Раздел 11
Уравнения с параметрами

Много трудностей возникает при решении уравнений с параметрами. Это обусловлено многими причинами, среди них:

а) недостаточно широкое и полное определение понятия параметра;

б) отсутствие четкого определения параметра;

в) очень слабая методика решения уравнений с параметрами.

Понятие параметра возникло в технике, где оно характеризует определенное существенное свойство параметра (например, параметры ламп), площадь, явления и т.д. Затем оно "перекочевало" в другие науки, в том числе, и в математику, где оно трактуется, как другая переменная в уравнении отличающаяся от той, значение которой нужно найти.

В уравнении $\frac{3x+2}{a-1}=8,$ $\begin{matrix} x-\text{аргумент,} \\ a-\text{параметр,} \end{matrix}$ то есть, величина, которая характеризует, устанавливает допустимые значения.

Решить уравнение с параметрами - это значит найти все решения этого уравнения для определенных допустимых значений параметров.

$$\frac{3}{ax+2}-\frac{2}{3x+a}=0.$$

Решение:

Умножим обе части уравнения на выражение: $(3x+a)(ax+2)$:

$$\frac{3\cdot(3x+a)(ax+2)}{ax+2}-\frac{2\cdot(3x+a)(ax+2)}{3x+a}=0;$$

$$3(3x+a)-2(ax+2)=0.$$

Выражаем аргумент x через параметр a:

$$9x+3a-2ax-4=0;\ \ 9x-2ax=4-3a;\ \ x(9-2a)=4-3a;$$

$$x=\frac{4-3a}{9-2a}=\frac{-(3a-4)}{-(2a-9)}=\frac{3a-4}{2a-9}.$$

Легко установить, при каких значениях параметра a последнее и, естественно данное уравнение корней не имеет - приравнять знаменатель $2a-9$ к нулю, то есть $2a-9=0,\ \ 2a=9,\ \ a=4{,}5.$

Отже, при $a=4{,}5\ \ x\in\varnothing.$

На следующем этапе решения устанавливаем, при каких значениях параметра a уравнение имеет корни. Это происходит при $a\neq 4{,}5,$ тогда $2a\neq 9$ и уравнение имеет один корень $x=\frac{3a-4}{2a-9}.$ Поскольку в правой части этого равенства находится многозначный параметр a, то необходимо определить те значения этого параметра, при которых $x=\frac{3a-4}{2a-9}$ является корнем данного уравнения. Это будут те значения a, которые не превращают знаменателей исходного уравнения в ноль, то есть, при которых $ax+2\neq 0$ и $3x+a\neq 0.$

В эти неровности подставим $x=\frac{3a-4}{2a-9}$:

$ax+2=a\cdot\frac{3a-4}{2a-9}+2=\frac{3a-4a+4a-18}{2a-9}=\frac{3a^2-18}{2a-9}=\frac{3\left(a^2-6\right)}{2a-9}\neq 0;\ \frac{3\left(a^2-6\right)}{2a-9}\neq 0,$ тогда когда

$a^2-6\neq 0\quad a^2\neq 6;\ \left[\begin{array}{l} a\neq -\sqrt{6};\\ a\neq \sqrt{6}. \end{array}\right.$

Аналогично $3x+a=3\cdot\frac{3a-4}{2a-9}+a=\frac{9a-12+2a^2-9a}{2a-9}=\frac{2a^2-12}{2a-9}=\frac{2\left(a^2-6\right)}{2a-9}\neq 0$ при $a\neq\pm\sqrt{6}.$

Ответ: при $a=4{,}5; a=-\sqrt{6}; a=\sqrt{6}\quad x\in\varnothing;$ при $a\neq 4{,}5; a\neq -\sqrt{6}; a\neq\sqrt{6}\quad x=\frac{3a-4}{2a-9}.$

$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$

Решение:

В этом уравнении x - аргумент, a и b - параметры.

При условии, что $a\neq 0$ и $b\neq 0$ умножим обе части уравнения на выражение: $(x-a)\cdot(x-b)\cdot a\cdot b$:

$\frac{1\cdot(x-a)\cdot(x-b)\cdot a\cdot b}{x-a}+\frac{1\cdot(x-a)\cdot(x-b)\cdot a\cdot b}{x-b}=\frac{1\cdot(x-a)\cdot(x-b)\cdot a\cdot b}{a}+\frac{1\cdot(x-a)\cdot(x-b)\cdot a\cdot b}{b};$

$(x-b)\cdot a\cdot b-(x-a)\cdot a\cdot b=(x-a)\cdot(x-b)\cdot b+(x-a)\cdot(x-b)\cdot a;$

$xab-ab^2+xab-a^2b=x^2b-xb^2-axb+ab^2+ax^2-abx-a^2b+a^2b;$

Сгруппируем члены уравнения так, чтобы можно было из одной группы за скобки вынести x^2, с другой - x и третья группа была бы без аргумента, то есть образовать квадратное уравнение:

$\left(-x^2b-ax^2\right)+\left(xab+xab+xab+xab+xb^2+a^2x\right)-ab^2-a^2b-ab^2-a^2b=0;$

$-(a+b)\cdot x^2+\left(a^2+b^2+4ab\right)\cdot x-2ab(a+b)=0\,|\cdot(-1);$

$(a+b)\cdot x^2-\left(a^2+b^2+4ab\right)x+2ab\cdot(a+b)=0.$ *(A)*

Чтобы квадратное уравнение существовало, необходимо, чтобы его старший коэффициент был отличным от нуля, то есть $a+b\neq 0$:

1). Пускай $b=-a.$ Тогда исходное уравнение примет вид $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{a}+\frac{1}{-a};$

$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a};\ \frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=0;$

$\frac{x+a+x-a}{(x-a)\cdot(x+a)}=0;\ 2x=0;\ x=0$ – корень уравнения.

2). Пускай $a+b\neq 0$, то есть $b\neq -a,$ тогда уравнение *(A)* - квадратное:

$D=\left(a^2+b^2+4ab\right)^2-4(a+b)\cdot ab\cdot(a+b)=$

$=a^4+b^4+16a^2b^2+2a^2b^2+8a^3b+8ab^3-8ab\left(a^2+2ab+b^2\right)=$

$=a^4+b^4+16a^2b^2+2a^2b^2+8a^3b+8ab^3-8a^3b-16a^2b^2-8ab^3=$

$=a^4+b^4+2a^2b^2=\left(a^2+b^2\right)^2.$

$$x_1=\frac{a^2+b^2+4ab-\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2}}{2(a+b)}=\frac{a^2+b^2+4ab-\left|a^2+b^2\right|}{2(a+b)}=\frac{a^2+b^2+4ab-a^2-b^2}{2(a+b)}=\frac{2a-b}{a+b};$$

$$x_2=\frac{a^2+b^2+4ab+a^2+b^2}{2(a+b)}=\frac{2a^2+2b^2+4ab}{2(a+b)}=\frac{2(a+b)^2}{2(a+b)}=a+b;$$

Ответ: Если $a\neq b, b\neq 0, |b|\neq|a|,$ то $x_1=\frac{2ab}{a+b};\ x_2=a+b;$

Если $b=-a,$ то $x=0;$ Если $a=0$ либо $b=0,$ то $x\in\varnothing.$

Покажем применение уравнений с параметрами к решению, например, геометрических задач:

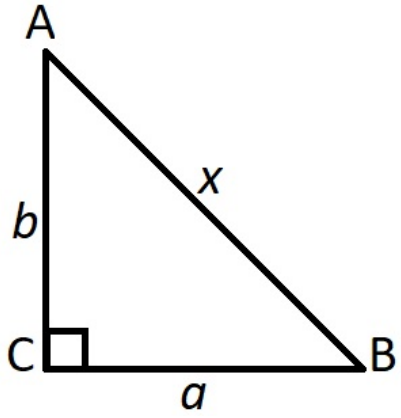
Сумма гипотенузы и одного из катетов равна m, а сумма гипотенузы и другого катета равна n.

Найти гипотенузу.

Решение:

Пускай x – гипотенуза треугольника, тогда $a\neq x=m, b+x=n.$

Отсюда $a=m-x, b=n-x.$



По теореме Пифагора имеем:

$x^2=a^2+b^2;\ x^2=(m-x)^2+(n-x)^2;$

Поскольку $a>0, b>0, x>0$ как длины отрезков, то

$m>n, n>0,\ 0<x<m,\ 0<x<n.$

Решаем образовавшееся уравнения:

$x^2=m^2-2mx+x^2+n^2-2nx+x^2;$

$x^2-2\cdot(m+n)\cdot x+\left(m^2+n^2\right)=0;$

$D=4\cdot(m+n)^2-4\cdot\left(m^2+n^2\right)=$

$=4m^2+8mn+4n^2-4m^2-4n^2=8mn.$

Так как $8mn>0,$ то уравнение имеет два корня:

$$x_1=\frac{2(m+n)-\sqrt{8mn}}{2}=\frac{2(m+n)-2\sqrt{2mn}}{2}=m+n-\sqrt{2mn};$$

$x_2=m+n+\sqrt{2mn}-$ не удовлетворяет условие задачи, потому что

$m+n+\sqrt{2mn}>m.$

Выясним, при каком условии корень $x_2>0.$

$x_2<m,\ x_2<n,$ то есть

$m+n-\sqrt{2mn}<m,$ $\qquad$ $m+n-\sqrt{2mn}<n,$

$n-\sqrt{2mn}<0,$ $\qquad$ $m-\sqrt{2mn}<0,$

$n<\sqrt{2mn},$ $\qquad$ $m<\sqrt{2mn},$

$n^2<2mn\big|:n,$ $\qquad$ $m^2<2mn\big|:m$

$n<2m\big|:2,$ $\qquad$ $m<2n\ (B);$

$\frac{n}{2}<m\ (C);$

С неравенств *(B)* и *(C)* следует неравенство $\frac{n}{2}<m<2n\Big|:n,\ \frac{1}{2}<\frac{m}{n}<2.$

Ответ: при $\frac{1}{2}<\frac{m}{n}<2$ задача имеет единственное решение $x=m+n-\sqrt{2mn}$.

$\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{2x+a-b}$.

Решение:

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим:

$x+a+2\sqrt{(x+a)\cdot(x-b)}+x-b=2x+a-b;$

$2\sqrt{(x+a)\cdot(x+b)}=0,\ \sqrt{(x+a)\cdot(x+b)}=0.$

После возведення в квадрат, имеем:

$(x+a)\cdot(x+b)=0\ \left[\begin{array}{l}x+a=0,\\x-b=0\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x_1=-a,\\x_2=b.\end{array}\right.$

Необходимо определить при которых a и b x_1 и x_2 будут корнями данного уравнения.

Подставим $-a$ и b в уравнение:

$\sqrt{-a+a}+\sqrt{-a-b}=\sqrt{-2a+a-b};\ 0+\sqrt{-a-b}=\sqrt{-a-b}.$

Левая и правая части уравнения имеют смысл при $-a-b\geq 0,\ -a\geq b\left|:(-1)\right.,$

$a\leq -b.$

Следовательно, при $a\leq -b$ $x=-a-$ корень уравнения.

$\sqrt{b+a}+\sqrt{b-b}=\sqrt{2b+a-b},\sqrt{b+a}=\sqrt{b+a},\ b+a\geq 0,\ a\geq -b,\ x=b-$ корень уравнения.

Ответ: при $a\leq -b,\ x=-a;$ при $a\geq -b,\ x=b.$ $a^x+a^{-x}=2c.$

Решение:

$a>0, a\neq 1.\ a\in(0;1)\cup(1;+\infty),\quad c\in R.$

Это показательные уравнения, $x-$аргумент, a и $c-$параметры.

$a^x+a^{-x}=2c\left|\cdot a^2\right.,\ \left(a^x\right)^2+1=2c\cdot a^2,\ \left(a^x\right)^2-2c\cdot a^x+1=0.$

Образовалось квадратное уравнение относительно a^x. Обозначим $a^x=t.$

$t^2-2ct+1=0;\ D=(-2c)^2-4\cdot 1=4\cdot\left(c^2-1\right)\geq 0.$

Уравнение имеет корни:

$t_1=\frac{2c-\sqrt{4(c^2-1)}}{2}=c-\sqrt{c^2-1}$ и $t_2=c+\sqrt{c^2-1}.$

Учитывая подстановку, имеем совокупность уравнений:

$\left[\begin{array}{l}a^x=c-\sqrt{c^2-1},\\a^x=c+\sqrt{c^2-1}.\end{array}\right.$

Выясним, при каких значениях параметра C совокупность, а также исходное уравнение имеют решения.

При $c<1$ совокупность решений не имеет.

При $c>1$ совокупность имеет два решения:

$\log_a a^x=\log_a\left(c-\sqrt{c^2-1}\right);\ x_1=\log_a\left(c-\sqrt{c^2-1}\right);$

$\log_a a^x=\log_a\left(c+\sqrt{c^2-1}\right);\ x_1=\log_a\left(c+\sqrt{c^2-1}\right);$

При $c=1$

$a^x=1-\sqrt{1^2-1};\ a^x=1;\ a^x=a^0;\ x=0;$

$a^x = 1+\sqrt{1^2-1};\ a^x = 1;\ x = 0;$

Ответ: при $c<1,\ x\in\varnothing;$ при $c>0,\ x_1 = \log_a\left(c-\sqrt{c^2-1}\right),\ x_2 = \log_a\left(c+\sqrt{c^2-1}\right),$ при $c=1,\ x=0,$

$$\frac{\log_{a^2\sqrt{x}} a}{\log_{2x} a} + \log_{ax} a\cdot\log_{\frac{1}{a}} 2x = 0.$$

Решение:

$a\in(0;1)\cup(1;+\infty).$ Сведем все логарифмы уравнения к основанию a:

$$\log_{a^2\sqrt{x}} a = \frac{\log_a a}{\log_a a^2\sqrt{x}} = \frac{1}{\log_a a^2\sqrt{3}};\ \log_{2x} a = \frac{\log_a a}{\log_a 2x} = \frac{1}{\log_a 2x};$$

$$\log_{ax} a = \frac{\log_a a}{\log_a ax} = \frac{1}{\log_a ax};\ \log_{\frac{1}{a}} 2x = \frac{\log_a 2x}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a 2x}{\log_a a^{-1}} = -\log_a 2x.$$

Тогда исходное уравнение будет иметь вид:

$$\frac{1}{\log_a a^2\sqrt{3}} : \frac{1}{\log_a ax} + \frac{1}{\log_a ax}\cdot(-\log_a 2x) = 0;$$

$$\frac{\log_a 2x}{\log_a a^2\sqrt{3}} - \frac{\log_a 2x}{\log_a ax} = 0;\ \frac{\log_a 2x}{\log_a a^2 + \log_a\sqrt{3}} - \frac{\log_a 2x}{\log_a a + \log_a x} = 0;$$

$$\frac{\log_a 2x}{2+\frac{1}{2}\log_a 3} - \frac{\log_a 2x}{1+\log_a x} = 0 \Big| \cdot\frac{1}{\log_a 2x};\ \frac{1}{2+\frac{1}{2}\log_a 3} - \frac{1}{1+\log_a x} = 0;$$

$\frac{1}{2+\frac{1}{2}\log_a 3} = \frac{1}{1+\log_a x};$ Отсюда следует, что $1+\log_a x = 2+\frac{1}{2}\log_a 3;$

$$\log_a x = 1+\frac{1}{2}\log_a 3;\ \log_a x = \log_a a + \log_a\sqrt{3};\ \log_a x = \log_a a\sqrt{3},\ x = a\sqrt{3}.$$

Ответ: при $a=(0;1)\cup(1;\infty),\ x = a\sqrt{3}.$

$\sin(x-\alpha)-\sin x = \sin\alpha;$

Решение:

$$\sin(x-\alpha)-\sin x-\sin\alpha = 0;\ \sin\alpha\cdot\frac{x-\alpha}{2} - (\sin x+\sin\alpha) = 0;$$

$$2\sin\frac{x-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{x-\alpha}{2} - 2\sin\frac{x+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{x-\alpha}{2} = 0;$$

$$2\cos\frac{x-\alpha}{2}\cdot\left(\sin\frac{x-\alpha}{2} - \sin\frac{x+\alpha}{2}\right) = 0;$$

$$2\cos\frac{x-\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\frac{x-\alpha}{2}+\frac{x+\alpha}{2}}{2}\cdot\sin\frac{\frac{x-\alpha}{2}+\frac{x+\alpha}{2}}{2} = 0;$$

$$4\cdot\cos\frac{x-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = 0;\ -4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{x-\alpha}{2} = 0;\ -4\neq 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{\alpha}{2}=0,\\ \cos\dfrac{\alpha}{2}=0,\\ \cos\dfrac{x-\alpha}{2}=0.\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\dfrac{\alpha}{2}=k\pi,\\ \dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\\ \dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n.\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\alpha=2k\pi,\\ \alpha=\pi+2k\pi,\\ x=\pi+2k\pi+\alpha\end{array}\right. \quad x=\alpha+\pi(2k+1).$$

Ответ: при $\alpha=0 \quad x=(2k+1)\cdot\pi,$ при $\alpha\neq 0 \quad x=\alpha+(2k+1)\cdot\pi,\ k\in Z.$

$$a\sin x-b\cos\frac{x}{2}=0.$$

Решение:

$$a2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-b\cos\frac{x}{2}=0;\ \cos\frac{x}{2}\left(2a\sin\frac{x}{2}-b\right)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{x}{2}=0,\\ 2a\sin\dfrac{x}{2}-b=0\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\\ \dfrac{x}{2}=(-1)^n\arcsin\dfrac{b}{2a}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x=\pi+2\pi n,\\ x=2\cdot(-1)^n\arcsin\dfrac{b}{2a}+2\pi n.\end{array}\right.$$

Если $\left|\dfrac{b}{2a}\right|\le 1,$ то есть $|b|\le 2|a|,$ то $x=(-1)^n\cdot 2\arcsin\dfrac{b}{2a}+2\pi n.$

Если $\left|\dfrac{b}{2a}\right|>0,$ то $x\in\varnothing.$

Ответ: если $a\neq 0$ и $|b|\le 2a,$ то $x=(2n+1)\pi$ и $x=(-1)^n 2\arcsin\dfrac{b}{2a}+2\pi n.$

Поступающим в вузы нередко предлагаются уравнения с параметрами, которые трудно решить вышеупомянутым способом. Здесь на помощь может прийти следующий способ: параметр считать аргументом, а переменную считать коэффициентом.

Например: $\dfrac{1}{2n+nx}-\dfrac{1}{2x-x^2}=\dfrac{2(n+3)}{x^3-4x}.$

Решение:

Параметр n считаем переменной, а переменную $x-$ коэффициентом.

Данное уравнение перепишем так:

$$\frac{1}{n(2+x)}-\frac{2(n+3)}{x(x^2-4)}=\frac{1}{2x-x^2};\ \ \frac{1}{n(x+2)}-\frac{2(n+3)}{x(x-2)(x+2)}=\frac{1}{2x-x^2};$$

ОДЗ: $x\neq 0,\ x\neq 2,\ x\neq -2.$

$$\frac{x(x-2)-2n(n+3)}{nx(x-2)(x+2)}=\frac{1}{2x-x^2};$$

Воспользуемся основным свойством пропорции:

$$x(x-2)(2x-x^2)-2n(n+3)(2x-x^2)=nx(x-2)(x+2);$$
$$x(x-2)(2x-x^2)=nx(x-2)(x+2)+2n(n+3)(2x-x^2);$$
$$x(x-2)x(2-x)=nx(x^2-4)+2nx(n+3)(2-x);$$
$$-x^2(x-2)^2=nx(x^2-4)-2nx(n+3)(x-2);$$
$$-x^2(x-2)^2=nx^3-4nx+(-2n^2x-6nx)(x-2);$$
$$-x^2(x-2)^2=nx^3-4nx-2n^2x^2+4n^2x+6nx^2-12nx;$$

$$-x^2(x-2)^2 = nx^3 + 6nx^2 - 2n^2x^2 - 16nx + 4n^2x;$$
$$-x^2(x-2)^2 = nx^3 + 6nx^2 - 16nx + 4n^2x - 2n^2x^2;$$
$$-x^2(x-2)^2 = (4n^2x - 2n^2x^2) + nx^3 + 6nx^2 - 16nx;$$
$$-x^2(x-2)^2 = 2(2x - x^2)n^2 + (x^3 + 6x^2 - 16x)n;$$
$$2(2x - x^2)n^2 + (x^3 + 6x^2 - 16x)n + x^2(x-2)^2 = 0.$$

Образовалось квадратное уравнение относительно n.

$$D = (x^3 + 6x^2 - 16x)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2x - x^2) \cdot x^2(x-2)^2 =$$
$$= x^6 + 36x^4 + 256x^2 + 12x^5 - 32x^4 - 192x^3 - (16x^3 + 8x^4)(x^2 - 4x + 4) =$$
$$= x^6 + 4x^4 + 12x^5 - 192x^3 + 256x^2 - 16x^5 + 64x^4 - 64x^3 - 8x^6 + 32x^5 - 32x^4 =$$
$$= -7x^6 + 28x^5 + 36x^4 - 256x^3 + 256x^2 = x^2(-7x^4 - 64x^3 + 36x^2 - 256x + 256).$$

$$\frac{1}{n(x+2)} - \frac{1}{x(2-x)} - \frac{2(n+3)}{x(x-2)(x+2)} = 0;$$
$$\frac{x(x-2) + n(x+2) - 2n(n+3)}{nx(x+2)(x-2)} = 0;$$
$$\begin{cases} x^2 - 2x + nx + 2n - 2n^2 - 6n = 0, \\ nx(x+2)(x-2) \neq 0 \end{cases} \quad -2n^2 + (x-4)n + x^2 - 2x = 0;$$
$$x^2 + (n-2)x - 2n^2 - 4n = 0.$$
$$D = (n-2)^2 - 4(-2n^2 - 4n) = n^2 - 4n + 4 + 8n^2 + 16n = 9n^2 + 12n + 4 = (3n+2)^2;$$
$$x_1 = \frac{2 - n - (3n+2)}{2} = \frac{2 - n - 3n - 2}{2} = \frac{-4n}{2} = -2n;$$
$$x_2 = \frac{2 - n + 3n + 2}{2} = \frac{2n + 4}{2} = n + 2.$$

Ответ:
$x \neq 0, -2n \neq 0, n \neq 0, x_1 = -2n; x_2 = n + 2;$
$x + 2 \neq 0, -2n + 2 \neq 0, n \neq 1, x_1 = -2n; x_2 = n + 2;$
$2 - x \neq 0, 2 + 2n \neq 0, n \neq -1, x_1 = -2n; x_2 = n + 2;$
$n = 0, x \in \varnothing.$

Немало уравнений с параметрами предлагается поступающим в ВУЗы, которые очень трудно решить традиционным способом. Работу значительно облегчает прием, который заключается в том, что параметр считают неизвестной переменной, а неизвестное - коэффициентом. Этот прием особенно рациональный тогда, когда степень уравнения выше двух.

$$x^4 - 2mx^2 - x + m^2 - m = 0.$$

Решение:

Это уравнение четвертой степени. Применим данный прием:

$$x^4 - 2mx^2 - m - x + m^2 = 0;$$
$$x^4 - (2x^2 + 1)m - x + m^2 = 0;$$

Перепишем это уравнение как квадратное относительно m:

$$m^2 - (2x^2 + 1)m + x^4 - x = 0;$$
$$D = (2x^2 + 1)^2 - 4 \cdot 1(x^4 - x) = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^4 + 4x = 4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2;$$
$$m_1 = \frac{2x^2 + 1 - (2x+1)}{2} = \frac{2x^2 + 1 - 2x - 1}{2} = \frac{2x^2 - 2x}{2} = x^2 - x;$$

$m_2 = x^2 + x + 1$. Рассмотрим такую совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x = m, \\ x^2 + x + 1 = m \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - x - m = 0, \quad D = 1 + 4m, \\ x^2 + x + 1 - m = 0 \quad D = 1 - 4 + 4m = 4m - 3. \end{array}\right.$$

$x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4m}}{2}$; $1 + 4m \geq 0,\ 4m \geq -1,\ m \geq -\dfrac{1}{4}$;

$x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4m}}{2}$; при $m \geq -\dfrac{1}{4}$;

$x_3 = \dfrac{-1 - \sqrt{4m - 3}}{2}$; при $4m - 3 \geq 0, 4m \geq 3, m \geq \dfrac{3}{4}$;

$x_4 = \dfrac{-1 + \sqrt{4m - 3}}{2}$; при $m \geq \dfrac{3}{4}$.

Ответ: при $m \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{4}\right)$ $x \in \varnothing$; при $m = -\dfrac{1}{4}$, $x = \dfrac{1}{2}$; при

$a \in \left(\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$ $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$; $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2}$; при $m = \dfrac{3}{4}$, $x = -\dfrac{1}{2}$;

при $m \in \left(-\dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{4}\right)$ $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4m}}{2}$.

В некоторых уравнениях целесообразно самим вводить параметр, чтобы облегчить процесс решения:

$\left(x^2 - 1\right)^2 + \left(\sqrt{3} + 1\right) \cdot \left(4x - \sqrt{3} - 1\right) = 0.$

Решение:

Преобразуем выражение в третьих скобках:

$4x - \sqrt{3} - 1 = 4x - \left(\sqrt{3} + 1\right)$. Тогда уравнение будет иметь вид:

$\left(x^2 - 1\right)^2 + \left(\sqrt{3} + 1\right) \cdot \left(4x - \left(\sqrt{3} + 1\right)\right) = 0.$

Введем параметр $t = \sqrt{3} + 1$.

$\left(x^2 - 1\right)^2 + t \cdot (4x - t) = 0;$ Это уравнение четвертой степени относительно переменной x.

Его целесообразно решать предыдущим способом: t рассматривать как переменную, а x как коэффициент.

$t \cdot (4x - t) + \left(x^2 - 1\right)^2 = 0;$

$4tx - t^2 + \left(x^2 - 1\right)^2 = 0 \,|\cdot (-1)$

$t^2 - 4xt - \left(x^2 - 1\right)^2 = 0;$

$D = (-4x)^2 + 4 \cdot 1 \cdot \left(x^2 - 1\right)^2 = 16x^2 + 4x^4 - 8x^2 + 4 = 4x^4 + 16x^2 + 4 = 4 \cdot \left(x^4 + 4x^2 + 1\right) = 4 \cdot \left(x^2 + 1\right)^2;$

$t_1 = \dfrac{4x - \sqrt{4\left(x^2 + 1\right)^2}}{2} = \dfrac{4x - 2\left(x^2 + 1\right)}{2} = 2x - \left(x^2 + 1\right);$

$t_2 = 2x + \left(x^2 + 1\right).$

Рассмотрим совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 2x - x^2 - 1 = t, \\ 2x + x^2 + 1 = t \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} -x^2 + 2x - 1 - t = 0 \,|\cdot (-1), \\ x^2 + 2x + 1 - t = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 + t = 0, \\ x^2 + 2x + 1 - t = 0. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $t=\sqrt{3}+1,$ имеем новую совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-2x+1+\sqrt{3}+1=0, \\ x^2+2x+1-\sqrt{3}-1=0. \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x^2-2x+\sqrt{3}+2=0, \\ x^2+2x-\sqrt{3}=0. \end{array}\right.$$

$D=(-2)^2-4\left(\sqrt{3}+2\right)=4-4\sqrt{3}-8=-4\sqrt{3}-4<0,\ x\in\varnothing.$

$D=4-4\cdot\left(-\sqrt{3}\right)=4+4\sqrt{3}=4\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)>0,$

$x_1=\dfrac{-2-\sqrt{4\left(1+\sqrt{3}\right)}}{2}=\dfrac{-2-2\sqrt{1+\sqrt{3}}}{2}=-1-\sqrt{1+\sqrt{3}};$

$x_2=-1+\sqrt{1+\sqrt{3}}.$

Ответ: $-1-\sqrt{1+\sqrt{3}};\ -1+\sqrt{1+\sqrt{3}}.$

Завдання для самостійної роботи:

$b\cdot x=0.$ Ответ: при $b\neq 0,\ x=0.$

$c\cdot x=c.$ Ответ: при $c=0,\ x\in R;$ при $c\neq 0,\ x=1.$

$x-ax=-2.$ Ответ: при $a=1,\ x\in\varnothing;$ при $a\neq 1,\ x=\dfrac{2}{a-1}.$

$\left(a^2-1\right)x=2a^2+a-3.$

Ответ: при $a=1,\ x\in R;$ при $a=-1,\ x\in\varnothing;$ при $a\neq 1,\ x=\dfrac{2a+3}{a+1}.$

$ax=x+3.$ Ответ: при $a\neq 1,\ x=\dfrac{3}{a-1};$ при $a=1,\ x\in\varnothing.$

$4+ax=3x+1.$ Ответ: при $a\neq 3,\ x=\dfrac{3}{3-a};$ при $a=3,\ x\in\varnothing.$

$\dfrac{10}{5x-m}=\dfrac{3}{mx-2}.$

Ответ: при $m=1{,}5$ і $m=\pm\sqrt{10}\ \ x\in\varnothing;$ при $m\neq 1{,}5$ и $m\neq\pm\sqrt{10}\ \ x=\dfrac{20-3m}{10m-15}.$

$\frac{mx-4}{3x-m}=\frac{3}{5}.$

Ответ: при $m\neq 1{,}8$ і $m\neq\pm\sqrt{18}$ $x=\frac{2x-3m}{5m-9}$; при $m=1{,}8$ і $m=\pm\sqrt{18}$ $x\in\varnothing.$

$\frac{x+a}{x+b}-\frac{x+b}{x+a}+\frac{4ab}{a^2-b^2}=0.$

Ответ: при $|a|\neq|b|,\ a\neq 0,\ b\neq 0,$ то $x=-\frac{a^2+b^2}{2a};\ x=-\frac{a^2+b^2}{2b}.$

Если $a=0,\ b\neq 0,$ то $x=-2a;$ если $b=a\neq 0,$ то $x=0;$ если $b=0,$ або $a=0,$ то $x\in\varnothing.$

$\frac{1}{2n+nx}-\frac{1}{2x-x^2}=\frac{2(n+3)}{x^3-4x}.$ Ответ: при $n=0,\ x\in\varnothing.$

при $n\neq 0,\ x_1=-2n; x_2=n+2;$

при $n\neq 1,\ x_1=-2n; x_2=n+2;$

при $n\neq -1,\ x_1=-2n; x_2=n+2.$

$x^3+2ax^2+\mathrm{a}^2x+a-1=0.$

Ответ: при $a\in(-3;1)$ $x\in\varnothing;$ при $a=-3$ и $a=1$ $x=\frac{-1-a}{2};$ при $a\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$ $x=-1-a\pm\sqrt{a^2+2a-3}.$

$a=\frac{1}{a}+\frac{a-1}{a(x-1)}.$

Ответ: при $a\neq\pm 1$ і $a\neq 0$ $x=\frac{a+2}{a+1};$ при $a=1$ $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty);$ при $a=-1$ и $a=0$ $x\in\varnothing.$

$\frac{2(a+1)x}{a}=\frac{7}{a}+3(x+1).$ Ответ: при $a\neq 2$ і $a\neq 0$ $x=\frac{7+3a}{2-a};$ при $a=0$ і $a=2$ $x\in\varnothing.$

$\frac{a+3}{a+2}=\frac{2}{x}-\frac{5}{(a+2)x}.$

Ответ: при $a\neq -3$ і $a\neq -2$ и $a\neq 0{,}5$ $x=\frac{2a-1}{a+3};$ при $a=-3,\ a=-2,\ a=0{,}5$ $x\in\varnothing.$

$\frac{1+x}{1-x}=\frac{a}{c}$. Ответ: при $a+c\neq 0$ і $c\neq 0$ $x=\frac{a-c}{a+c}$; при $a=-c,\ c=0$ $x\in\varnothing$.

$\frac{5}{ax-4}=\frac{1}{9x-a}$. Ответ: $x=\frac{5a-4}{45-a}$ при $a\pm 45$ и $a\neq\pm 6$; при $a=4{,}5$ і $a=\pm 6$ $x\in\varnothing$.

$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-6}=1+\frac{1}{6}$.

Ответ: $x_1=b+1,\ x_2=\frac{2b}{b+1}$ при $b\neq -1,\ b\neq 0,\ b\neq 1;$ $x\in\varnothing$ при $b=0$.

$\frac{1}{2n+nx}-\frac{1}{2x-x^2}=\frac{2(n+3)}{x^3-4x}$.

Ответ:
$x\neq 0, -2n\neq 0, n\neq 0, x_1=-2n; x_2=n+2;$
$x+2\neq 0, -2n+2\neq 0, n\neq 1, x_1=-2n; x_2=n+2;$
$2-x\neq 0, 2+2n\neq 0, n\neq -1, x_1=-2n; x_2=n+2;$
$n=0, x\in\varnothing.$