Розділ 10
Рівняння з модулями

$2\cdot|x-4|-6=0.$

Розв'язання:

$2\cdot|x-4|=6;\quad |x-4|=\frac{6}{2};\quad |x-4|=3.$

Це рівняння рівносильне такій сукупності:

$\left[\begin{array}{l}x-4=3,\\ x-4=-3\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x=3+4,\\ x=-3+4\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x=7,\\ x=1\end{array}\right.$

Відповідь: $1;\ 7.$

$|2x+1|+4=0.$

Розв'язання:

$|2x+1|=-4.$ За властивостями модуля це рівняння не має коренів.

Відповідь: $\varnothing.$

$\big|3|2x-1|-2\big|-6=0.$

Розв'язання:

$\big|3|2x-1|-2\big|=6.$

Це рівняння рівносильне такій сукупності рівнянь:

$\left[\begin{array}{l}\big|3|2x-1|-2\big|=6,\\ \big|3|2x-1|-2\big|=-6\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}3|2x-1|=6+2,\\ 3|2x-1|=-6+2\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}3|2x-1|=8,\\ 3|2x-1|=-4\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}|2x-1|=\frac{8}{3},\ \left[\begin{array}{l}2x-1=\frac{8}{3},\\ 2x=-\frac{8}{3}\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}2x=2\frac{2}{3}+1,\\ 2x=-2\frac{2}{3}+1\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}2x=3\frac{2}{3},\\ 2x=-1\frac{2}{3}.\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x=3\frac{2}{3}:2=\frac{11}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{6},\\ x=-1\frac{2}{3}:2=-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{5}{6}.\end{array}\right.\\ |2x-1|=-\frac{4}{3}-\text{це рівняння коренів не має.}\end{array}\right.$

Відповідь: $-\frac{5}{6};\ 1\frac{5}{6}.$

$3\cdot|x-5|+2c=8.$

Розв'язання:

Якщо в лінійному рівнянні знак модуля зустрічається тільки один раз, то його доцільно розв'язувати нижче запропонованим способом:

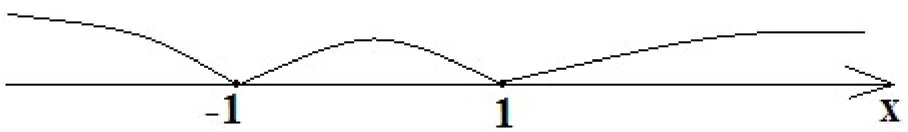
1). $|x-5|=x-5$ при $x-5\ge 0,$ тобто при $x\ge 5.$ Дане рівняння набуває вигляду: $3(x-5)+2x=8,\ 3x-15+2x=8,\ 5x-15=8,\ 5x=8+15,\ 5x=23,\ x=\frac{23}{5}=4{,}6.$ 4,6 не задовольняє умову $x\ge 5,$ а тому 4,6 – сторонній корінь.

2). $|x-5|=-(x-5)$ при $x-5<0,$ тобто при $x<5.$ $3(-(x-5))+2x=8,\ 3(5-x)+2x=8,$ $15-3x+2x=8,\ 15-x=8;\quad x=15-8=7.$ 7 – не задовольняє умову $x<5,$ тому 7 – сторонній корінь.

Відповідь: $\varnothing$.
Якщо в лінійному рівнянні знак модуля зустрічається більше одного разу, то зручно користуватися загальним методом розв'язування.
$2|x+1|-|2x-2|=9.$

Розв’язання:

Прирівнюємо до нуля підмодульні вирази і розв’яжемо утворені рівняння:
$\left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ 2x-2=0. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ 2x=2. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=1. \end{array}\right.$
Знайдені корені рівнянь позначимо на числовій прямій:



Перетворимо дане рівняння на кожному з утворених числових проміжків і розв’яжемо його. На проміжку $(-\infty;-1)$ $\;x+1<0,$ а тому $|x+1|=-(x+1);$
$2x-2<0, \quad |2x-2|=-(2x-2).$
Дане рівняння має вигляд на цьому проміжку:
$2\cdot(-(x+1))-(-(2x-2))=9, \;\; -2x-2+2x-2=9; \quad -4=9$, що неможливо, а тому на цьому проміжку рівняння коренів не має. На $[-1;1)$ $\quad x+1>0, \quad |x+1|=x+1.$
$2x-2<0, \; |2x-2|=2-2x, \; 2(x+1)-(2-2x)=9, \; 2x+2-2+2x=9, \; 4x=9;$
$x=\frac{9}{4}=2{,}25\notin[-1;1). \;\; x\in\varnothing.$
На $[1;+\infty), \; x+1>0, \; |x+1|=x+1. \;\; 2x-2\geq 0, \;\; |2x-2|=2x-2.$ Тоді
$2(x+1)-(2x-2)=9. \quad 2x+2-2x+2=9, \quad 4=9,$ що неможливо $x\in\varnothing.$
Відповідь: $\varnothing$.

$|x-4|+|x-5|=1.$

Розв’язання:

$\left[\begin{array}{l} x-4=0, \\ x-5=0. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=5. \end{array}\right.$
На $(-\infty;4)$ $\;x-4<0, \; |x-4|=4-x. \; x-5<0, \; |x-5|=5-x. \;\; 4-x+5-x=1,$
$9-2x=1. \; -2x=-8, \;\; x=4\notin(-\infty;\,4), \; x\in\varnothing.$
На $[4;5)$ $\;x-4\geq 0, \; |x-4|=x-4. \qquad x-5<0, \;\; |x-5|=5-x.$
Тоді $x-4+5-x=1, \; 0\cdot x=1-1; \; 0\cdot x=0. \; x$ – будь-яке число, тобто розв’язком рівняння є проміжок $[4;\,5)$.
На $[5;+\infty)$ $\;x-4>0, \; |x-4|=x-4. \qquad x-5>0, \;\; |x-5|=5-x, \; x-4+x-5=1,$
$2x-9=1, \; 2x=10, \; x=5\in[5;\,+\infty).$
Відповідь: $[4;\,5)\cup\{5\}=[4;\,5].$
Інколи вдається обійтися без загальних способів розв'язування рівняння. Наприклад,

$|3x+7|+|8x-1|+|x-2|+|4-5x|+20x+10=0.$

Розв'язання:

Так як при $x \geq 0$ ліва частина рівняння додатна, то вона має тільки від'ємні корені. При $x<0$ рівняння набирає вигляду:

$7-3x+1-8x+2-x+4-5x+20x+10=0,\ \ 3x+24=0,\ 3x=-24,\ x=-8.$

Відповідь: -8.

Іноді приводить до успіху використання парності функції, наприклад:

$|x-1|+|x+1|+|2x+3|+|2x-3|=30.$

Розв'язання:

Розглянемо функцію $f(x)=|x-1|+|x+1|+|2x+3|+|2x-3|-30.$ Перетворимо її на парність:

$f(x)=|-x-1|+|-x+1|+|-2x+3|+|-2x-3|-30=|-(x+1)|+|-(x-1)|+|-(2x-3)|+$
$+|-(2x+3)|-30=|x+1|+|x-1|+|2x-3|+|2x+3|-30=f(x).$

Ця функція – парна. Відомо, що ненульові корені відповідного рівняння – протилежні, а тому для розв'язання даного рівняння достатньо знайти його невід'ємні корені. Для цього розглянемо його тільки на невід'ємних проміжках: $[0;1)$; $[1;1{,}5)$ і $[1{,}5;+\infty)$. На $[0;1)$ $x-1<0,\ |x-1|=1-x.$

$x+1>0,\ |x+1|=x+1.$

$2x+3>0,\ \ |2x+3|=2x+3.$

$2x-3<0.\ \ |2x-3|=3-2x.$

Рівняння набуває вигляду:

$1-x+x+1+2x+3+3-2x=30,\ \ 8=30$ – не можливо, бо $x \in \varnothing.$

На $[1;1{,}5)$

$x-1>0,\ |x-1|=x-1.$

$x+1>0,\ |x+1|=x+1.$

$2x+3>0,\ \ |2x+3|=2x+3.$

$2x-3<0.\ \ |2x-3|=3-2x.$

$x-1+x+1+2x+3+3-2x=30,\ \ 2x+6=30,\ \ 2x=24,\ \ x=12 \notin [1;1{,}5).$ Отже, $x \in \varnothing.$

На $[1{,}5;+\infty)$

$x-1>0,\ |x-1|=x-1.$

$x+1>0,\ |x+1|=x+1.$

$2x+3>0,\ \ |2x+3|=2x+3.\ \ 2x-3>0,$

$|2x-3|=2x-3.$

$x-1+x+1+2x+3+2x-3=30,\ \ 6x=360,\ x=5.$ Число – 5.

Відповідь: $-5;\ 5.$

$x^2-6|x|+8=0.$

Розв'язання:

За властивостями модуля $x^2=|x|^2$ маємо квадратне рівняння відносно $|x|$:

$x^2 - 6|x| + 8 = 0.$ За теоремою Вієта: $|x| = 2$ і $|x| = 4.$

Звідси $x_1 = -2;\ x_2 = 2;\ x_3 = -4;\ x_4 = 4.$

Відповідь: $-4;\ -2;\ 2;\ 4.$

$$\left|\frac{2x^2 + 5x - 7}{x^2 + x + 4}\right| = \frac{5}{2}.$$

Розв’язання:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2x^2 + 5x - 7}{x^2 + x + 4} = -\dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{2x^2 + 5x - 7}{x^2 + x + 4} = \dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$$

Так як дискримінант квадратного тричлена знаменника дробу лівої частини рівняння $D = 1 - 16 = -15 < 0,$ то $x^2 + x + 4 \neq 0.$ Тобто О.Д.З=R.

Для розв'язування рівнянь сукупності використовують основну властивість пропорції:

$$\left[\begin{array}{l} 2\cdot\left(2x^2 + 5x - 7\right) = -5\left(x^2 + x + 4\right), \\ 2\cdot\left(2x^2 + 5x - 7\right) = 5\left(x^2 + x + 4\right). \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 4x^2 + 10x - 14 = -5x^2 - 5x - 20, \\ 4x^2 + 10x - 14 = 5x^2 + 5x + 20. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 9x^2 + 15x + 6 = 0, \ \ |:3 \\ -x^2 + 5x - 34 = 0. \ \ |:(-1) \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 3x^2 + 5x + 2 = 0,\ D = 25 - 24 = 1. \\ x^2 - 5x + 34 = 0.\ D = 25 - 136 = -111 < 0\ \ x \in \varnothing. \end{array}\right.$$

$$x_1 = \frac{-5-1}{6} = -1;\quad x_2 = \frac{-5+1}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Перевірка: Якщо $x = -1,$ то $\left|\dfrac{2(-1)^2 + 5(-1) - 7}{(-1)^2 - 1 + 4}\right| = \left|\dfrac{2-5-7}{1-1+4}\right| = \left|\dfrac{-10}{4}\right| = \left|-\dfrac{5}{2}\right| = \dfrac{5}{2};$

Якщо $x = -\dfrac{2}{3},$ то $\left|\dfrac{2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 5\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - 7}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} + 4}\right| = \left|\dfrac{\frac{8}{9} - \frac{10}{3} - 7}{\frac{4}{9} - \frac{2}{3} + 4}\right| = \left|\dfrac{8 - 30 - 63}{4 - 6 + 36}\right| = \left|\dfrac{-85}{34}\right| =$

$\left|-\dfrac{5}{2}\right| = \dfrac{5}{2}.$

Відповідь: $-\dfrac{2}{3};\ -1.$

$$\left(x^2 + 2x - 2\right)^2 - 4\cdot\left|x^2 + 2x - 2\right| + 3 = 0.$$

Розв’язання

$\left(x^2 + 2x - 2\right)^2 = \left|x^2 + 2x - 2\right|^2.$

$\left|x^2 + 2x - 2\right|^2 - 4\cdot\left|x^2 + 2x - 2\right| + 3 = 0.$

Введемо нову змінну $\left|x^2 + 2x - 2\right| = t.$ Тоді рівняння має вигляд:

$t^2 - 4t + 3 = 0,\ \ t_1 = 1,\ \ t_2 = 3.$

$$\left[\begin{array}{l}|x^2+2x-2|=1,\\ |x^2+2x-2|=3.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x^2+2x-2=1,\\ x^2+2x-2=-1,\\ x^2+2x-2=3,\\ x^2+2x-2=-3.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x^2+2x-3=0,\\ x^2+2x-1=0,\\ x^2+2x-5=0,\\ x^2+2x+1=0.\end{array}\right.$$

1). $x^2+2x-3=0$, $x_1=1$, $x_2=-3$.

2). $x^2+2x-1=0$, $x_3=-1-\sqrt{2}$, $x_4=-1+\sqrt{2}$.

3). $x^2+2x-5=0$, $x_5=-1-\sqrt{6}$, $x_6=-1+\sqrt{6}$.

4). $x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$, $x+1=0$, $x_7=-1$.

Відповідь: $-1-\sqrt{6};\ -1-\sqrt{2};\ -3;\ -1;\ -1+\sqrt{2};\ -1+\sqrt{6};\ 1.$

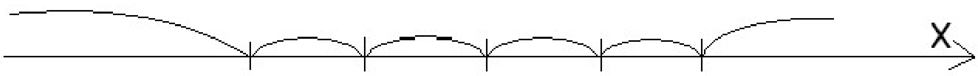
$|x^2-2x-3|+2|2x-3|-6=0.$

Розв'язання:

Скористаємось загальним методом:

$x^2-2x-3=0.\quad 2x-3=0,$

$x_1=-1;\ x_2=3.\quad 2x=3,\ x=1{,}5.$



На $(-\infty;-1]$ $x^2-2x-3\ge 0$, $|x^2-2x-3|=x^2-2x-3.$

Див. А $2x-3<0$, $|2x-3|=3-2x.$

На $(-1;1{,}5]$ $x^2-2x-3<0$, $|x^2-2x-3|=-x^2+2x+3.$

Див. В $2x-3<0.$ $|2x-3|=3-2x.$

На $(1{,}5;3]$ $x^2-2x-3<0$, $|x^2-2x-3|=-x^2+2x+3.$

Див. С $2x-3>0.$ $|2x-3|=2x-3.$

На $(3;+\infty)$ $x^2-2x-3>0$, $|x^2-2x-3|=x^2-2x-3.$

Див. D $2x-3>0.$ $|2x-3|=2x-3.$

А: $x^2-2x-3+2(3-2x)-6=0$, $x^2-2x-3+6-4x-6=0$, $x^2-6x-3=0$;

$D=36+12=48=4\cdot 12=16\cdot 3$ $x_1=\dfrac{6-4\sqrt{3}}{2}=3-2\sqrt{3};$ $x_2=3+2\sqrt{3}.$ x_1 та $x_2\notin(-\infty;-1).$ Отже, $x\in\varnothing.$

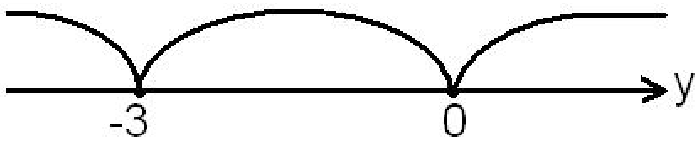
B: $-x^2+2x+3+2(3-2x)-6=0, \quad -x^2+2x+3+6-4x-6=0,$
$-x^2-2x+3=0 \,|\times(-1).$ $x^2+2x-3=0;$ $x_1=-3;$ $x_2=1.$ $-3\notin(-1;1{,}5).$
$1\in(-1;1{,}5).$ $x=1.$
C: $-x^2+2x+3+2\cdot(3-2x)-6=0,$ $-x^2+2x+3+4x-6-6=0,$ $-x^2+6x-9=0\cdot(-1),$
$x^2-6x+9=0,$ $(x-3)^2=0,$ $x=3\in(1{,}5;3].$
D: $x^2-2x-3+2\cdot(2x-3)-6=0,$ $x^2-2x-3+4x-6-6=0,$ $x^2+2x-15=0,$ $x_1=-5;$
$x_2=3.$ $-5\in(3;+\infty).$ $x\in\varnothing.$
Відповідь: 1; 3.

$|x^2-x-3|+2|x^2+2x-3|=9\cdot|x|.$

Розв'язання

Рівняння такого типу можна розв'язати способом простішим від традиційного, а саме: оскільки $x\neq 0$, то розділимо обидві частини рівняння на $|x|.$ $\left|x-1-\frac{1}{3}\right|+2\left|x+2-\frac{3}{x}\right|=9,$ (A).

Позначимо $x-1-\frac{1}{3}=y,$ тоді, додавши до обох частин останньої рівності число 3 одержимо $x-1-\frac{3}{x}+3=y+3,$ $x+2-\frac{3}{x}=y+3.$ Рівняння А набуває вигляду $|y|+2|y+3|=9.$ $y=0,$ $y+3=0,$ $y=-3$



На $(-\infty;-3)$ $y<0,$ $|y|=-y.$ $y+3<0,$ $|y+3|=-y-3.$
$-y+2\cdot(-y-3)=9,$ $-y-2y-6=9,$ $-3y=15,$ $y=-5.$
На $[-3;0)$ $y<0,$ $|y|=-y.$ $y+3>0,$ $|y+3|=y+3.$
$-y+2\cdot(y+3)=9,$ $-y+2y+6=9,$ $y=3.$ $3\notin[-3;0),$ $y\in\varnothing.$
На $[0;+\infty)$ $y>0,$ $|y|=y.$ $y+3>0,$ $|y+3|=y+3.$
$y+2\cdot(y+3)=9,$ $y+2y+6=9,$ $3y=3,$ $y=1.$ $1\notin[0;+\infty).$
Повертаємось до заміни, дістанемо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{aligned}&x-1-\frac{3}{x}=-5,\\&x-1-\frac{3}{x}=1.\end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned}&x^2-x-3+5x=0,\\&x^2-x-3-x=0.\end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned}&x^2-4x-3=0,\\&x^2-2x-3=0\end{aligned}\right.$$

1). $x^2+4x-3=0,$ $D=16+12=28=4\cdot 7.$ $x_1=\frac{-4-2\sqrt{7}}{2}=-2-\sqrt{7};$ $x_2=-2+\sqrt{7}.$
2). Корені рівняння $x^2-2x-3=0$ знайдемо за теоремою Вієта $x_3=-1,$ $x_4=3.$
Відповідь: $-2-\sqrt{7};$ $-1;$ $-2+\sqrt{7};$ $3.$

$\left|x^2-4x+7\right|+2|x-2|-6=0.$ (1)

Розв'язання

Оскільки дискримінант квадратного тричлена $x^2-4x+7 \quad D=16-28=-12<0$ і $a>1,$ то парабола, що є графіком його, повністю розміщена у верхній півплощині, тобто $x^2-4x+7>0,$ а тому $\left|x^2-4x+7\right|=x^2-4x+7$ і рівняння (1) має вигляд $x^2-4x+7+2\cdot|x-2|-6=0,$ $x^2-4x+2\cdot|x-2|-1=0 \mid +3,$
$x^2-4x+4+2\cdot|x-2|=3,$ $(x-2)^2+2\cdot(x-2)-3=0.$

За властивостями модуля $(x-2)^2=|x-2|^2.$ $|x-2|^2+2|x-2|-3=0.$

Підстановка: $|x-2|=y,$ $y^2+2y-3=0,$ $y_1=-3,$ $y_2=1.$ $|x-2|=-3,$ $x\in\varnothing.$

$|x-2|=1,$ $\left[\begin{array}{l}x-2=-1,\\ x-2=1.\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=3.\end{array}\right.$

Відповідь: 1; 3.

$\left|x^2-5x+6\right|+\left|x^2+x-12\right|=0.$

Розв'язання

Ця рівність можлива тільки тоді, коли $\left|x^2-5x+6\right|=0$ і $\left|x^2+x-12\right|=0.$

Для знаходження такого значення x розв'яжемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases}x^2-5x+6=0,\\ x^2+x-12=0\end{cases}\Rightarrow -6x+18=0,\ \ -6x=-18,\ \ x=\frac{-18}{-6},\ \ x=3.$$

Відповідь: 3.

Рівняння вищих степенів з модулями

$|x|^3+4x^2+|x|-6=0.$

Розв'язання:

Заміна $|x|=t.$ $\quad t^3+4t^2+t-6=0.$

Неважко здогадатися, що $t=1-$корінь рівняння.

$$\begin{array}{r|l}
t^3+4t^2+t-6 & t-1 \\ \cline{2-2}
-\,t^3-t^2 & t^2+5t+6 \\ \cline{1-1}
5t^2+t & \\
-\,5t^2-5t & \\ \cline{1-1}
6t-6 & \\
-\,6t-6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$t^2+5t+6=0.$ За теоремою Вієта: $t_2=-2,$ $t_3=-3.$

$\left[\begin{array}{l}|x|=1,\\ |x|=-2,\\ |x|=-3.\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x_1=-1,\ \ x_2=1.\\ x\in\varnothing,\\ x\in\varnothing\end{array}\right.$

Відповідь: $-1;\ 1.$

$x^4+4|x|^3-7x^2-22|x|+24=0.$

Розв'язання:

Підстановка: $|x|=t.$

$t^4+4t^3-7t^2-22t+24=0.$

Дільники вільного члена: $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm4;\ \pm6;\ \pm8;\ \pm12;\ \pm24.$

Перевіримо одиницю:

$1^4+4\cdot1^3-7\cdot1^2-22\cdot1+24=1+4-7-22+24=0.$

1 – один з коренів рівняння.

$$
\begin{array}{l|l}
-\,t^4+4t^3-7t^2-22t+24 & t-1 \\ \cline{2-2}
\underline{t^4-t^3} & t^3+5t^2-2t-24 \\
\quad -\,5t^3-7t^2 & \\
\quad \underline{5t^3-5t^2} & \\
\qquad -2t^2-22t & \\
\qquad \underline{-2t^2+2t} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Перевіримо число 2:

$2^3+5\cdot2^2-2\cdot2-24=28-28=0.$ $t=2$ – другий корінь рівняння.

$$
\begin{array}{l|l}
-\,t^3+5t^2-2t-24 & t-2 \\ \cline{2-2}
\underline{t^3-2t^2} & t^2+7t+12 \\
\quad -\,7t^2-2t & \\
\quad \underline{7t^2-14t} & \\
\qquad -\,12t-24 & \\
\qquad \underline{12t-24} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$t^2+7t+12=0,\ t_3=-3;\ t_4=-4.$

$$
\left[
\begin{array}{ll}
|x|=1, & x_1=-1;\ x_2=1; \\
|x|=2, & x_3=-2,\ x_4=2; \\
|x|=-3, & x\in\varnothing; \\
|x|=-4 & x\in\varnothing.
\end{array}
\right.
$$

Відповідь: $-1;\ 1;\ -2;\ 2.$

Ірраціональні рівняння з модулями

$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{x^2-4x-4}.$

Розв'язання:

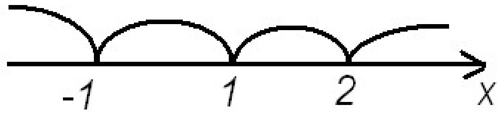
Кожний з підкореневих виразів подамо у вигляді квадрата двочлена:

$\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{(x+1)^2}=\sqrt{(x-2)^2}.$

Використовуючи тотожність $\sqrt{a^2}=|a|$, одержимо рівняння з модулями:

$|x-1|-|x+1|-|x-2|=0,\ \ |x-1|-|x+2|=|x-2.|$

$$\left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ x+1=0, \\ x-2=0. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-1, \\ x=2. \end{array}\right.$$



На $(-\infty;\ -1)$ $\begin{array}{ll} x-1<0, & |x-1|=1-x, \\ x+1<0, & |x+1|=-x-1, \\ x-2<0, & |x-2|=2-x. \end{array}$

$1-x-(-x-1)-(2-x)=0,\ 1-x+x+1-2+x=0,\ \ x=0\notin(-\infty;\ -1).\ \ x\in\varnothing.$

На $[-1;\ 1)$ $\begin{array}{ll} x-1<0, & |x-1|=1-x, \\ x+1>0, & |x+1|=x+1, \\ x-2<0, & |x-2|=2-x. \end{array}$

$1-x-(x+1)-(2-x)=0,\ 1-x-x-1-2+x=0,\ \ -x=2,\ \ x=-2\notin[-1;\ 1);\ \ x\in\varnothing.$

На $[1;\ 2)$ $\begin{array}{ll} x-1>0, & |x-1|=1-x, \\ x+1>0, & |x+1|=x+1, \\ x-2<0, & |x-2|=2-x. \end{array}$

$x-1-x-x-2+x=0,\ \ \ x=4\notin[1;\ 2).\ \ x\in\varnothing.$

На $[2;\ +\infty)$ $\begin{array}{ll} x-1>0, & |x-1|=x-1, \\ x+1>0, & |x+1|=x+1, \\ x-2>0, & |x-2|=x-2. \end{array}$

$x-1-x-1-x+2=0,\ \ \ x=0\notin[2;\ +\infty).\ \ x\in\varnothing.$

Відповідь: $\varnothing$.

$2\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x+4-3\sqrt{2x-1}}=\sqrt{32}.$

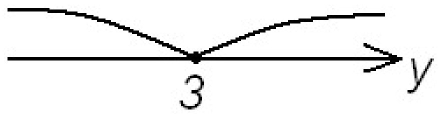
Розв'язання:

Виконаємо підстановку $\sqrt{2x-1}=y,\ \ y\geq 0.\ \left(\sqrt{2x-1}\right)^2=y^2,\ \ 2x-1=y^2,\ \ 2x=y^2+1,$ $x=\dfrac{y^2+1}{2}$. Тоді $\ 2\sqrt{\dfrac{y^2+1}{2}+y}+\sqrt{\dfrac{y^2+1}{2}+4-3y}=\sqrt{32},$

$2\dfrac{\sqrt{y^2+2y+1}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{y^2-6y+9}}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}|\cdot\sqrt{2};\ \ \ 2\sqrt{(y+1)^2}+\sqrt{(y-3)^2}=8;\ \ \ 2|y+1|+|y-3|=8.$

Так як $y\geq 0$, то $y+1\geq 0$. Тоді рівняння набуває вигляду $2(y+1)+|y-3|=8.$

$y-3=0,\ \ y=3.$



На $(-\infty;\ 3)$ $\ y-3<0,\ \ |y-3|=3-y.\ \ 2y+2+3-y=8,\ \ y=3.\ \ x=\dfrac{3^2+1}{2}=\dfrac{9+1}{2}=\dfrac{10}{2}=5.$

Відповідь: 5.

$$\frac{\sqrt[3]{|x|+2}}{2}+\frac{\sqrt[3]{|x|+2}}{|x|}=\sqrt[3]{|x|}.$$

Розв’язання:

Заміна $|x|=t,\ t>0.$

$\dfrac{\sqrt[3]{t+2}}{2}+\dfrac{\sqrt[3]{t+2}}{t}=\sqrt[3]{t};\ \ \sqrt[3]{t+2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{t}\right)=\sqrt[3]{t},\ \ \sqrt[3]{t+2}\cdot\dfrac{t+2}{2t}=\sqrt[3]{t}.$

При піднесенні обох частин рівняння до куба дістанемо:

$t+2\cdot\dfrac{(t+2)^3}{(2t)^3}=t;\ \ \dfrac{(t+2)^4}{8t^3}=t;\ \ (t+2)^4=8t^4.$ Добуваємо корінь 4$^{\text{го}}$ степеня:

$$t+2=\pm t\sqrt[4]{8},\quad \left[\begin{array}{l}t+2=-t\sqrt[4]{8},\\ t+2=t\sqrt[4]{8},\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}t+t\sqrt[4]{8}=-2,\\ t-t\sqrt[4]{8}=-2.\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}t\cdot\left(1+\sqrt[4]{8}\right)=-2,\\ t\cdot\left(1-\sqrt[4]{8}\right)=-2,\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}t_1=-\dfrac{2}{1+\sqrt[4]{8}},\\ t_2=\dfrac{2}{1-\sqrt[4]{8}},\end{array}\right.$$

$\left[\begin{array}{l}t_1=-\dfrac{2}{1+\sqrt[4]{8}}<0,\\ t_2=\dfrac{2}{1-\sqrt[4]{8}}>0.\end{array}\right.$ $\ t_1$ – не задовольняє умову $t>0.$ Отже $|x|=\dfrac{2}{\sqrt[4]{8}-1};\ \ x_1=-\dfrac{2}{\sqrt[4]{8}-1};$

$x_2=\dfrac{2}{\sqrt[4]{8}-1}.$

Відповідь: $x_1=-\dfrac{2}{\sqrt[4]{8}-1};\quad x_2=\dfrac{2}{\sqrt[4]{8}-1}.$

$$2x^2-2x-6+\sqrt{\left|6+x-x^2\right|}=0.$$

Розв’язання:

$\left|6+x-x^2\right|=\left|-\left(x^2-x-6\right)\right|=\left|x^2-x-6\right|$ (властивість модуля).

Тоді рівняння матиме вигляд:

$2x^2-2x-6+\sqrt{\left|x^2-x-6\right|}=0.\ \ x^2-x-6=0;\ \ x_1=-2;\ \ x_2=3.$

$x^2-x-6=(x+2)\cdot(x-3).\ \ 2x^2-2x-6+\sqrt{\left|(x+2)\cdot(x-3)\right|}=0.$

Розглянемо це рівняння на проміжках:

На $(-\infty;-2)$: $\begin{matrix} x+2<0, \\ x-3<0. \end{matrix}$ $(x+2)(x-3)>0$. $|(x+2)(x-3)|=(x+2)(x-3)$.

$2x^2-2x-6+\sqrt{x^2-x-6}=0$; $2(x^2-x)-6+\sqrt{x^2-x-6}=0$.

Позначимо $\sqrt{x^2-x-6}=t$, тоді $x^2-x-6=t^2$, $x^2-x=t^2+6$. $2\cdot(t^2+6)-6+t=0$,

$2t^2+12-6+t=0$, $2t^2+t+6=0$, $D=1-4\cdot 2\cdot 6=1-45=-47<0$, $t\in\varnothing$.

На $[-2;3)$: $\begin{matrix} x+2>0, \\ x-3<0. \end{matrix}$ $(x+2)(x-3)<0$. $|x^2-x-6|=6+x-x^2$,

$2(x^2-x)-6+\sqrt{6+x-x^2}=0$.

Заміна $\sqrt{6+x-x^2}=y$, $y\ge 0$, $-x^2+x+6=y^2, |\times(-1)$, $x^2-x-6=-y^2$, $x^2-x=6-y^2$,

$2(6-y^2)-6+y=0$, $12-2y^2-6+y=0$, $-2y^2+y+6=0|\times(-1)$, $2y^2-y-6=0$.

$D=1+8\cdot 6=49$, $y_1=\dfrac{1-7}{4}=-\dfrac{6}{4}=-\dfrac{3}{2}$; $y_2=\dfrac{1+7}{4}=2$. $-\dfrac{3}{2}$ – не задовольняє умову $y\ge 0$.

Отже, $\sqrt{6+x-x^2}=2$, $6+x-x^2=4$, $-x^2+x+2=0$, $x^2-x-2=0$. $x_1=-1$,

$x_2=2\in[-2;\ 3.)$

На $[3;\ +\infty)$: $\begin{matrix} x+2>0, \\ x-3>0. \end{matrix}$ $(x+2)(x-3)>0$. $|(x+2)(x-3)|=(x+2)(x-3)$,

$2(x^2-x)-6+\sqrt{x^2-x-6}=0$, $\sqrt{x^2-x-6}=V$; $V\ge 0$. $x^2-x-6=V^2$; $x^2-x=V^2+6$;

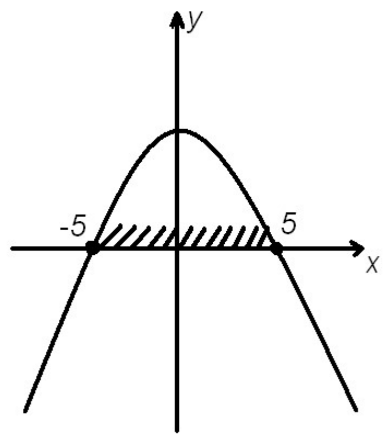
$2(V^2+6)-6+V=0$, $2V^2+V+6=0$, $D=1-48=-47<0$, $V\in\varnothing$, $x\in\varnothing$.

Відповідь: -1; 2.

$\sqrt[3]{|x+5|}-\sqrt[3]{|x-5|}=\sqrt[6]{25-x^2}$.

Розв'язання:

Знайдемо ОДЗ: $25-x^2\ge 0$, $(5-x)\cdot(5+x)\ge 0$. $x\in[-5;\ 5]$. На цьому проміжку $|x+5|=x+5$; $|x-5|=-(x-5)$.



Тоді дане рівняння набуває вигляду:

$\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[3]{-(x-5)}=\sqrt[6]{25-x^2}$; $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x-5}=\sqrt[6]{25-x^2}$;

Піднесемо обидві частини до кубу:

$x+5+3\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^2\cdot\sqrt[3]{x-5}+3\sqrt[3]{x+5}\cdot\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2+x-5=\sqrt{25-x^2}$;

$2x+\sqrt[3]{x+5}\cdot\sqrt[3]{x-5}\cdot\left(\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x-5}\right)=\sqrt{25-x^2}$;

$2x+3\sqrt[3]{x^2-25}\cdot\sqrt[6]{25-x^2}=\sqrt{25-x^2}$; $2x-3\sqrt[3]{25-x^2}\cdot\sqrt[6]{25-x^2}=\sqrt{25-x^2}$;

$2x-3\sqrt[3]{\left(25-x^2\right)^2}\cdot\sqrt[6]{25-x^2}=\sqrt{25-x^2}$; $\quad 2x-3\sqrt[6]{\left(25-x^2\right)^3}=\sqrt{25-x^2}$;

$2x-3\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-x^2}$; $2x=\sqrt{25-x^2}+3\sqrt{25-x^2}$; $\quad 2x=4\sqrt{25-x^2}\,\big|:2$; $x=2\sqrt{25-x^2}$,

$x>0$. $x^2=4\left(25-x^2\right)$, $x^2=100-4x^2$, $5x^2=100$, $\quad x^2=\frac{100}{5}$; $\quad x^2=20$; $x=\pm\sqrt{20}=\pm2\sqrt{5}$;

$-2\sqrt{5}$ – не задовольняє умову $x>0$.

Відповідь: $2\sqrt{5}$.

Показникові і логарифмічні рівняння з модулями

$2^{\left|x^2-3x+5\right|}=32.$

Розв’язання:

$2^{\left|x^2-3x+5\right|}=2^5$. В силу тотожностей показникової функції маємо:
$\left|x^2-3x+5\right|=5$. Це рівняння еквівалентне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-3x+5=-5, \\ x^2-3x+5=5. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2-3x+10=0, \quad D=9-40=-31<0,\ x\in\varnothing. \\ x^2-3x=0. \qquad x(x-3)=0,\ \left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=3. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

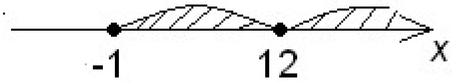
Відповідь: 0; 3.

$$16\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{\left|3-\frac{x}{4}\right|}}=2^{\sqrt{x+1}}.$$

Розв’язання:

$2^4\cdot\sqrt{\left(2^{-2}\right)^{\left|3-\frac{x}{4}\right|}}=2^{\sqrt{x+1}}$; $\ 2^4\cdot\sqrt{2^{\left|-6+\frac{x}{4}\right|}}=2^{\sqrt{x+1}}$; $\quad 2^4\cdot\sqrt{2^{-\frac{|x-12|}{2}}}=2^{\sqrt{x+1}}$; $\quad 2^4\cdot\left(2^{-\frac{|x-12|}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\sqrt{x+1}}$;

$2^4\cdot 2^{-\frac{|x-12|}{4}}=2^{\sqrt{x+1}}$; $\quad 2^{4+|x-12|}=2^{\sqrt{x+1}}$; $\quad 4-\frac{|x-12|}{4}=\sqrt{x+1}$; $\quad \begin{array}{ll} x-12=0, & x+1\ge 0, \\ x=12. & x\ge -1. \end{array}$



На $[-1;\ 12)$: $\ x-12<0,\ |x-12|=2-x$,

$4-\frac{12-x}{4}=\sqrt{x+1}\,\big|\times4$, $\quad 16-12+x=4\sqrt{x+1}$, $\ 4+x=4\sqrt{x+1}$, $\ 16+8x+x^2=16x+16$,

$x^2-8x=0$, $\ x(x-8)=0$, $\quad x_1=0$, $\ x_2=8\in[-1;\ 12)$.

На $[12;\ +\infty)$: $x-12>0$, $|x-12|=x-12$.

$4-\frac{x-12}{4}=\sqrt{x+1}\,\big|\times4$, $\ 16-x+12=4\sqrt{x+1}$, $\ 28-x=4\sqrt{x+1}$, $\ x^2-72x+708=0$,

$D=5184-3072=2112=64\cdot33$.

$x_1=\frac{72-8\sqrt{33}}{2}=36-4\sqrt{33}$, $\ x_2=36+4\sqrt{33}$ – *не задовольняє перевірку*.

Відповідь: 0; 8; $36-4\sqrt{33}$.

$$\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{14}-\sqrt{2}\right)\right)^{|x|}+\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^{|x|}=2\cdot\left(4-\sqrt{7}\right).$$

Розв'язання:

$$\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{\left(4-\sqrt{7}\right)\cdot 4}{4}}=\sqrt{\frac{16-4\sqrt{7}}{4}}=\sqrt{\frac{14-2\cdot\sqrt{7\cdot 2\sqrt{2}}+2}{4}}=$$

$$\sqrt{\frac{\left(\sqrt{14}-\sqrt{2}\right)^2}{2^2}}=\left|\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}\right|=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}\to\sqrt{14}-\sqrt{2}=2\sqrt{4-\sqrt{7}};$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^{|x|}+\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^{|x|}=2\cdot\left(4-\sqrt{7}\right);$$

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^{|x|}+\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^{|x|}=2\cdot\left(4-\sqrt{7}\right);$$

$$2\cdot\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^{|x|}=2\cdot\left(4-\sqrt{7}\right):2,$$

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^{|x|}=4-\sqrt{7};\ \left(4-\sqrt{7}\right)^{\frac{|x|}{2}}=4-\sqrt{7};$$

$$\frac{|x|}{2}=1;\ |x|=2;\ x_1=-2;\ x_2=2.$$

Відповідь: $x_1=-2;\ x_2=2.$

$$8\cdot 3^{|x+1|}-3^{2\cdot|x+1|}+9=0.$$

Розв'язання:

Заміна $3^{|x+1|}=t,$ приводить до рівняння:

$8t-t^2+9=0|\cdot(-1),\ t^2-8t-9=0.$ По теоремі Вієта $t_1=9,\ t_2=-1$ не задовольняє умову $t>0.$

$$3^{|x+1|}=9,\ 3^{|x+1|}=3^2,\ |x+1|=2\ \left[\begin{array}{l}x+1=-2,\\x+1=2.\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x=-3,\\x=1.\end{array}\right.$$

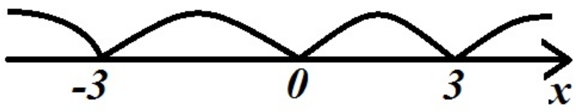
Відповідь: $-3;1.$

$$2^{|x-3|}+2^{|x+3|}-4\cdot 2^{|x|}-132=0.$$

Розв'язання:

Ліва частина цього рівняння є парною функцією. Це означає, що її корені попарно протилежні.

$$\left[\begin{array}{l}x-3=0,\\x+3=0,\\x=0\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x=3,\\x=-3,\\x=0\end{array}\right.$$



Визначимо невід'ємні корені.

Вони знаходяться на невід'ємних проміжках:

$[0;3):\ \ x-3<0,\ |x-3|=-(x-3),\ x+3>0,\ |x+3|=x+3,\ |x|=x$

Тоді рівняння набуває вигляду

$$2^{3-x}+2^{x+3}-4\cdot 2^x-132=0.$$

Аналіз лівої частини рівняння показує, що

$$2^{3-x}<8,\ 2^{x+3}<64,\ 4\cdot 2^x>4.$$

$8+64-4\neq 132,$ тобто на $[0;\ 3)$ $x\in\varnothing.$

На $[3;\ +\infty)$ $x-3>0,$ $|x-3|=x-3,$ $\begin{matrix} x+3>0, & |x+3|=x+3, \\ x>0 & |x|=x. \end{matrix}$

Рівняння має вигляд:

$2^{x-3}+2^{x+3}-4\cdot 2^{x}-132=0,$

$2^{x}\cdot\dfrac{1}{2^{3}}+2^{x}\cdot 2^{3}-4\cdot 2^{x}-132=0,$

$2^{x}\cdot\left(\dfrac{1}{8}+8-4\right)-132=0,$ $2^{x}\cdot 4\dfrac{1}{8}=132,$ $2^{x}=132:\dfrac{33}{8},$ $2^{x}=\dfrac{132}{1}\cdot\dfrac{8}{33}=32,$ $2^{x}=2^{5},$ $x=5.$

Протилежне йому число $-5-$ теж корінь.

Відповідь: $-5;\ 5.$

$\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{|x^2+x-12|}+\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{|x^2+x-12|}=10.$

Розв'язання:

Розглянемо добуток спряжених чисел

$\left(5-2\sqrt{6}\right)\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)=25-4\cdot 6=1.$ Звідси

$5+2\sqrt{6}=\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}}.$ Введемо нову змінну

$\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{|x^2+x-12|}=y,$ тоді $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{|x^2+x-12|}=\dfrac{1}{y}$ і, підставляючи в дане рівняння, дістанемо:

$y+\dfrac{1}{y}=10\,\big|\cdot y,$ $y^{2}-10y+1=0,$ $D=100-4=96.$

$y_1=\dfrac{10-\sqrt{96}}{2}=\dfrac{10-\sqrt{16\cdot 6}}{2}=\dfrac{10-4\sqrt{6}}{2}=\dfrac{2\cdot\left(5-2\sqrt{6}\right)}{2}=5-2\sqrt{6};$

$y_2=5+2\sqrt{6}.$ Враховуючи зроблену заміну, дістанемо таку сукупність рівнянь:

$\left[\begin{array}{l}\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{|x^2+x-12|}=5-2\sqrt{6},\\ \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{|x^2+x-12|}=5+2\sqrt{6}.\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\left(5-2\sqrt{6}\right)^{\frac{|x^2+x-12|}{2}}=5-2\sqrt{6},\\ \left(5-2\sqrt{6}\right)^{\frac{|x^2+x-12|}{2}}=5+2\sqrt{6}.\end{array}\right.$ $\dfrac{|x^2+x-12|}{2}=1,$ $|x^2+x-12|=2,$

$\left[\begin{array}{l}x^2+x-12=-2,\\ x^2+x-12=2.\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x^2+x-10=0,\\ x^2+x-14=0.\end{array}\right.$ $\begin{array}{l}D=1+40=41,\\ D=1+56=57\end{array}$ $\begin{array}{l}x_1=\dfrac{-1-\sqrt{41}}{2},\ \ x_2=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{2},\\ x_3=\dfrac{-1-\sqrt{57}}{2},\ \ x_4=\dfrac{-1+\sqrt{57}}{2}.\end{array}$

Так як $5+2\sqrt{6}=\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}}=\left(5-2\sqrt{6}\right)^{-1},$ то

$\left(5-2\sqrt{6}\right)^{\frac{|x^2+x-12|}{2}}=\left(5-2\sqrt{6}\right)^{-1};$ $\dfrac{|x^2+x-12|}{2}=-1;$ $|x^2+x-12|=-2.$

За властивостями модуля це рівняння коренів не має.

Відповідь: $\dfrac{-1-\sqrt{41}}{2};$ $\dfrac{-1+\sqrt{41}}{2};$ $\dfrac{-1-\sqrt{57}}{2};$ $\dfrac{-1+\sqrt{57}}{2}.$

$16^{\sqrt{|x-1|}}+12^{\sqrt{|x-1|}}=20^{\sqrt{|x-1|}}.$

Розв'язання:

Вводимо нову змінну $\sqrt{|x-1|}=t,$ тоді $16^t+12^t=20^t\,|:20^t;$ $\left(\frac{16}{20}\right)^t+\left(\frac{12}{20}\right)^t=1,$

$\left(\frac{4}{5}\right)^t+\left(\frac{3}{5}\right)^t=1.$

Підбором переконуємося, що $t=2-$ корінь цього рівняння. Справді, $\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=\frac{16+9}{25}=\frac{25}{25}=1.$ Так як функції $y=\left(\frac{4}{5}\right)^t$ і $y=\left(\frac{3}{5}\right)^t$ $-$спадні, то і функція $y=\left(\frac{4}{5}\right)^t+\left(\frac{3}{5}\right)^t$ $-$спадна, значить вона має тільки один корінь $y=2.$

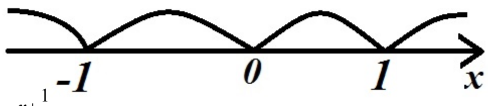
Повертаючись до підстановки, дістанемо $\sqrt{|x-1|}=2,$ $\left(\sqrt{|x-1|}\right)^2=2^2,$ $|x-1|=4.$

$\left[\begin{array}{l}x-1=-4,\\x-1=4\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=-3,\\x=5.\end{array}\right.$

Відповідь: $-3;\ 5.$

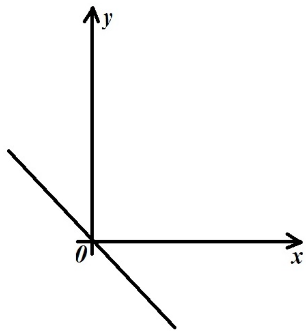
$2^{-|x|}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\left(|x+1|+|x-1|\right).$

Розв'язання:



На $(-\infty;\ -1)$ $2^x=-\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|\cdot\sqrt{2},$ $2^x\cdot 2^{\frac{1}{2}}=-x,$

$2^{x+\frac{1}{2}}=-x,$ $x\in\varnothing$



На $[-1;\ 0)$ $2^x=\frac{1}{\sqrt{2}};$ $2^{x+\frac{1}{2}}=2^0;$ $x=-\frac{1}{2};$

На $[0;\ 1)$ $2^{-x}=\frac{1}{\sqrt{2}};$ $2^{\frac{1}{2}-x}=1;$ $x=\frac{1}{2};$

На $[1;\ +\infty)$ $2^{-x}=\frac{x}{\sqrt{2}};$ $2^{\frac{1}{2}-x}=x;$ $x\in\varnothing.$

Відповідь: $-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}.$

$|\lg x|=3.$

Розв'язання:

ОДЗ: $(0;\ +\infty).$

$\left[\begin{array}{l}\lg x=-3,\\\lg x=3.\end{array}\right.$ За означенням логарифма числа маємо:

$\left[\begin{array}{l}x=10^{-3},\\x=10^3\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=0{,}001,\\x=1000.\end{array}\right.$

Відповідь: 0,001; 1000.

$\log_3\log_2|x|=0.$

Розв'язання:

За означенням логарифма числа маємо: $\log_2|x|=3^0;$

$\log_2|x|=1,\ \ |x|=2^1;\ \ |x|=2,\ \ \left[\begin{array}{l}x=-2,\\x=2.\end{array}\right.$

Відповідь: $-2;\ 2.$

$\log_3\left|\log_2|x|\right|=0.$

Розв'язання:

$\left|\log_2|x|\right|=3^0;\ \ \left|\log_2|x|\right|=1,\ \ \left[\begin{array}{l}\log_2|x|=-1,\\\log_2|x|=1\end{array}\right.\ \ \left[\begin{array}{l}|x|=2^{-1},\\|x|=2\end{array}\right.\ \ \left[\begin{array}{l}|x|=\dfrac{1}{2},\\|x|=2\end{array}\right.$

$x_1=\dfrac{1}{2};\ \ x_2=-\dfrac{1}{2};\ \ x_3=2;\ \ x_4=-2.$

Відповідь: $\dfrac{1}{2};\ -\dfrac{1}{2};\ 2;\ -2.$

$2\log_{|x|}25-3\log_{25}|x|=1.$

Розв'язання:

Перейдемо до основи логарифмів 25:

$\log_{|x|}25=\dfrac{\log_{25}25}{\log_{25}|x|}=\dfrac{1}{\log_{25}|x|}.$

Дане рівняння набуває вигляду:

$\dfrac{2}{\log|x|}-3\log_{25}|x|=1\big|\cdot\log_{25}|x|,\ \ 2-3\left(\log_{25}|x|\right)=\log_{25}|x|,\ \ 3\left(\log_{25}|x|\right)^2+\log_{25}|x|-2=0.$

Позначимо $\log_{25}|x|=y,$ тоді

$3y^2+y-2=0,\ \ D=1+24=25.\ \ y_1=\dfrac{-1-5}{6}=-1;\ \ y_2=\dfrac{-1+5}{6}=\dfrac{2}{3};$

$\log|x|=-1,\ \ |x|=25^{-1};\ \ |x|=\dfrac{1}{25};\ \ \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{25},\\x=\dfrac{1}{25}.\end{array}\right.$

$\log_{25}|x|=\dfrac{2}{3};\ \ |x|=25^{\frac{2}{3}};\ \ |x|=\sqrt[3]{625},\ \ \left|\begin{array}{l}x=-\sqrt[3]{625},\\x=\sqrt[3]{625}.\end{array}\right.$

Відповідь: $-\dfrac{1}{25};\ \dfrac{1}{25};\ -\sqrt[3]{625};\ \sqrt[3]{625}.$

$\dfrac{|2\lg x|}{|\lg(5x-4)|}=1.$

Розв'язання:

За властивостями модуля числа дане рівняння можна подати у вигляді:

$\left|\dfrac{2\lg x}{\lg(5x-4)}\right|=1,\ \ \left[\begin{array}{l}\dfrac{2\lg x}{\lg(5x-4)}=-1,\\\dfrac{2\lg x}{\lg(5x-4)}.\end{array}\right.\ \ \left[\begin{array}{l}2\lg x=-\lg(5x-4),\\2\lg x=\lg(5x-4).\end{array}\right.\ \ \left[\begin{array}{l}\lg x^2=\lg(5x-4)^{-1},\\\lg x^2=\lg(5x-4)\end{array}\right.$

$ОДЗ:\begin{cases}x>0\\5x-4>0,\ \ x>\dfrac{4}{5};\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = (5x-4)^{-1}, \\ x^2 = 5x-4. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{1}{5x-4}, \\ x^2 - 5x + 4 = 0. \end{array}\right.$$

$\left[\begin{array}{l} 5x^3 - 4x^2 - 1 = 0, \\ x_1 = 1;\ x_2 = 4. \end{array}\right.$ Неважко помітити, що 1 - корінь цього рівняння.

Тоді

$$\begin{array}{r|l} 5x^3 - 4x^2 - 1 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{5x^3 - 5x^2} & 5x^2 + x + 1 \\ x^2 - 1 & \\ \underline{x^2 - x} & \\ x - 1 & \\ \underline{x - 1} & \\ 0 & \end{array}$$

$5x^2 + x + 1 = 0,\ D = 1 - 20 = -19 < 0$

$x \in \varnothing.$

При $x = 1$ ліва частина рівняння не існує, хоча 1 і входить в ОДЗ.

Відповідь: 4.

$$\log_2|2x-5| + \log_2|x+20| = \frac{1}{\lg 2}.$$

Розв'язання:

Перейдемо до основи логарифмів 2:

$$\frac{1}{\lg 2} = \frac{1}{\frac{\log_2 2}{\log_2 10}} = \frac{1}{\frac{1}{\log_2 10}} = \log_2 10.$$

Вихідне рівняння набуває вигляду:

$$\log_2|2x-5| + \log_2|x+20| = \log_2 10.$$

Скористаємось теоремою про суму логарифмів:

$$\log_2(|2x-5| + |x+20|) = \log_2 10.$$

В силу монотонності логарифмічної функції маємо: $|2x-5| \cdot |x+20| = 10.$

За властивостями модуля числа маємо:

$$|(2x-5)\cdot(x+20)| = 10, \quad \left[\begin{array}{l} (2x-5)(x+20) = -10, \\ (2x-5)(x+20) = 10. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2x^2 + 40x - 5x - 100 = -10, \\ 2x^2 + 40x - 5x - 100 = 10. \end{array}\right.$$

$\left[\begin{array}{l} 2x^2 + 35x - 90 = 0, \\ 2x^2 + 35x - 110 = 0. \end{array}\right.$ $D = 1225 + 720 = 1945.$ $x_1 = \dfrac{-35 - \sqrt{1945}}{4};$ $x_2 = \dfrac{-35\sqrt{1945}}{4};$

$D = 1225 + 880 = 2105.$ $x_3 = -35 - \sqrt{2105};$ $x_4 = -35 + \sqrt{2105}.$

Відповідь: $\dfrac{-35 - \sqrt{1945}}{4};$ $\dfrac{-35\sqrt{1945}}{4};$ $-35 - \sqrt{2105};$ $-35 + \sqrt{2105}.$

$$\log_{|x+1|}|2x^2 - 3x + 1| = 2.$$

Розв'язання:

За означенням логарифма числа маємо:

$|x+1|^2=|2x^2-3x+1|$. Враховуючи той факт, що $|x+1|^2=(x+1)^2$ дістанемо рівняння:

$(x+1)^2=|2x^2-3x+1|$. Воно еквівалентне такій сукупності:

$$\left[\begin{array}{l}2x^2-3x+1=-(x+1)^2,\\ 2x^2-3x+1=(x+1)^2.\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}2x^2-3x+1=-x^2-2x-1,\\ 2x^2-3x+1=x^2+2x+1.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}3x^2-x+2=0,\ D=1-24=-23<0,\ x\in\varnothing.\\ x^2-5x=0 \qquad \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=5.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

При $x=0$ вираз $|x+1|=1$, а ліва частина рівняння виражає зміст.

Відповідь: 5.

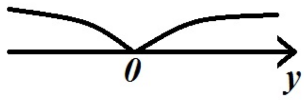
$$\log_3|x|+\log_{|x|}81-\left|\frac{\log_5|x|}{\log_5 3}\right|=2.$$

Розв'язання:

$$\frac{\log_5|x|}{\log_5 3}=\frac{\dfrac{\log_3|x|}{\log_3 5}}{\dfrac{\log_3 3}{\log_3 5}}=\frac{\log_3|x|}{1}=\log_3|x|.$$ Тоді рівняння набуває вигляду

$$\log_3|x|+\log_{|x|}81-\left|\log_3|x|\right|=2;\ \log_{|x|}81=\frac{\log_3 81}{\log_3|x|}=\frac{4}{\log_3|x|};\ \log_3|x|+\frac{4}{\log_3|x|}-\left|\log_3|x|\right|=2.$$

Введемо нову змінну $\log_3|x|=y$. $y+\frac{4}{y}-|y|=2,\ \ y=0.$



На $(-\infty;\ 0]$ $y<0,\ |y|=-y;\ \ y+\frac{4}{y}-(-y)=2,\ \ y^2+y^2+4-2y=0,\ \ 2y^2-2y+4=0,$

$y^2-y+2=0,\ \ D=1-8=-7<0,\ \ y\in\varnothing.$

На $(0;\ +\infty)$ $y>0,\ |y|=y;\ \ y+\frac{4}{y}-y=2,\ \ \frac{y}{2}=2,\ \ y=2.\ \log_3|x|=2,\ \ |x|=3^2,\ \ |x|=9,$

$x=-9,\ \ x=9.$

Відповідь: $-9;\ 9.$

$$\log_{|x|}|x+1|\cdot\log_{|x+1|}|x+2|\cdot\left|\log_{|x+2|}|x+3|\cdot\ldots\cdot\log_{|x+19|}|x+20|\right|=2.$$

Розв'язання:

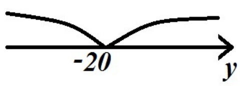
Застосуємо формулу переходу до основи $|x|$:

$$\log_{|x+1|}|x+2|=\frac{\log_{|x|}|x+2|}{\log_{|x|}|x+1|},\ \ \log_{|x+2|}|x+3|=\frac{\log_{|x|}|x+3|}{\log_{|x|}|x+2|},\ \ \log_{|x+19|}|x+20|=\frac{\log_{|x|}|x+20|}{\log_{|x|}|x+19|},$$

$$\log_{|x|}|x+1|\cdot\frac{\log_{|x|}|x+2|}{\log_{|x|}|x+1|}\cdot\frac{\log_{|x|}|x+3|}{\log_{|x|}|x+2|}\cdot\ldots\cdot\frac{\log_{|x|}|x+20|}{\log_{|x|}|x+19|}=2.$$

Остаточно маємо рівняння: $\log_{|x|}|x+20|=2.$ За означенням логарифма

$|x|^2=|x+20|,\ \ x^2=|x+20|,\ \ x+20=0,\ \ x=-20$



На $(-\infty;\ -20)$ $x+20<0,\ \ |x+20|=-(x+20).$

$x^2 = -(x+20); \; x^2 + x + 20 = 0, \;\; D < 0, \;\; x \in \varnothing.$

На $[-20; \; +\infty)$ $x + 20 > 0, \;\; |x+20| = x + 20.$

$x^2 = x + 20); \; x^2 - x - 20 = 0, \;\;\; x_1 = -4; \;\; x_2 = 5$ (Теорема Вієта).

При $x = -4 \quad \log_{|x+1|}|x+1|$ втрачає смисл.

Відповідь: 5.

$\underset{x>0}{\log_8}|x| + \log_8^2|x| + \log_8^3|x| + ... = \dfrac{1}{2}.$

Розв'язання:

Ліва частина рівняння - це сума нескінченної спадної геометричної прогресії із знаменником $q = \dfrac{\log_8^2|x|}{\log_8|x|} = \log_8|x|.$

$S = \dfrac{b_1}{1-q}; \;\; S = \dfrac{\log_8|x|}{1-\log_8|x|}; \;\; \dfrac{\log_8|x|}{1-\log_8|x|} = \dfrac{1}{2}; \;\; 2\log_8|x| = 1 - \log_8|x|, \;\;\; 3\log_8|x| = 1, \;\; \log_8|x| = \dfrac{1}{3};$

$|x| = 8^{\frac{1}{3}}; \;\; |x| = 2, \;\; \left[\begin{array}{l} x = -2 \text{ не задовольняє умову } x > 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Відповідь: 2.

Тригонометричні рівняння з модулями

$\left|Sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)\right| = \dfrac{1}{2}.$

Розв'язання:

Це рівняння рівносильне сукупності таких рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} Sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}, \\ Sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \;\; \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \pi n, \\ 2x - \dfrac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \arcsin\dfrac{1}{2} + \pi n \end{array}\right. \;\; \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \pi n, \\ 2x - \dfrac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi n \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{3} = -(-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi n, \\ 2x - \dfrac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi n \end{array}\right. \;\; \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{3} - (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi n, |:2 \\ 2x = \dfrac{\pi}{3} + (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi n \; |:2 \end{array}\right. \;\; \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} - (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}, \\ x = \dfrac{\pi}{6} + (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2} \end{array}\right. \text{ Або:}$$

$x = \dfrac{\pi}{6} \pm \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}, \;\; n \in Z.$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{6} \pm \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}, \;\; n \in Z.$

$\left|\cos\dfrac{x}{2}\right| = -0{,}3.$

Розв'язання:

$x \in \varnothing.$

Відповідь: $\varnothing$.

$\left|tg\left(x - 20^\circ\right)\right| = 2.$

Розв'язання:

$$\left[\begin{array}{l} tg\left(x-20^\circ\right)=-2, \\ tg\left(x-20^\circ\right)=2 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x-20^\circ = arctg(-2)+180^\circ n, \\ x-20^\circ = arctg2+180^\circ n \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=20-arctg2+180n, \\ x=20+arctg2+180n \end{array}\right.$$

$x = 20^\circ \pm arctg2 + 180^\circ n, \ \ n \in Z.$

Відповідь: $20^\circ \pm arctg2 + 180^\circ n.$

$tg\dfrac{\pi}{|x-1|} = -1.$

Розв'язання:

$$\frac{\pi}{|x-1|} = arctg(-1)+\pi n, \quad \frac{\pi}{|x-1|} = -\frac{\pi}{4}+\pi n, \quad \frac{\pi}{|x-1|} = \frac{-\pi+4\pi n}{4}\Big|:\pi \quad \frac{1}{|x-1|} = \frac{-1+4n}{4};$$

$$|x-1| = \frac{4}{4n-1}; \quad \left[\begin{array}{l} x-1=-\dfrac{4}{4n-1}; \ x=1-\dfrac{4}{4n-1}; \\ x-1=\dfrac{4}{4n-1}; \ x=1+\dfrac{4}{4n-1} \end{array}\right. \quad n=1,2,3\ldots \quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{4n-1-4}{4n-1}=\dfrac{4n-5}{4n-1}; \\ x=\dfrac{4n+3}{4n-1}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\dfrac{4n-5}{4n-1}, \ \dfrac{4n+3}{4n-1}, \ n \in \{1,2,3\ldots\}.$

$\left|Sin\pi \cdot x^2\right| = 1.$

Розв'язання:

$\left[\begin{array}{l} Sin\pi \cdot x^2 = -1, \\ Sin\pi \cdot x^2 = 1 \end{array}\right.$ Якщо Синус кута дорівнює ± 1, то Косинус цього кута дорівнює 0, тобто $Cos\pi \cdot x^2 = 0, \ \pi x^2 = \dfrac{\pi}{2}+k\pi, \ x^2 = \dfrac{1}{2}+k.$ Це рівняння має розв'язок при $k = \{0,1,2,\ldots\} \quad x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}+k}.$

Відповідь: $\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}+k}, \ k-$ціле невід'ємне число.

$tg\left|\pi\sin\pi|x|\right| = \sqrt{3}.$

Розв'язання:

$\left|\pi\sin\pi|x|\right| = \dfrac{\pi}{3}+k\pi\Big|:\pi, \ \left|\sin\pi|x|\right| = \dfrac{1}{3}+k.$ Оскільки $0 \le \left|\sin\pi|x|\right| \le 1,$ то $k=0$ (і тільки).

Тоді $\left|\sin\pi|x|\right| = \dfrac{1}{3}.$ Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата.

$\sin^2\pi|x| = \dfrac{1}{9}.$ Понизимо степінь:

$$\frac{1-\cos 2\pi|x|}{2} = \frac{1}{9}\Big|\cdot 18 \quad 9-9\cos 2\pi|x| = 2, \ -\cos 2\pi|x| = -7, \ \cos 2\pi|x| = \frac{7}{9},$$

$2\pi|x| = \pm\arccos\dfrac{7}{9}+2\pi|x|, \ |x| = \pm\dfrac{1}{2\pi}\arccos\dfrac{7}{9}+\pi, \ n \in N$ і $n=0.$

$x = n \pm \arccos\dfrac{7}{9}$ при $n \in N$.

$x = \pm\dfrac{1}{2\pi}\arccos\dfrac{7}{9}$ при $n=0.$

Відповідь: $n \pm \arccos\dfrac{7}{9}$ при $n \in N$, $\pm\dfrac{1}{2\pi}\arccos\dfrac{7}{9}$ при $n=0.$

$$\left|\sin|x|\cdot\cos x\right|\cdot\left|3-4\sin^2 x\right|\cdot\left|4\cos^2 x-3\right|=\frac{1}{2}.$$

Розв'язання:

Оскільки $\cos x=\cos|x|$ і $\sin^2 x=\sin^2|x|$, то рівняння набуває вигляду

$$\left|\sin|x|\cdot\cos|x|\right|\cdot\left(3-4\sin^2|x|\right)\cdot\left(4\cos^2|x|-3\right)=\frac{1}{2},$$

$$\left|\sin|x|\cdot\left(3-4\sin^2|x|\right)\cdot\cos|x|\cdot\left(4\cos^2|x|-3\right)\right|=\frac{1}{2},$$

$$\left|\left(3\sin|x|-4\sin^3|x|\right)\cdot\left(4\cos^3|x|-3\cos|x|\right)\right|=\frac{1}{2}.$$

$$\left|\sin|3x|\cdot\cos|3x|\right|=\frac{1}{2};\ \ \frac{1}{2}\left|\sin|6x|\right|=\frac{1}{2}.$$

$\sin|6x|=1$ До квадрату $\sin^2|6x|=1,\ \cos^2|6x|=0,\ \cos|6x|=0,\ 6x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{6},$ $k\in Z.$

Відповідь: $\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{6},\ k\in Z.$

$$\cos\pi x\cdot\cos|2\pi x|-\sin|\pi x|\cdot\sin 2\pi x=-1.$$

Розв'язання:

$\cos|2\pi x|=\cos 2\pi x,\ \ \cos\pi x=\cos|\pi x|.$

З урахуванням цих співвідношень дане рівняння матиме вигляд:

$\cos|\pi x|\cdot\cos 2\pi x-\sin|\pi x|\cdot\sin 2\pi x=-1,\ \cos\left(\pi|x|+2\pi x\right)=-1,$

$\pi|x|+2\pi x=\pi+2k\pi|:\pi,\ |x|+2x=1+2k.$

Якщо $x\ge 0,\ |x|=x$ і $x+2x=1+2k,\ x=\frac{1+2k}{3};$

Якщо $x<0,\ |x|=-x$ і $-x+2x=1+2k,\ x=1+2k,\ k\in Z.$

Відповідь: $\frac{1+2k}{3},1+2k,\ k\in Z.$

$$tg^2 x=\frac{1-\cos|x|}{1-\sin|x|}.$$

Розв'язання:

Відомо, що $tg^2 x=tg^2|x|.$ Тоді $tg^2|x|=\frac{1-\cos|x|}{1-\sin|x|}.$ Введемо підстановку $|x|=y,\ \ y\ge 0.$

Одержимо рівняння $tg^2 y=\frac{1-\cos y}{1-\sin y};\ \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}=\frac{1-\cos y}{1-\sin y};$

Використавши основну властивість пропорції, маємо:

$\sin^2 y(1-\sin y)=\cos^2 y(1-\cos y),\ \sin^2 y=1-\cos^2 y,$

$(1-\cos^2 y)(1-\sin y)=(1-\sin^2 y)(1-\cos y);$

$(1-\cos^2 y)(1-\sin y)=(1-\sin y)(1+\sin y)(1-\cos y)|:(1-\sin y);$

$1-\cos^2 y=(1+\sin y)(1-\cos y);\quad (1-\cos^2 y)-(1+\sin y)\cdot(1-\cos y)=0,$

$(1-\cos y)(1+\cos y)-(1+\sin y)(1-\cos y)=0;\quad (1-\cos y)\cdot(1+\cos y-1-\sin y)=0,$

$(1-\cos y)(\cos y-\sin y)=0,$ $\left[\begin{array}{l}1-\cos y=0,\\ \cos y-\sin y=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\cos y=1,\\ tgy=1.\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}y=2k\pi,\\ y=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.$ $K=0,1,2,3,...бо\ y\geq 0.$

Тоді $\left[\begin{array}{l}|x|=2k\pi,\\ |x|=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\pm 2k\pi,\\ x=\pm\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right).\end{array}\right.$

Відповідь: $-2k\pi, 2k\pi, -\dfrac{\pi}{4}+k\pi, \dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z.$

$|\cos x|=|\cos 2x|.$

Розв'язання:

$\left[\begin{array}{l}\cos x=-\cos 2x,\\ \cos x=\cos 2x\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\cos x+\cos 2x=0,\\ \cos x-\cos 2x=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}2\cos\dfrac{x+2x}{2}\cdot\cos\dfrac{2x-x}{2}=0,\\ 2\sin\dfrac{x+3x}{2}\cdot\sin\dfrac{2x-x}{2}=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{3x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}=0,\\ \sin\dfrac{3x}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}=0\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{ll}\cos\dfrac{3x}{2}=0, & x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2k\pi}{3},\ k\in Z\\ \cos\dfrac{x}{2}=0, & x=\pi+2k\pi\to x=\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}\\ \sin\dfrac{3x}{2}=0, & x=\dfrac{2k\pi}{3}+2k\pi\\ \sin\dfrac{x}{2}=0 & x=2k\pi\to\dfrac{2k\pi}{3}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\dfrac{2k\pi}{3};\ \dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3},\ k\in Z.$

$\sin 2x-\sin x=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}.$

Розв'язання:

Маємо: $\sin 2x-\sin x=\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$

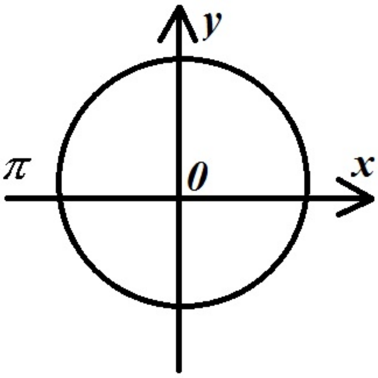
Доцільно розглядати два випадки:

1) $\sin\dfrac{x}{2}\geq 0,$ $\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|=\sin\dfrac{x}{2}.$ Рівняння набуває вигляду

$\sin 2x-\sin x=\sin\dfrac{x}{2};$ $2\sin\dfrac{2x-x}{2}\cdot\cos\dfrac{2x+x}{2}=\sin\dfrac{x}{2},$ $2\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{3x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}=0;$

$\sin\dfrac{x}{2}\left(2\cos\dfrac{3x}{2}-1\right)=0.$

$\left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{x}{2}=0,\\ 2\cos\dfrac{3x}{2}-1=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{x}{2}=0,\\ \cos\dfrac{3x}{2}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}=k\pi,\\ \dfrac{3x}{2}=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}=k\pi,\ x=2k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{4\pi k}{3}\\ x=-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{4\pi k}{3}\end{array}\right.$



$0 \le \frac{x}{2} \le \pi \quad 0 + 2\pi n \le x \le 2\pi + 2\pi n \quad 2k\pi,\ k \in Z.$

$\frac{\pi}{9} \in [0;\ 2\pi],\ -\frac{\pi}{9} \in (0;\ 2k\pi).$

2) $\sin\frac{x}{2} < 0,\ \left|\sin\frac{x}{2}\right| = -\sin\frac{x}{2},\ \sin 2x - \sin x = -\sin\frac{x}{2},\ 2\sin\frac{2x - x}{2} \cdot \cos\frac{2x + x}{2} = -\sin\frac{x}{2};$

$2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{x}{2} = 0;\ \sin\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{3x}{2} + 1\right) = 0;$

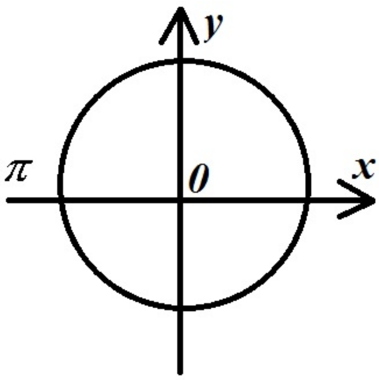
$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{x}{2} = 0, \\ \cos\frac{3x}{2} = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = k\pi \\ \frac{3x}{2} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi, \\ x = \pm\frac{4}{9}\pi + \frac{4}{3}k\pi. \end{array}\right.$

Відповідь: $-\frac{4\pi}{9} + 4k\pi,\ \frac{2\pi}{9} + 4k\pi,\ \frac{14\pi}{9} + 4k\pi,\ \frac{20\pi}{9} + 4k\pi,\ \frac{28\pi}{9} + 4k\pi,\ 2k\pi.$

$|\sin 5x| = \sin 5x.$

Розв'язання:

Ця рівність має місце тоді коли $\sin 5x \ge 0.$



$0 + 2\pi n \le 5x \le \pi + 2\pi n | : 5$

$\frac{2\pi n}{5} \le x \le \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5},\ n \in Z.$

Відповідь: $\left[\frac{2\pi n}{5};\ \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}\right],\ n \in Z.$

$\sin^{75} x - \cos^{85} x = 1.$

Розв'язання:

$\left[\begin{array}{l} |\sin x| = 1, \\ |\cos x| = 1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = 1, \\ \cos x = -1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ x = \pi + 2k\pi \end{array}\right. \quad k \in Z.$

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \pi + 2k\pi, k \in Z.$

Завдання для самостійної роботи:

$2|x-3|-5=0.$ Відповідь: 0,5; 5,5.

$|3x+1|+5=0.$ Відповідь: $\varnothing$.

$\left|2|3x-1|-1\right|-5=0.$ Відповідь: $-\frac{2}{3};\ 1\frac{1}{3}.$

$2|x-3|+3x=7.$ Відповідь: 1.

$3|x+1|-|2x-1|=5.$ Відповідь: $-9;\ 1.$

$|x-3|+|x-4|=1.$ Відповідь: $[3;4].$

$|x-2|+|x+3|+|x+1|-17=0.$ Відповідь: $-6\frac{1}{3};\ 5.$

$\frac{7x+4}{5}-x=\frac{|3x-5|}{2}.$ Відповідь: 3.

$|2x-1|-|1-x|-3\cdot|5-3x|=-1.$ Відповідь: 1,4; 2.

$|x-6|+|x-12|=6.$ Відповідь: $[6;\ 12].$

$|x-1|+|x-2|-|x+3|-|x-5|+7=0.$ Відповідь: $[1;\ 2].$

$|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2.$ Відповідь: $-2;\ [2;+\infty).$

$3x-|x+1|-|x+3|-|2x+1|-25=0.$ Відповідь: $\varnothing$.

$3|x-2|-|3x-1|-3|x+2|+|3x+1|+4{,}5x=0.$ Відповідь: $0;-\frac{4}{3};\frac{4}{3};-\frac{20}{9};\frac{20}{9}.$

$\left||x-3|-|2-x|\right|=1.$ Відповідь: $[-\infty;2]\cup[3;+\infty).$

$2x^2+|x|-3=0.$ Відповідь: $-1;\ 1.$

$4x^2+4|x|+1=0.$ Відповідь: $\varnothing$.

$(2x^2+6x)^2-|x^2-2x-3|=17.$ Відповідь: $-4;\ 1.$

$|x^2-2x-3|+x^2+|2x-1|-4=0.$ Відповідь: $\left[-1;\ \frac{1}{2}\right].$

$|x^2-5x+6|+|x^2-5x+4|=0.$ Відповідь: $\varnothing$.

$|x|^3+3x^2-|x|-3=0.$ Відповідь: $-1;\ 1.$

$x^4-3|x|^3+x^2+3|x|-2=0.$ Відповідь: $-2;-1;\ 1;\ 2.$

$|x|^5+2x^4+2|x|^3+2x^2+2|x|=0.$ Відповідь: 0.

$3|x|^3+2x^2+2|x|-1=0.$ Відповідь: $-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}.$

$x^3-13x^2+36|x|=0.$ Відповідь: $0;4;9;\frac{13-\sqrt{313}}{2}.$

$\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+4x+4}=\sqrt{x^2-6x+9}.$ Відповідь: $-3;-1.$

$\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}=\sqrt{6}.$ Відповідь: $[1{,}5;\ 3].$

$\sqrt{4x+8}+\sqrt{3|x|-2}=2.$ Відповідь: $-\frac{34}{49};2;34.$

$\sqrt{|x-2|}+|x|=10.$ Відповідь: $-7;\ \frac{21-\sqrt{33}}{2}.$

$\sqrt{|x+4|}+\sqrt{|x+1|}=3.$ Відповідь: $-5;\ 0.$

$\sqrt{x^3-2x}-\left|x^2-2\right|\cdot|x|+2=0.$ Відповідь: 2.

$\sqrt[3]{8|x|+4}-\sqrt[3]{8|x|-4}=2.$ Відповідь: $\frac{1}{2}.$

$3^{|x-4|}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}.$ Відповідь: $\varnothing.$

$0{,}7^{|x-2|}=0{,}7^{\sqrt{-x^2+6x-8}}.$ Відповідь: 2; 3.

$3^{|2x|+1}-3^{x+1}-26=0.$ Відповідь: $-1;\ \log_3\left(3+\sqrt{321}\right)-\log_3 6.$

$3^{|x-1|}+2^{|x-3|}+2^{|x-3|}=448.$ Відповідь: $-5;9.$

$2^x=|6-x|.$ Відповідь: 2.

$2^{|x|}=\frac{|x|+3}{|x|+1}.$ Відповідь: $-1;1.$

$|\lg x|=2.$ Відповідь: $0{,}01;100.$

$\log_4\log_3\log_2|x|=0.$ Відповідь: $-8;8.$

$\lg|x+6|-\frac{1}{2}\lg|2x-3|=2-\lg 25.$ Відповідь: $6;14;-22\pm\sqrt{31}.$

$\sqrt{2\lg(-x)}=\lg\sqrt{x^2}.$ Відповідь: $-1;-100.$

$\lg\left|x-\frac{1}{2}\right|=|\lg x|-\left|\lg\frac{1}{2}\right|.$ Відповідь: 1.

$\sqrt{\lg(5x)\cdot\lg\left(20x^3\right)+\lg^2 2x}=3.$ Відповідь: $0{,}01;\ 10.$

$\log_{\frac{1}{2}}|x|=\frac{1}{4}\cdot(|x-2|+|x+2|).$ Відповідь: $-\frac{1}{2};\frac{1}{2}.$

$\left|\log_2|x|\right|=\frac{1}{4}\cdot(|x-2|+|x+2|).$ Відповідь: $-2;2;-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-4;4.$

$\frac{\lg|4-5x|}{\lg|x|}=2.$ Відповідь: $4;\frac{-5-\sqrt{41}}{2};\frac{-5+\sqrt{41}}{2}.$

$\left|\sqrt{\log_{|x|}\sqrt{3x}}\cdot\log_3|x|\right|=1.$ Відповідь: $3;\frac{1}{9}.$

$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}=\log_{\frac{1}{2}}(x-1).$ Відповідь: $\frac{5}{4}.$

Тригонометричні рівняння з модулями

$\left|\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right|=\frac{1}{2}.$

Розв'язання:

Це рівняння можна розв'язати двома способами:

а) замінити його сукупністю двох рівнянь;

б) піднести обидві частини рівняння до квадрата.

$\left(\left|\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right|\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}$ понизимо степінь рівняння:

$\frac{1-\cos\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}=\frac{1}{4}\Big|\cdot 2 \qquad 1-\cos\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}; \qquad \cos\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)=1-\frac{1}{2};$

$\cos\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}; \quad 4x-\frac{2\pi}{3}=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi n, \ 4x-\frac{2\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,$

$4x=\frac{2\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\Big|:4 \ x=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, \ n\in Z.$

Відповідь: $\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, \ n\in Z.$

Завдання для самостійної роботи:

$\sin|x|=\frac{\sqrt{3}}{2}.$ Відповідь: $x=\pm\left((-1)+\frac{k\pi}{3}+k\pi\right), \ k=\{0;1;2;3;...\}$

$\left|\cos^2\frac{5x}{2}-\sin^2\frac{5x}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}.$ Відповідь: $\frac{2k+1}{20}\pi, \ k\in Z.$

$|tgx+ctgx|=\frac{4}{\sqrt{3}}.$ Відповідь: $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\mathrm{k}\pi}{2} \ k\in Z.$

$\left|\cos 3x\cdot\cos 5x-\frac{1}{2}\cos 2x\right|=\frac{\sqrt{2}}{4}.$ Відповідь: $\frac{\pi}{32}+\frac{k\pi}{16}, \ k\in Z.$

$\left|\frac{tg2x-tgx}{1+tgx\cdot tg2x}\right|=2.$ Відповідь: $\pm arctg\alpha+k\pi, \ k\in Z.$

$\sin^2 x-\cos^2|x|=\frac{1}{2}.$ Відповідь: $\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, \ k\in Z.$

$\sin|x|\cdot\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{4}.$ Відповідь: $\pm\left(\frac{k\pi}{2}-(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}\right), \ k\in N.$

$\sin^2 x+2|\sin x|-3=0.$ Відповідь: $\frac{\pi}{2}+k\pi, \ k\in Z.$

$2\sin^2 x-\sin|x|-1=0.$ Відповідь: $\pm\left((-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n\right), \ n\in Z.$

$\cos 2x=|\cos x|.$ Відповідь: $\pi n, \ n\in Z.$

$\frac{2\cos x}{|\sin x|}+tgx=1.$ Відповідь: $arctg\alpha+\pi+2\pi, \ -\frac{\pi}{4}+2\pi n, \ n\in Z.$

$|\sin x|-\sin 3x=0.$ Відповідь: $\frac{\pi}{4}+2\pi n, \frac{3\pi}{4}+2\pi n, -\frac{\pi}{2}+2\pi n, \pi n, \ n\in Z.$

$|ctg2x|=-ctg2x.$ Відповідь: $\left[\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4}; \ \frac{k\pi}{2}\right), \ k\in Z.$

$|x-3|^{3x^2-10x+3}=1.$ Відповідь: $\frac{1}{3}; 2; 4.$