\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}<\frac{\pi}{3}-\alpha<\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}$,

$-\pi<\frac{\pi}{3}-\alpha<-\frac{3\pi}{6}$, $-\pi<\frac{\pi}{3}-\alpha<-\frac{\pi}{2}$,

это значит, что $\frac{\pi}{3}-\alpha-$ угол третьей четверти.

Значит, $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)<0$.

$$= -\frac{\sqrt{3}}{5}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^2} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{5}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{4}{25}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{5}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{21}{25}} = -\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{21}{10}} =$$

$$= \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{21}}{10}.$$

Ответ: $\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{21}}{10}$.

Дано: $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$, α і $\beta-$ углы первой четверти. Найти $\alpha+\beta$.

Решение:

$$\begin{array}{l} 0°<\alpha<90° \\ + \quad 0°<\beta<90° \\ \hline 0°<\alpha+\beta<180° \end{array}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

С основной тригонометрической формулы имеем:

$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$;

$\sin\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2\beta}$; $\sin\beta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Тогда:

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{5}}{5\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}-\frac{6\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{5}\cdot10}=\frac{1}{5\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{2}}{5}=\frac{1-3\cdot2}{5\sqrt{2}}=-\frac{5}{5\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Так как $\alpha+\beta-$угол II четверти, то $\alpha+\beta=180^\circ-45^\circ=135^\circ$. Ответ: 135°.

Доказать, что $tg\alpha\cdot tg\beta+tg\beta\cdot tg\gamma+tg\alpha\cdot tg\gamma=1$, если $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$.

Доказательство:

$$tg\alpha\cdot tg\beta+tg\beta\cdot tg\gamma+tg\gamma\cdot tg\alpha=tg\alpha\cdot tg\beta+\underbrace{tg\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)}_{tg\gamma}\cdot tg\beta+\underbrace{tg\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)}_{tg\gamma}\cdot tg\alpha=$$

Л.ч.$= tg\alpha\cdot tg\beta+tg\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)\cdot(tg\beta+tg\alpha)=tg\alpha\cdot tg\beta+ctg(\alpha+\beta)\cdot(tg\alpha+tg\beta)=$

$$=tg\alpha\cdot tg\beta+\frac{1-tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha+tg\beta}\cdot(tg\alpha+tg\beta)=tg\alpha\cdot tg\beta+1-tg\alpha\cdot tg\beta=1=n.ч.$$

Л.ч. = П.ч.

Задания для самостоятельной работы:

4.16 Доказать тождество: $tg27^\circ + tg33^\circ + \sqrt{3}\cdot tg27^\circ \cdot tg33^\circ = 3.$

4.17 Дано: $tg\alpha = \frac{1}{4},\ \ 0\langle\alpha\langle\frac{\pi}{2},\ \ tg\beta = \frac{5}{3},\ \ 0\langle\beta\langle\frac{\pi}{2}.$ Найти $\alpha - \beta.$ Ответ: 0,5.

4.18 $\cos 63^\circ \cdot \sin 27^\circ + \sin 63^\circ \cdot \cos 27^\circ.$ Ответ: 1.

4.19 $\cos 107^\circ \cdot \cos 17^\circ + \sin 107^\circ \cdot \sin 17^\circ.$ Ответ: 0.

4.20 $\cos 31^\circ \cdot \cos 24^\circ - \sin 24^\circ \cdot \sin 31^\circ - \cos 55^\circ.$ Ответ: 0.

4.21 $\sqrt{3}\cos\alpha - 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\alpha.$ Ответ: 0.

4.22 $\sqrt{2}\sin(\alpha - 45^\circ) - \sin\alpha + \cos\alpha.$ Ответ: 0.

4.23 $2\cos(60^\circ - \alpha) - \sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha.$ Ответ: 0.

4.24 $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\alpha - \sin\alpha.$ Ответ: 0.

4.25 Дано: $\sin\alpha = \frac{8}{17},\ \ \cos\beta = \frac{4}{5},\ \ \alpha$ і β – углы I четверти.

Найти: **4.26** $\sin(\alpha + \beta).$ Ответ: $\frac{77}{85}.$

4.27 $\cos(\alpha + \beta).$ Ответ: $\frac{36}{85}.$

4.28 $\cos(\alpha - \beta).$ Ответ: $\frac{84}{85}.$

4.29 $tg(\alpha + \beta).$ Ответ: $2\frac{5}{36}.$

4.30 $ctg(\alpha + \beta).$ Ответ: $\frac{36}{77}.$

Доказать, что: **4.31** $\dfrac{tg\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) + tg\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}{1 - tg\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right)\cdot tg\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)} = 1.$

4.32 $\dfrac{tg\frac{\pi}{9} + tg\frac{5\pi}{36}}{1 + tg\frac{8\pi}{9}\cdot tg\frac{5\pi}{36}} = 1.$

4.33 $\dfrac{tg\alpha + tg\beta}{tg(\alpha + \beta)} + \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{tg(\alpha - \beta)} = 2.$

4.34 $1 + \mathrm{tg}\,\alpha \cdot tg\beta \cdot \dfrac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} = 0.$

4.35 Упростить выражение: $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha} + \dfrac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\cos 3\alpha + \cos\alpha}.$ Ответ: $\dfrac{1}{\sin 2\alpha}.$

4.36 Упростить выражение и вычислить его значение:

4.37 $\dfrac{\left(\cos^2\alpha - 4\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot(\sin\alpha + \sin 3\alpha)}{2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}$ при $\alpha = \frac{\pi}{24}.$ Ответ: $\frac{1}{2}.$

4.38 Доказать тождество: $\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}-\frac{1}{\sin 6\alpha}\right)\cdot\frac{\cos 7\alpha-\cos 5\alpha}{\sin^2 2\alpha-\cos^2 2\alpha}=4\sin\alpha.$

4.39 Вычислить: $\cos(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=0{,}6$, $90^\circ<\alpha<180^\circ$, $\sin\beta=0{,}8$, $0^\circ<\beta<90^\circ$.
Ответ: 0.

Формулы двойных и тройных аргументов

Синус удвоенного аргумента: $\sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha.$

Косинус удвоенного аргумента: $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha.$

Тангенс удвоенного угла: $tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha},\quad tg2\alpha=\frac{2ctg\alpha}{ctg^2\alpha-1}.$

Формулы понижения степени: $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$

Синус тройного аргумента: $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$

Косинус тройного аргумента: $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$

Тангенс тройного аргумента: $tg3\alpha=\frac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}\quad\left(\alpha\neq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}\right),\ n\in Z.$

Котангенс тройного аргумента: $ctg3\alpha=\frac{3ctg\alpha-ctg^3\alpha}{1-3ctg^2\alpha},\quad\left(\alpha\neq\frac{\pi n}{3}\right),\ n\in Z.$

Покажем применение этих формул в процессе решения упражнений для поступающих в ВУЗы.

Упростить выражение: $\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta.$

Решение:

$\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta=(\sin(\alpha+\beta))^2+(\cos(\alpha-\beta))^2-\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta=$

$=(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)^2+(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)^2-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot 2\sin\beta\cdot\cos\beta=$

$=\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta+2\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta+\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\times$

$\times\sin\alpha\cdot\sin\beta+\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta-4\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta=(\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta+\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta)+$

$+(\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta)=\sin^2\alpha\cdot(\cos^2\beta+\sin^2\beta)+\cos^2\alpha\cdot(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=$

$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$

Ответ: 1.

Найти значение выражения: $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}$.

Решение:

Поскольку $\sin\frac{\pi}{7}\neq 0,$ то можно данное выражение умножить и разделить на $2\sin\frac{\pi}{7}$:

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{2\cdot\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{2\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{2\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{2\cdot 4\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\cdot\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}{8\cdot\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{8\cdot\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{8}.$$

Ответ: $-\frac{1}{8}$.

Упростить выражение: $4\cos^4\alpha-2\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 4\alpha.$

Решение:

$$4\cos^4\alpha-2\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 4\alpha=4\left(\cos^2\alpha\right)^2-2\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 4\alpha=4\cdot\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2-2\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 4\alpha=$$

$$=4\cdot\frac{1+2\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha}{4}-2\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 4\alpha=1+2\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha-2\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 4\alpha=$$

$$=1+\frac{1+\cos 4\alpha}{2}-\frac{1}{2}\cos 4\alpha=\frac{2+1+\cos 4\alpha-\cos 4\alpha}{2}=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

Вычислить без таблиц и микрокалькулятора: $\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}.$

Решение:

$$\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=\frac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ}=\frac{2\cdot\left(\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ\right)}{2\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ}=\frac{2\cdot 2\left(\frac{1}{2}\cdot\cos 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\sin 20^\circ}=$$

$$=\frac{4\cdot\left(\sin 30^\circ\cdot\cos 10^\circ-\cos 30^\circ\cdot 10^\circ\right)}{\sin 20^\circ}=\frac{4\cdot\sin\left(30^\circ-10^\circ\right)}{\sin 20^\circ}=\frac{4\cdot\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=4.$$

Ответ: 4.

Найти $tg\alpha$, если $tg\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}.$

Решение:

Преобразуем выражение $tg\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{tg\alpha-tg\frac{\pi}{4}}{1+tg\alpha\cdot\frac{\pi}{4}}=\frac{tg\alpha-1}{1+tg\alpha}.$

Используя условие, имеем $\frac{tg\alpha-1}{1+tg\alpha}=\frac{3}{4}$. По основным свойством пропорции получаем равенство $4\cdot(tg\alpha-1)=3\cdot(1+tg\alpha);\quad 4tg\alpha-4=3+3tg\alpha;\quad 4tg\alpha-3tg\alpha=3+4;$

$tg\alpha = 7$. Ответ: 7.

Задания для самостоятельной работы:

Упростить выражения:

4.40 $0{,}125 - \cos^2\alpha + \cos^4\alpha$. Ответ: $\frac{1}{8}\cos 4\alpha$.

4.41 $\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ$. Ответ: $\frac{1}{4}$.

4.42 $1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi\right) - \cos^2\frac{\alpha}{4} + \sin^2\frac{\alpha}{4}$. Ответ: 1.

4.43 $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$. Ответ: $2\cos\alpha$.

4.44 $\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$. Ответ: $\sin\alpha$.

4.45 $\frac{\sin 100^\circ}{\cos 50^\circ}$. Ответ: $2\sin 50^\circ$.

4.46 $\frac{\cos 36^\circ + \sin^2 18^\circ}{\cos^2 18^\circ}$. Ответ: 1.

Доказать, что:

4.47 $tg\alpha + 2tg2\alpha + 4ctg4\alpha = ctg\alpha$.

4.48 $\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 8\alpha = \frac{\sin \cdot 16\alpha}{16 \cdot \sin\alpha}$.

4.49 $\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$.

4.50 Дано: $\sin\alpha = 0{,}8,\ 0^\circ\langle\alpha\langle 90^\circ$.

Вычислить:

4.51 $\sin 2\alpha$. Ответ: 0,96.

4.52 $\cos 2\alpha$. Ответ: – 0,28.

4.53 $tg2\alpha$. Ответ: $-\frac{24}{7}$.

4.54 $ctg2\alpha$. Ответ: $-\frac{7}{24}$.

4.55 $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$. Ответ: $\frac{1}{4}$.

4.56 $12\sin 15^\circ \cdot \sin 105^\circ$. Ответ: 3.

4.57 $6\cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ$. Ответ: 1,5.

4.58 $15\sin 165^\circ \cdot \cos 15^\circ$. Ответ: 3,75.

4.59 $3\sin^2 30^\circ + 8\cos^2 30^\circ$. Ответ: 6,75.

4.60 $2\cos^2 45^\circ + 6\sin^2 45^\circ$. Ответ: $2+2\sqrt{2}$.

4.61 $15tg157^\circ \cdot tg427^\circ$. Ответ: 15.

4.62 $15\cos 120^\circ \cdot tg315^\circ$. Ответ: 7,5.

4.63 $\sin 15^\circ \cdot \cos 75^\circ + \cos 15^\circ \cdot \sin 75^\circ$. Ответ: 1.

4.64 $\cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ + \sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ$. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.65 $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin 2x}$. Ответ: 1.

4.66 $2\cos 4\alpha + 2\sin 4\alpha \cdot tg2\alpha$. Ответ: 2.

4.67 $\frac{1+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \cdot \frac{2}{(1+tg\alpha)^2}$. Ответ: 1.

Тригонометрические функции половинного аргумента

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$; $tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$; $ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$.

Дано: $\sin\alpha = \frac{24}{25}$, $450^\circ\langle\alpha\langle 540^\circ$. Найти $\sin\frac{\alpha}{4}$.

Решение:

Найдем пределы для аргументов $\frac{\alpha}{2}$ і $\frac{\alpha}{4}$: $450^\circ\langle\alpha\langle 540^\circ \Big| : 2$, $225^\circ\langle\frac{\alpha}{2}\langle 270^\circ \Big| : 2$,

$122{,}5^\circ\langle\frac{\alpha}{4}\langle 135^\circ$. $\sin\frac{\alpha}{4} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}}$, $\frac{\alpha}{4}$ – угол II четверти, $\sin\frac{\alpha}{4}\rangle 0$, тогда

$\sin\frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}}$.

Для нахождения $\cos\frac{\alpha}{2}$ найдем $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, α – угол II четверти,

потому $\cos\alpha\langle 0$, $\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{24}{25}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{376}{625}} = -\sqrt{\frac{49}{625}} = -\frac{7}{25}$. $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

$\frac{\alpha}{2}$ – угол III четверти $\cos\frac{\alpha}{2}\langle 0$. $\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = -\sqrt{\frac{18}{25}\cdot\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$.

$\sin\frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Ответ: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Вычислить: $ctg7^\circ 30'$. Решение:

Вычислим: $\cos(2\cdot 7^\circ 30') = \cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, тогда $ctg7^\circ 30' = \sqrt{\frac{1+\cos 15^\circ}{1-\cos 15^\circ}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{1-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}} =$

$$= \sqrt{\frac{\frac{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{2}}+1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{2}}-1-\sqrt{3}\right)}} = \sqrt{\frac{\frac{2\cdot 2}{\sqrt{2}}+1+\sqrt{3}}{\frac{2\cdot 2}{\sqrt{2}}-1-\sqrt{3}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\sqrt{2}+1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-1-\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{8}+1+\sqrt{3}}{\sqrt{8}-1-\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}+1}{\sqrt{8}-\left(\sqrt{3}+1\right)}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{8}-\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}+1\right)\right)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}+1\right)^2}{\left(\sqrt{8}\right)^2-\left(\sqrt{3}+1\right)^2}} = \frac{\left|\sqrt{8}+\sqrt{3}+1\right|}{\sqrt{8-3-2\sqrt{3}-1}} = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}+1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}+1}{\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}} = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}+1}{\left|\sqrt{3}-1\right|} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{\sqrt{24}+3+\sqrt{3}+\sqrt{8}+\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{2\sqrt{6}+4+2\sqrt{3}+\sqrt{8}}{2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{3}+4+2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2. \quad \text{Відповідь: } \sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2.$$

Упростить выражение: $1+2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha.$ Решение:

$$1+2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha = \cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha =$$

$$= 2\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha = 2\cdot\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right) = 2. \quad \text{Відповідь: } 2.$$

Вычислить: $tg112^\circ 30'$. Так, как угол $112^\circ 30'$ – угол II четверти, то

$$tg112^\circ 30'\langle 0,\ tg112^\circ 30' = -\sqrt{\frac{1-\cos 225^\circ}{1+\cos 225^\circ}} = -\sqrt{\frac{1-\cos\left(180^\circ+45^\circ\right)}{1+\cos\left(180^\circ+45^\circ\right)}} = -\sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{1-\cos 45^\circ}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = -\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)}} = -\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{4-2}} = -\frac{\left|2+\sqrt{2}\right|}{2} = -\frac{2+\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $-\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Вычислить: $\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}.$ Решение:

Используя формулы приведения имеем:

$$\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}=\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\cos^4\frac{3\pi}{16}+\cos^4\frac{\pi}{16}=$$

$$=\left(\sin^4\frac{\pi}{16}+\cos^4\frac{\pi}{16}+2\sin^2\frac{\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{\pi}{16}-2\sin^2\frac{\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{\pi}{16}\right)+$$

$$+\left(\sin^4\frac{3\pi}{16}+\cos^4\frac{4\pi}{16}+2\sin^2\frac{3\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{3\pi}{16}-2\sin^2\frac{3\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{3\pi}{16}\right)=\left(\sin^2\frac{\pi}{16}+\cos^2\frac{\pi}{16}\right)^2-$$

$$-2\sin^2\frac{\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{\pi}{16}+\left(\sin^2\frac{3\pi}{16}+\cos^2\frac{3\pi}{16}\right)^2-2\sin^2\frac{3\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{3\pi}{16}=1-2\sin^2\frac{\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{\pi}{16}+$$

$$+1-2\sin^2\frac{3\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{3\pi}{16}=2-\frac{1}{2}\left(\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{16}\right)\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{16}\left(2\cdot\frac{3\pi}{16}\right)\right)^2=2-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\sin^2\frac{3\pi}{8}=$$

$$=2-\frac{1}{2}\cdot\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}\right)=2-\frac{1}{2}\cdot\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}\right)=2-\frac{1}{2}\cdot1=1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

Задания для самостоятельной работы:

Вычислить:

4.68 $\sin 15^\circ$. Ответ: $0{,}5\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

4.69 $\cos 15^\circ$. Ответ: $\sqrt{2}-1$.

4.70 $\mathrm{tg}\,22^\circ 30'$. Ответ: $\sqrt{2}-1$.

4.71 $\sin 75^\circ$. Ответ: $\frac{5}{\sqrt{26}}$.

4.72 $\cos 75^\circ$. Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{26}}$.

4.73 $tg75^\circ$. Ответ: -5.

4.74 $ctg75^\circ$. Ответ: $-\frac{1}{5}$.

4.75 $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$. Ответ: 1,5.

Дано: $\sin\alpha=0{,}8,\ \ 90^\circ<\alpha<180^\circ$. Найти:

4.76 $\sin\frac{\alpha}{2}$. Ответ: $\sqrt{0{,}8}$.

4.77 $\cos\frac{\alpha}{2}$. Ответ: $\sqrt{0{,}2}$.

4.78 $tg\frac{\alpha}{2}$. Ответ: 2.

4.79 $ctg\frac{\alpha}{2}$. Ответ: $\frac{1}{2}$.

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

$\sin\alpha = \dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$; $\cos\alpha = \dfrac{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

Дано:$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$. Найти $x = \dfrac{2\sin\alpha}{4-3\cos\alpha}$.

Решение:

$\sin\alpha = \dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\frac{5}{4}} = \dfrac{4}{5}$; $\cos\alpha = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \dfrac{3}{5}$, тогда: $x = \dfrac{2\cdot\frac{4}{5}}{4-3\cdot\frac{3}{5}} = \dfrac{\frac{8}{5}}{4-1\frac{4}{5}} = \dfrac{\frac{8}{5}}{2\frac{1}{5}} = \dfrac{\frac{8}{5}}{\frac{11}{5}} = \dfrac{8}{11}$.

Ответ: $\dfrac{8}{11}$.

Дано: $ctg\alpha = \dfrac{1}{3}$. Найти: $\cos 4\alpha$.

Решение:

$tg\alpha = \dfrac{1}{ctg\alpha} = \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 3$; $tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \dfrac{2\cdot 3}{1-3^2} = -\dfrac{6}{8} = -\dfrac{3}{4}$; $\cos 4\alpha = \dfrac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \dfrac{\frac{7}{16}}{\frac{25}{16}} = \dfrac{7}{25}$.

Ответ: $\dfrac{7}{25}$.

Дано:$\operatorname{tg}2\alpha = 4$. Обчислити $\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \cdot ctg2\alpha$.

Решение:

$\sin 4\alpha = \dfrac{2tg2\alpha}{1+tg^2 2\alpha} = \dfrac{2\cdot 4}{1+4^2} = \dfrac{8}{17}$; $\cos 4\alpha = \dfrac{1-tg^2 2\alpha}{1+tg^2 2\alpha} = \dfrac{1-4^2}{1+4^2} = -\dfrac{15}{17}$; $ctg2\alpha = \dfrac{1}{tg2\alpha} = \dfrac{1}{4}$.

Тоді: $\dfrac{8}{17} + \left(-\dfrac{15}{17}\right)\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{8}{17} - \dfrac{15}{68} = \dfrac{32-15}{68} = \dfrac{17}{68} = \dfrac{1}{4}$. Відповідь: $\dfrac{1}{4}$.

Задания для самостоятельной работы:

4.80 Дано: $tg\dfrac{\alpha}{2} = 0{,}5$. Найти $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$. Ответ: $\dfrac{7}{25}$.

Найти:

4.81 $\sin 4\alpha$, если $tg2\alpha = 3$. Ответ: 0,6.

4.82 $\cos 4\alpha$, если $tg2\alpha = 8$. Ответ: $-\dfrac{63}{65}$.

4.83 $\sin\alpha$, если $tg\dfrac{\alpha}{2} = 0{,}5$. Ответ: $\dfrac{4}{5}$.

4.84 $\cos\alpha$, если $tg\frac{\alpha}{2}=0{,}5$. Ответ: $\frac{3}{5}$.

4.85 $tg\alpha$, если $tg\frac{\alpha}{2}=0{,}5$. Ответ: $\frac{4}{3}$.

4.86 $ctg\alpha$, если $tg\frac{\alpha}{2}=0{,}5$. Ответ: $\frac{3}{4}$.

4.87 $\sin\alpha+\cos\alpha$, если $tg\frac{\alpha}{2}=3$. Ответ: $-0{,}2$.

4.88 $\sin\alpha+\cos\alpha$, если $tg\frac{\alpha}{2}=3$. Ответ: 1,4.

Преобразование произведений синусов и косинусов на сумму

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}.$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

С помощью этих формул решается очень много тригонометрических упражнений.

Доказать тождество: $\frac{1}{2\sin10^\circ}-2\sin70^\circ=1.$

Решение:

$$\text{Л.ч.}=\frac{1}{2\sin10^\circ}-2\sin70^\circ=\frac{1-4\cdot\sin10^\circ\cdot\sin70^\circ}{2\sin10^\circ}=\frac{1-4\dfrac{\cos(10^\circ-70^\circ)-\cos(10^\circ+70^\circ)}{2}}{2\sin10^\circ}=$$

$$=\frac{1-2\cdot\cos60^\circ-\cos80^\circ}{2\sin10^\circ}=\frac{1-2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\cos80^\circ}{2\sin10^\circ}=\frac{2\cos80^\circ}{2\cos80^\circ}=1=\text{ п.ч.}$$

Тождество доказано.

Доказать, что: $\sin\alpha\cdot\sin7\alpha-\sin3\alpha\cdot\sin5\alpha=-\sin2\alpha\cdot\sin4\alpha.$

Решение:

$$\sin\alpha\cdot\sin7\alpha-\sin3\alpha\cdot\sin5\alpha=\frac{\cos(\alpha-7\alpha)-\cos(\alpha+7\alpha)}{2}-\frac{\cos(3\alpha-5\alpha)-\cos(3\alpha+5\alpha)}{2}=$$

$$\text{Л.ч}=\ =\frac{\cos6\alpha-\cos8\alpha}{2}-\frac{\cos2\alpha-\cos8\alpha}{2}=\frac{\cos6\alpha-\cos8\alpha-\cos2\alpha+\cos8\alpha}{2}=\frac{\cos6\alpha-\cos2\alpha}{2}=$$

$$=\frac{-2\sin\frac{6\alpha+2\alpha}{2}\cdot\sin\frac{6\alpha-2\alpha}{2}}{2}=-\frac{\sin4\alpha\cdot\sin2\alpha}{1}=-\sin2\alpha\cdot\sin4\alpha=n.ч.$$

Л.ч. = П. ч.

Показать, что величина выражения $\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)$ не зависит от величины угла β.

Решение:

$$\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)-2\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}\times$$

$$\times\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)-(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))\cdot\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)-$$

$$-\cos^2(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\beta-\frac{\cos(\alpha-\beta-\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta+\alpha+\beta)}{2}=$$

$$=\cos^2\beta-\frac{\cos(-2\beta)+\cos2\alpha}{2}=\frac{1+\cos2\beta}{2}-\frac{\cos2\beta+\cos2\alpha}{2}=\frac{1+\cos2\beta-\cos2\beta-\cos2\alpha}{2}=$$

$$=\frac{1-\cos2\alpha}{2}=\sin^2\alpha$$ Не залежить від β.

Преобразовать в сумму: $\cos^2 x\cdot\cos3x$.

Решение:

$$\cos^2 x\cdot\cos3x=\frac{1+\cos2x}{2}\cdot\cos3x=\frac{1}{2}\cos3x+\frac{\cos2x\cdot\cos3x}{2}=\frac{1}{2}\cdot\cos3x+\frac{1}{2}\cos2x\cdot\cos3x=$$

$$=\frac{1}{2}\cos3x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos(2x-3x)+\cos(2x+3x)}{2}=\frac{1}{2}\cdot\cos3x+\frac{1}{4}\cdot(\cos x+\cos5x)=\frac{1}{2}\cdot\cos3x+\frac{1}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos5x.$$

Упростить: $\sin4^\circ\cdot\sin86^\circ-\cos2^\circ\cdot\sin6^\circ+0{,}5\cdot\sin4^\circ$.

Решение:

$$\sin4^\circ\cdot\sin86^\circ-\cos2^\circ\cdot\sin6^\circ+0{,}5\cdot\sin4^\circ=\sin4^\circ\cdot\cos4^\circ-\cos2^\circ\cdot\sin6^\circ+0{,}5\cdot\sin4^\circ=\frac{1}{2}\sin8^\circ-$$

$$-\frac{\sin(2^\circ+6^\circ)+\sin(2^\circ-6^\circ)}{2}+\frac{1}{2}\sin4^\circ=\frac{1}{2}\sin8^\circ-\frac{1}{2}\sin8^\circ-\frac{1}{2}\sin4^\circ+\frac{1}{2}\sin4^\circ=0.$$

Ответ: 0.

$$\cos\frac{11\pi}{26}\cdot\cos\frac{3\pi}{56}-\sin\frac{5\pi}{21}\cdot\sin\frac{2\pi}{21}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}.$$

Решение:

$$\cos\frac{11\pi}{26}\cdot\cos\frac{3\pi}{56}-\sin\frac{5\pi}{21}\cdot\sin\frac{2\pi}{21}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\cos\left(\frac{11\pi}{56}+\frac{3\pi}{56}\right)+\cos\frac{11\pi}{56}-\frac{3\pi}{56}}{2}-$$

$$-\frac{\left(\cos\frac{5\pi}{21}-\frac{2\pi}{21}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{21}+\frac{2\pi}{21}\right)}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{7}}{2}-\frac{\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}+\frac{1}{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}+1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Вычислить: $\sin20^\circ\cdot\sin40^\circ\cdot\sin60^\circ\cdot\sin80^\circ$.

Решение:

Вычислим произведение:

$$\sin20^\circ\cdot\sin40^\circ=\frac{\cos(20^\circ-40^\circ)-\cos(20^\circ+40^\circ)}{2}=\frac{\cos20^\circ-\cos60^\circ}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos20^\circ-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\cos20^\circ-\frac{1}{4}.$$

Тогда:

$$\left(\frac{1}{2}\cos 20^\circ-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 80^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\cos 20^\circ\cdot\sin 80^\circ-\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 80^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\sin 80^\circ\cdot\cos 20^\circ-\frac{1}{2}\sin 80^\circ\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{\sin(80^\circ+20^\circ)+\sin(80^\circ-20^\circ)}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sin 80^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\sin 100^\circ+\sin 60^\circ-\frac{1}{2}\sin 80^\circ\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\left(\sin 100^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin 80^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\left(\sin(90^\circ+10^\circ)+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin(90^\circ-10^\circ)\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\left(\cos 10^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos 10^\circ\right)=$$

$=\frac{3}{16}$. Відповідь $\frac{3}{16}$.

Задания для самостоятельной работы:

4.89 Доказать тождество: $4\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ-\alpha)\cdot\sin(60^\circ+\alpha)=\sin 3\alpha$.

Вычислить:

4.90 $\cos 5^\circ\cdot\cos 55^\circ\cdot\cos 65^\circ$. Ответ: $\frac{1}{16}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

4.91 $tg20^\circ\cdot tg40^\circ\cdot tg60^\circ\cdot tg80^\circ$. Ответ: 3.

4.92 $2\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ-\cos 20^\circ$. Ответ: 0,5.

4.93 $\sin 2x+2\sin(75^\circ-x)\cdot\cos(75^\circ+x)$. Ответ: 0,5.

4.94 $\cos^2 5^\circ+\cos^2 1^\circ-\cos 6^\circ\cdot\cos 4^\circ$. Ответ: 1.

4.95 $\cos 20^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\cos 80^\circ$. Ответ: 0,125.

Преобразовать в сумму:

4.96 $\sin 10^\circ\cdot\cos 8^\circ\cdot\cos 6^\circ$. Ответ: $\frac{1}{4}(\sin 24^\circ+\sin 12^\circ+\sin 8^\circ-\sin 4^\circ)$.

4.97 $\cos 3x\cdot\cos 5x\cdot\cos 7$. Ответ: $\frac{1}{2}(\cos 15x+\cos 5x+\cos 9x+\cos x)$.

4.98 $\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x\cdot\sin 4x$. Ответ: $\frac{1}{8}(1+\cos 10x-\cos 8x-\cos 6x)$.

4.99 $8\sin^3 x\cdot\cos x$. Ответ: $2\sin 2x-\sin 4x$.

Преобразование суммы и разности одноименных тригонометрических функций

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.\qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.\qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\quad\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right),\quad\left(\beta\neq\frac{\pi}{2}\right).\qquad tg\alpha-tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\quad\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right),\quad\left(\beta\neq\frac{\pi}{2}\right).$$

$$ctg\alpha+ctg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}\quad(\alpha\neq k\pi),\quad(\beta\neq m\pi).\qquad ctg\alpha-ctg\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}\quad(\alpha\neq k\pi),\quad(\beta\neq m\pi).$$

Целесообразно в эту группу формул отнести еще и такую:

$a\cdot\sin\alpha+b\cdot\sin\beta=r\cdot\sin(\alpha+\varphi),$

где $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Преобразовать в произведение, или долю: $1+\sin\alpha+\cos\alpha.$

Решение:

$$1+\sin\alpha+\cos\alpha=(1+\cos\alpha)+\sin\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\frac{\alpha}{2}\right)=2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot2\cdot\sin\frac{\pi}{4}\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=2\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: $2\sqrt{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right).$

$$\sqrt{3}-2\cdot\sin\alpha=2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\alpha\right)=2\cdot(\sin60^\circ-\sin\alpha)=2\cdot2\cdot\sin\frac{60^\circ-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{60^\circ+\alpha}{2}=$$

$$=4\cdot\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\cos30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: $4\cdot\sin\left(30^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\cos30^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right).$

$3\sin x+4\cos x=\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sin(x+\varphi)=5\cdot\sin(x+\varphi)$, де $\cos\varphi=\dfrac{3}{5}$, $\sin\varphi=\dfrac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{4}{3}$,

$\varphi=arctg\dfrac{4}{3}$. Ответ: $5\sin+\left(arctg\dfrac{4}{3}\right).$

$$\frac{\cos\alpha+\sqrt{3}\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha-\sqrt{3}\cdot\sin\alpha}=\frac{2\left(\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\alpha\right)}{2\left(\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\alpha\right)}=\frac{\cos60^\circ\cdot\cos\alpha+\sin60^\circ\cdot\sin\alpha}{\cos60^\circ\cdot\cos\alpha-\sin60^\circ\cdot\sin\alpha}=$$

$=\dfrac{\cos(60^\circ-\alpha)}{\cos(60^\circ+\alpha)}.$ Відповідь: $\dfrac{\cos(60^\circ-\alpha)}{\cos(60^\circ+\alpha)}.$

Доказать, что $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cdot\cos\dfrac{B}{2}\cdot\cos\dfrac{C}{2}$, де $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ.$

Решение:

Поскольку:

C=180˚ – (A+B), то sinC=sin(180˚ – (A+B)) $=\sin(A+B)=\sin\left(2\cdot\dfrac{A+B}{2}\right)=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A+B}{2}.$

л.ч. $=\sin A+\sin B+2\sin\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A+B}{2}=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2}+2\sin\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A+B}{2}=$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right) = 2\sin\frac{A+B}{2}\cdot 2\cdot\cos\frac{\frac{A}{2}-\frac{B}{2}+\frac{A}{2}+\frac{B}{2}}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}-\frac{B}{2}-\frac{A}{2}-\frac{B}{2} =$$

$$= 4\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\left(-\frac{B}{2}\right) = 4\cdot\sin\frac{180^\circ - C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2} = 4\cdot\sin\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)\cdot\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2} =$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} = \textit{п.ч.} \qquad \textit{л.ч.} = \textit{п.ч.}$$

Превратить в произведение:

$$\sin\alpha+\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\beta = 2\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta}{2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right).$$

Аналогичным способом превращаются в произведение выражения:
$\sin\alpha-\cos\beta;\ \cos\alpha\pm\sin\beta.$

$$\sin\alpha+\cos\alpha = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha\right) = \sqrt{2}\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

Таким же способом превращаются в произведение выражения: $\sin\alpha-\cos\alpha;$
$\cos\alpha\pm\sin\alpha.$

Рассмотрим способ преобразования в произведение такого выражения:

$$\sin^2\alpha-\cos^2\beta = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}-\frac{1+\cos 2\beta}{2} = \frac{1-\cos 2\alpha-1-\cos 2\beta}{2} = -\frac{(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos\frac{2\alpha+2\beta}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha-2\beta}{2} = -\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta).$$

Этот способ подходит для преобразования в произведение таких выражений:
$\sin^2\alpha-\sin^2\beta;\ \cos^2\alpha-\cos^2\beta;\ \cos^2\alpha-\sin^2\beta.$

Сведем к виду удобному для логарифмирования такое выражение:

$$1+\sin\alpha = 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 2\cos^2\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Так же превращаются в произведение выражения: $1-\sin\alpha;\ \sin\alpha-1.$

Рассмотрим еще некоторые способы преобразования тригонометрических выражений в произведение или в долю:

$$tg\alpha+1 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha} = \frac{2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\alpha} =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\alpha}.$$

Аналогично преобразуются выражения: $\mathrm{tg}\,\alpha-1,\ 1\pm tg\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha\pm 1,\ 1\pm ctg\alpha.$

$$2\cos\alpha+1 = 2\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\alpha+\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot 2\cos\frac{\alpha+\frac{\pi}{3}}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{3}}{2} = 4\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$

Таким же способом преобразуются выражения: $1 \pm 2\sin\alpha$;
$\sqrt{2}\cos\alpha \pm 1; \sqrt{2} \pm 2\sin\alpha; 2cos\alpha \pm \sqrt{3}.$

$$3\text{-}4\sin^2\alpha = 3 - 4\frac{1-\cos 2\alpha}{2} = \frac{6-4+4\cos 2\alpha}{2} = 1+2\cos 2\alpha = 2\cdot\left(\frac{1}{2}+\cos 2\alpha\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2\alpha\right) = 2\cdot 2\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{3}-2\alpha}{2} = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right).$$

Таким же методом преобразуются выражения: $3-4\cos^2\alpha;\ 4\sin^2\alpha - 1; 4\cos^2\alpha - 1.$

$$3tg^2\alpha - 1 = 3\cdot\left(tg^2\alpha - \frac{1}{3}\right) = 3\cdot\left(tg^2\alpha - tg^2\frac{\pi}{6}\right) = 3\cdot\left(tg\alpha - tg\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(tg\alpha + tg\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 3\cdot\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{3\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\alpha\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{3}{4}\cdot\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{4\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\alpha}.$$ Так само можна перетворити вирази :

$tg^2\alpha - 3;\quad ctg^2\alpha - 3;\quad 3ctg^2\alpha - 1.$

Дано: $\alpha,\ \beta,\ \gamma -$ острые углы и $tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = tg\alpha\cdot tg\beta\cdot tg\gamma.$ Доказать, что $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ.$

Решение:

Так, как: $tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = tg\alpha\cdot tg\beta\cdot tg\gamma,$ то $tg\alpha + tg\beta + tg\gamma - tg\alpha\cdot tg\beta\cdot tg\gamma = 0,$

$tg\alpha + tg\beta + (tg\gamma - tg\alpha\cdot tg\beta\cdot tg\gamma) = 0,\ tg\alpha + tg\beta + tg\gamma\cdot(1 - tg\alpha\cdot tg\beta) = 0 \,|: tg\gamma\cdot(tg\alpha + tg\beta) \neq 0,$

$$\frac{tg\alpha+tg\beta}{tg\gamma\cdot(tg\alpha+tg\beta)} + \frac{tg\gamma\cdot(1-tg\alpha\cdot tg\beta)}{tg\gamma\cdot(tg\alpha+tg\beta)} = 0,\ \frac{1}{tg\gamma} + \frac{1-tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha+tg\beta} = 0,\ ctg\gamma + ctg(\alpha+\beta) = 0,$$

$$\frac{\sin(\gamma+\alpha+\beta)}{\sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\beta)} = 0 \Rightarrow \begin{cases}\sin(\alpha+\beta+\gamma) = 0,\\ \sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\beta)\neq 0.\end{cases}\quad \alpha+\beta+\gamma = 0^\circ, \text{або } 180^\circ.$$

Из условия следует, что

$$\begin{array}{l} 0^\circ < \alpha < 90^\circ,\\ +\ 0^\circ < \beta < 90^\circ,\\ \underline{\quad 0 < \gamma < 90^\circ.\quad}\\ 0^\circ < \alpha+\beta+\gamma < 270^\circ,\\ \alpha+\beta+\gamma = 180^\circ, \end{array}$$ что и требовалось доказать.

Дано:

$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ, \sin\alpha : \sin\beta : \sin\beta\gamma = 2:3:4.$ Знайти : $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma.$

Решение:

Пусть k - коэффициент пропорциональности, тогда
$\sin\alpha = 2k, \sin\beta = 3k, \sin\gamma = 4k$.

По условию задачи $\alpha+\beta+\gamma = \pi,$ тогда $\sin(\alpha+\beta) = \sin((\pi-\gamma)),\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma.$

Аналогично $\sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha,\ \sin(\alpha+\gamma) = \sin\beta.$

$\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta = \sin\gamma,$ $\qquad 2k\cdot\cos\beta + 3k\cdot\cos\alpha = 4k,$

$\sin\beta\cdot\cos\gamma+\cos\beta\cdot\sin\gamma=\sin\alpha,$ $\quad 3k\cdot\cos\gamma+4k\cdot\cos\beta=2k,\quad :k\neq 0$

$\sin\alpha\cdot\cos\gamma+\cos\alpha\cdot\sin\gamma=\sin\beta,$ $\quad 4k\cdot\cos\alpha+2k\cdot\cos\gamma=3k.$

Решим такую систему трех уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} 2\cos\beta+3\cos\alpha=4, \to \cos\alpha=\dfrac{4-2\cos\beta}{3}, \\ 3\cos\gamma+4\cos\beta=2, \\ 4\cos\alpha+2\cos\gamma=3, \end{cases} \quad \begin{cases} 3\cos\gamma+4\cos\beta=2, \\ 4\cdot\dfrac{4-2\cos\beta}{3}+2\cos\gamma=3 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos\gamma=\dfrac{2-4\cos\beta}{3} \\ \dfrac{4}{3}\cdot(4-2\cos\beta)+\dfrac{2}{3}\cdot(2-4\cos\beta)=3 \end{cases} \Big|\cdot 3.$$

$4\cdot(4-2\cos\beta)+2\cdot(2-4\cos\beta)=9,$ $\quad 16-8\cos\beta+4-8\cos\beta=9,$

$20-16\cos\beta=9,$ $\quad 16\cos\beta=20-9,\quad \cos\beta=\dfrac{11}{16}.$

$\cos\gamma=\dfrac{2-4\cdot\frac{11}{16}}{3}=\dfrac{2-\frac{11}{4}}{3}=\dfrac{-\frac{3}{4}}{3}=-\dfrac{1}{4}.$ $\quad \cos\alpha=\dfrac{4-2\cdot\frac{11}{16}}{3}=\dfrac{4-1\frac{3}{8}}{3}=\dfrac{2\frac{5}{8}}{3}=\dfrac{\frac{21}{8}}{3}=\dfrac{21}{24}.$

Ответ: $\cos\alpha=\dfrac{7}{8};\ \cos\beta=\dfrac{11}{16};\ \cos\gamma=-\dfrac{1}{4}.$

Завдання для самостійної роботи:

4.100 Превратить в произведение: $\mathrm{tg}\,\alpha+ctg\beta.$ Ответ: $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}.$

4.101 Дано: $0\langle\alpha\langle\dfrac{\pi}{2},\quad 0\langle\beta\langle\dfrac{\pi}{2},\quad 0\langle\gamma\langle\dfrac{\pi}{2};$

$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-1-4\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma.$

Доказать, что $\alpha+\beta+\gamma=\pi.$

4.102 Дано: $\dfrac{5\pi}{6}\langle\alpha\langle\dfrac{11\pi}{6},\ \sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2}{5}.$

Найти $\cos\alpha.$ Ответ: $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{7}+2\right)}{10}.$

Вычислить:

4.103 $\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 60^\circ\cdot\cos 80^\circ.$ Ответ: $\dfrac{1}{16}.$

4.104 $\cos\dfrac{\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{7}.$ Ответ: $\dfrac{1}{8}.$

4.105 Дано: $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=2{,}2.$ Доказать, что $\cos 2\alpha=0{,}6.$

4.106 Доказать, что $ctg\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$

4.107 $ctg\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$

Дано: **4.108** $540^\circ\langle\alpha\langle 630^\circ.\ tg\alpha=\frac{3}{4}$. Найти $tg\frac{\alpha}{4}$. Ответ: $\frac{1-\sqrt{10}}{3}$.

4.109 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{2},\quad 0\langle\alpha\langle\frac{\pi}{4}$. Найти $tg\frac{\alpha}{2}$. Ответ: $\frac{\sqrt{7}-2}{3}$.

Представить в виде произведения:

4.110 $\sin 16^\circ+\sin 40^\circ$. Ответ: $2\cdot\sin 28^\circ\cdot\cos 12^\circ$.

4.111 $\sin 20^\circ-\sin 40^\circ$. Ответ: $-\sqrt{3}\cdot\sin 10^\circ$.

4.112 $\cos 20^\circ-\cos 30^\circ$. Ответ: $2\cdot\sin 25^\circ\cdot\sin 5^\circ$.

4.113 $\cos 15^\circ+\cos 45^\circ$. Ответ: $\sqrt{3}\cdot\cos 15^\circ$.

4.114 $tg2x+tgx$. Ответ: $\frac{\sin 3x}{\cos x\cdot\cos 2x}$.

4.115 $tg3x-tgx$. Ответ: $\frac{\sin 2x}{\cos 3x\cdot\cos x}$.

4.116 $\cos 18^\circ-\sin 22^\circ$. Ответ: $2\sin 25^\circ\cdot\cos 47^\circ$.

4.117 $\cos 50^\circ+\sin 80^\circ$. Ответ: $\sqrt{3}\cdot\cos^\circ$.

4.118 $\cos\alpha+\sin\alpha$. Ответ: $\sqrt{2}\cdot\cos(\alpha-45^\circ)$.

4.119 $tg4x+ctg2x$. Ответ: $\frac{ctg2x}{\cos 4x}$.

4.120 $\sin^2 x-\sin^2 y$. Ответ: $\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)$.

4.121 $1+2\cos x$. Ответ: $4\cos(30^\circ+0{,}5x)\cdot\cos 30^\circ-0{,}5x$.

4.122 $\cos 2\alpha-\cos 4\alpha-\cos 6\alpha+\cos 8\alpha$. Ответ: $-4\cos 5x\cdot\sin 2x\cdot\sin x$.

4.123 $3-\sqrt{3}\cdot ctg2x$. Ответ: $\frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sin(2x-30^\circ)}{\sin 2x}$.

4.124 $\frac{4\sin^2 5x-3}{4\cos^2 5x-1}$. Ответ: -1.

Некоторые сведения об обратных тригонометрические функциях

Пусть существует функция $y=f(x)$ с областью определения X и множеством значений Y.

Если выразить x через y, то есть $x=\varphi(y)$ и в этой формуле поменять местами область определения и множество значений, то получим функцию $y=\varphi(x)$, которая называется обратной к данной функции $y=f(x)$.

Функция, обратная к функции $y=\sin x$, называется арксинус, $y=\arcsin x$.

Функция, обратная к функции $y=\cos x$, называется арккосинус, $y=\arccos x$.

Функция, обратная к функции $y=tgx$, называется арктангенс, $y=arctgx$.

Функция, обратная к функции $y=ctgx$, называется арккотангенсом, $y=arcctgx$.

Некоторые важные свойства обратных тригонометрических функций:

$\sin(\arcsin x) = x$ і $\cos(\arccos x) = x$ при $-1 \le x \le 1$;

$tg\,(arctgx\;) = x$ і $ctg\,(arcctgx\;) = x$ при $x \in R$;

$\arcsin\,(\sin x) = x$ при $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$;

$\arccos\,(\cos x) = x$ при $0 \le x \le \pi$;

$arctg\,(tgx\;) = x$ при $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$;

$arcctg\,(ctgx\;) = x$ при $0 < x\,\pi$;

$\arcsin\,(-x) = -\arcsin\,x \quad (-1 \le x \le 1)$;

$\arccos\,(-x) = \pi - \arccos\,x \quad (-1 \le x \le 1)$;

$\arcsin\,(-x) = -\arcsin\,x \quad (-1 \le x \le 1)$;

$arctg\,(-x) = -arctgx \quad (-\infty < x < +\infty)$;

$arcctg\,(-x) = \pi - arcctgx \quad (-\infty < x < +\infty)$.

Нетрудно вывести такие формулы:

$\arcsin\,x = \arccos\,\sqrt{1-x^2}$ при $0 < x < 1$;

$\arcsin\,x = arctg\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ при $0 < x < 1$;

$\arcsin\,x = arcctg\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ при $0 < x < 1$;

$\arccos\,x = \arcsin\,\sqrt{1-x^2}$ при $0 < x < 1$;

$\arccos\,x = arctg\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arctg}\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ при $0 < x < 1$;

$\arccos\,x = arcctg\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ при $0 < x < 1$;

$arctgx = \arcsin\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ при $0 < x < +\infty$;

$arctgx = \arccos\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ при $0 < x < +\infty$;

$arctgx = arcctg\,\frac{1}{x}$ при $0 < x < +\infty$;

$arcctgx = \arcsin\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ при $0 < x < +\infty$;

$arcctgx = \arccos\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ при $0 < x < +\infty$;

$arcctgx = arctg\,\frac{1}{x}$ при $0 < x < +\infty$;

$\arcsin\,x + \arccos\,x = \frac{\pi}{2}$ при $-1 \le x \le 1$;

$arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$ при $x \in R$.

Покажем применение этих формул к решению некоторых упражнений на свойства обратных тригонометрических функций.

Вычислить: $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)-arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Решение:

Как известно $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\left(\frac{1}{2}\right);\quad arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Тогда: $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)-arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sin\left(\pi-\arccos\frac{1}{2}\right)+arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=$

$=\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$ Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Вычислить: $tg\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+arctg1\right)$.

Решение:

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2};\quad arctg1=\frac{\pi}{4};$

$tg\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+arctg1\right)=tg\left(-\frac{\pi}{3}+\pi-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=tg\frac{-4\pi+12\pi-4\pi+3\pi}{12}=$

$=tg\frac{7}{12}\pi=tg\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{tg\frac{\pi}{3}+tg\frac{\pi}{4}}{1-tg\frac{\pi}{3}\cdot tg\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)}=\frac{3+2\sqrt{3}+1}{1-3}=-\left(2+\sqrt{3}\right)$

Ответ: $-\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Доказать, что: $\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\arccos\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

Решение:

$\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\arccos\frac{1}{2}\right)=\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$ л.ч. = п.ч.

Доказать, что: $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$.

Решение:

Пускай $\arccos x=\alpha,$ тогда $x=\cos\alpha,\quad 0\le\alpha\le\pi.$

С основной тригонометрической тождественности $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, имеем

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha;\quad \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha};$

$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$. Л.ч. = п.ч.

Доказать: $ctg(\arccos)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение:

Пускай $\arccos x=\alpha,$ тогда $x=\cos\alpha.$ Поскольку $ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, а

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha},$ то

$\sin\alpha=\sqrt{1-x^2}$. Таким образом, $ctg(\arccos x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, что и требовалось доказать.

Доказать, что: $\sin(arcctgx)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение:

Пускай $arcctgx=\alpha$, тогда $0<\alpha<\pi$, $x=ctg\alpha$.

Как известно $\frac{1}{\sin^2\alpha}=1+ctg^2\alpha$, $\sin^2\alpha=\frac{1}{1+ctg^2\alpha}$,

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$. $\sin(arcctgx)=\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Что и требовалось доказать.

Вычислить: $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Решение:

$$\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\cos\left(-\arcsin\frac{1}{3}\right)=\cos\left(\underbrace{\arcsin\frac{1}{3}}_{\alpha}\right)=\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=$$

$$=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}.$$ Відповідь: $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}$.

Вычислить: $tg\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$.

Решение:

$$tg\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)=tg\left(\pi-\arccos\frac{1}{4}\right)=-tg\left(\underbrace{\arccos\frac{1}{4}}_{\alpha}\right)=-tg\alpha=-\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{1-\frac{1}{4}^2}}{\frac{1}{4}}=$$

$$=-\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}}=-\sqrt{15}.$$ Відповідь: $-\sqrt{15}$.

Вычислить:

Решение:

$$\sin(arctg(-2))=\sin(\pi-arctg2)=\sin\left(\underbrace{arctg2}_{\alpha}\right)=\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Вычислить: $\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{12}{13}\right)$.

Решение:

$$\sin\left(\underbrace{\arcsin\frac{5}{13}}_{\alpha}+\underbrace{\arcsin\frac{12}{13}}_{\beta}\right)=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13}+\frac{12}{13}\cdot\frac{12}{13}=\frac{25+144}{169}=1$$

$-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2},\quad \sin\alpha=\frac{5}{13}.$ $\quad -\frac{\pi}{2}\le\beta\le\frac{\pi}{2},\quad \sin\beta=\frac{12}{13}.$

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13};$

$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}.$ Ответ: 1.

Вычислить: $tg\left(arctg\frac{1}{2}-arctg\frac{1}{4}\right).$

Решение:

$$tg\left(\underbrace{arctg\frac{1}{2}}_{\alpha}-\underbrace{arctg\frac{1}{4}}_{\beta}\right)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}=$$

$arctg\frac{1}{2}=\alpha,\quad tg\alpha=\frac{1}{2},\quad -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}.$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{1\frac{1}{8}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{9}=\frac{2}{9}.$$

$arctg\frac{1}{4}=\beta,\quad tg\beta=\frac{1}{4},\quad -\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}.$ Ответ: $\frac{2}{9}.$

Вычислить: $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{7}\right).$

Решение:

$$\sin\left(\underbrace{2\arcsin\frac{1}{7}}_{\alpha}\right)=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=$$

$\arcsin\frac{1}{7}=\alpha,\quad \sin\alpha=\frac{1}{7},\quad -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2};$

$$=2\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{8\sqrt{3}}{49}.$$

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=$

$=\sqrt{1-\frac{1}{49}}=\sqrt{\frac{48}{49}}=\frac{4\sqrt{3}}{7}.$ Ответ: $\frac{8\sqrt{3}}{49}.$

Подать $\arcsin\frac{4}{5}$ в виде арккосинуса.

Решение:

Пускай $\arcsin\frac{4}{5}=\alpha,$ тогда

$\sin\alpha=\frac{4}{5},\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.\quad \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}.$

$\alpha = \arccos\frac{3}{5}$, тогда $\arcsin\frac{4}{5} = \arccos\frac{3}{5}$. Ответ: $\arccos\frac{3}{5}$.

Выразить $\frac{\pi}{2} - \arcsin 0{,}2$ через арккосинус.

Решение:

С формулы $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ имеем: $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, тогда

$\frac{\pi}{2} - \arcsin 0{,}2 = \arccos 0{,}2$. Ответ: $\arccos 0{,}2$.

Правильно ли равенство: $\arcsin\frac{9}{41} - \arccos\frac{4}{5} = -\arcsin\frac{84}{205}$?

Решение:

$0 < \arcsin\frac{9}{41} < \frac{\pi}{2}; \quad 0 < \arccos\frac{4}{5} < \frac{\pi}{2} \left|\times(-1)\right., \quad 0 > -\arccos\frac{4}{5} > -\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < -\arccos\frac{4}{5} < 0.$

Добавим почленно неравенства одинакового содержания:

$$\begin{array}{l} 0 < \arcsin\frac{9}{41} < \frac{\pi}{2}, \\ + \\ -\frac{\pi}{2} < -\arccos\frac{4}{5} < 0. \end{array}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \arcsin\frac{9}{41} - \arccos\frac{4}{5} < \frac{\pi}{2}.$$

$0 < \arcsin\frac{8}{205} < \frac{\pi}{2} \left|\times(-1)\right. \quad 0 < -\arcsin\frac{84}{205} > -\frac{\pi}{2}; \to -\frac{\pi}{2} < -\arcsin\frac{84}{205} < 0.$

Левая и правая части исходного равенства содержатся на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. На этом промежутке функция $y = \sin x$ растет.

Вычислим синус левой части равенства:

$$\sin\left(\underbrace{\arcsin\frac{9}{41}}_{\alpha} - \underbrace{\arccos\frac{4}{5}}_{\beta}\right) = \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta =$$

$\arcsin\frac{9}{41} = \alpha, \quad \sin\alpha = \frac{9}{41}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \arccos\frac{4}{5} = \beta, \quad \cos\beta = \frac{4}{5}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{9}{41}\right)^2} = \frac{40}{41}; \quad \sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5};$

$\sin\left(-\arcsin\frac{84}{205}\right) = -\sin\left(\arcsin\frac{84}{205}\right) = -\frac{84}{205}.$

$= \frac{9}{41}\cdot\frac{4}{5} - \frac{40}{41}\cdot\frac{3}{5} = \frac{36}{205} - \frac{120}{205} = -\frac{84}{205}.$

Ответ: равенство верное.

Представить в виде арксинуса: $arctg\frac{9}{40} + \arccos\frac{4}{5}$.

Решение:

$0 < \frac{9}{40} < 1; \quad arctg0 < arctg\frac{9}{40} < arctg1, \quad 0 < arctg\frac{9}{40} < \frac{\pi}{4}.$

$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{4}{5} < 1, \quad \arccos 1 < \arccos\frac{4}{5} < \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0 < \arccos\frac{4}{5} < \frac{\pi}{4}.$

Добавим почленно неравенства:

$$\begin{array}{l} 0 < arctg\,\frac{9}{40} < \frac{\pi}{4}, \\ + \\ 0 < \arccos\frac{4}{5} < \frac{\pi}{4} \\ \hline 0 < arctg\,\frac{9}{40} + \arccos\frac{4}{5} < \frac{\pi}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} arctg\,\frac{9}{40} = \alpha, \ tg\alpha = \frac{9}{40}, \ 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}. \\ \\ \arccos\frac{4}{5} = \beta, \ \cos\beta = \frac{4}{5}, \ 0 < \beta < \frac{\pi}{4}. \end{array}$$

Как известно $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + ctg^2\alpha = 1 + \frac{1}{tg^2\alpha} = \frac{1+tg^2\alpha}{tg^2\alpha}; \quad \sin^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha};$

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{\frac{9}{40}}{\sqrt{1+\left(\frac{9}{40}\right)^2}} = \frac{9}{40}\cdot\frac{40}{41} = \frac{9}{41}.$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{9}{41}\right)^2} = \sqrt{\frac{1600}{1681}} = \frac{40}{41}.$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta = \frac{9}{41}\cdot\frac{4}{5} + \frac{40}{41}\cdot\frac{3}{5} = \frac{156}{205}.$$

$arctg\,\frac{9}{40} + \arccos\frac{4}{5} = \arcsin\frac{156}{205}.$ Ответ: $\arcsin\frac{156}{205}.$

Чему равен угол $\arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{1}{4}$. ?

Решение:

$$\begin{array}{l} 0 < \arcsin\frac{1}{3} < \frac{\pi}{2} \\ + \\ 0 < \arcsin\frac{3}{4} < \frac{\pi}{2} \\ \hline 0 < \arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{3}{4} < \pi. \end{array},$$

На промежутке $(0;\ \pi)$ функция $y = \cos x$ убывает.

Вычислим: $\cos\left(\underbrace{\arcsin\frac{1}{3}}_{\alpha} + \underbrace{\arcsin\frac{3}{4}}_{\beta}\right) = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta =$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{2\sqrt{14}-3}{12}.$$

$\arcsin\frac{1}{3} = \alpha, \quad \sin\alpha = \frac{1}{3}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$

$\arcsin\frac{3}{4} = \beta, \ \sin\beta = \frac{3}{4}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$\cos\beta = \sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Ответ: $\frac{2\sqrt{14}-3}{12}$.

Вычислить: $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$.

Решение:

$\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right) = \arcsin\left(-\sin\frac{\pi}{7}\right) = -\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right) = -\frac{\pi}{7}$. Ответ: $-\frac{\pi}{7}$.

Вычислить: $\arccos\left(\cos\frac{6}{5}\pi\right)$.

Решение:

$\arccos\left(\cos\frac{6}{5}\pi\right) = \arccos\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$.

Ответ: $\frac{\pi}{5}$.

Вычислить: $arctg\left(tg\left(-3010^\circ\right)\right)$.

Решение:

$arctg\left(tg\left(-3010^\circ\right)\right) = arctg\left(-tg\left(16\cdot 180^\circ + 130^\circ\right)\right) = arctg\left(-tg130^\circ\right) = -arctg\left(tg130^\circ\right) = -arctg\left(tg\left(130^\circ - 180^\circ\right)\right) =$
$= -arctg\left(tg\left(-50^\circ\right)\right) = -arctg\left(-tg50^\circ\right) = arctg\left(tg50^\circ\right) = 50^\circ$.

Ответ: 50°.

Задания для самостоятельной работы:

Вычислить:

4.125 $\cos\left(arcctg\left(-\sqrt{3}\right) + arctg\left(-\sqrt{3}\right) + \arcsin\frac{1}{2}\right)$. Ответ: $-0{,}5$.

4.126 $\sin\left(\arccos 0{,}6\right)$. Ответ: $0{,}8$.

4.127 $tg\left(\arcsin x\right)$. Ответ: $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

4.128 $\cos\left(arctgx\right)$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

4.129 $\cos\left(arctg\left(-\frac{3}{2}\right)\right)$. Ответ: $\frac{2}{\sqrt{13}}$.

4.130 $ctg\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$. Ответ: $-\sqrt{15}$.

4.131 $\cos\left(arcctg\left(-\frac{7}{8}\right)\right)$. Ответ: $-\frac{7\sqrt{113}}{113}$.

4.132 $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)+\arcsin\frac{4}{5}\right)$. Ответ: $\frac{63}{65}$.

4.133 $\cos\left(arcctg\frac{3}{4}+arcctg\left(-\frac{12}{5}\right)\right)$. Ответ: $-\frac{16}{65}$.

4.134 $\sin(2arctg3)$. Ответ: $\frac{3}{5}$.

4.135 $\sin\left(2arctg\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\right)$. Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{5}-\frac{3\sqrt{2}}{20}$.

4.136 $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2arcctg\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$. Ответ: $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

4.137 $tg\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$. Ответ: $\frac{4\sqrt{2}}{7}$.

4.138 $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$. Ответ: $\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

4.139 $\arcsin\left(\sin\frac{11}{10}\pi\right)$. Ответ: $-\frac{\pi}{10}$.

4.140 $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)$. Ответ: $\frac{7\pi}{18}$.

4.141 $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$. Ответ: $\frac{9\pi}{14}$.

4.142 $2arctg\frac{1}{4}+arctg\frac{7}{23}$. Ответ: $\frac{\pi}{7}$.

4.143 $\sin\left(2arctg\frac{1}{2}\right)-tg\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{12}\right)$. Ответ: $\frac{1}{5}$.

Представить: **4.144** $\arcsin\frac{4}{5}$ в виде $\arccos$. Ответ: $\arccos\frac{3}{5}$.

4.145 $\arcsin\frac{12}{13}$ в виде $arcctg$. Ответ: $arcctg\frac{5}{12}$.

4.146 $arctg\frac{4}{3}$ в виде $\arcsin$. Ответ: $\arcsin\frac{4}{5}$.

4.147 $\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{2}{3}$ через $\arcsin$. Ответ: $\arcsin\frac{2}{3}$.

Доказать: **4.148** $\frac{1}{3}arctg1+\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{2}=\frac{1}{2}arctg\sqrt{3}.$

4.149 $\arccos\frac{1}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)=\arccos\left(-\frac{13}{14}\right).$

4.150 $2arctg\frac{1}{5}+arctg\frac{1}{4}=arctg\frac{32}{43}.$