Розділ 3

Степені. Корені. Логарифми

Степенем числа *а* з натуральним показником  називається добуток *n* множників, кожний з яких дорівнює *а*.





Степенем невід’ємного числа *а* з невід’ємним дійсним показником

 L=L0, L1 L2 L3 L4… називається границя послідовності степенів числа *а* з раціональними показниками, які є наближеними значеннями числа L з точністю до 0,1; 0,01; 0,001… з недостачею. ****

За означенням маємо: а =а; а   

Наприклад: 51=5; 60=1;  

Властивості степеня з довільним дійсним показником:

1). *множення степенів з однаковими основами;*

2). *ділення степенів з однаковими основами;*

3). *піднесення степеня до степеня;*

4). *піднесення добутку до степеня;*

5). *піднесення дробу до степеня.*

Знайти значення виразу:

**3.1** а). 

б). 

в). 

г). 

д). 

е). 

є). 

**3.2** Спростити вираз та обчислити його значення при *а*=1,8; *в*=0,5



Якщо а=1,8; в=0,5, то  Відповідь: 

**Завдання для самостійної роботи:**

**3.3** Обчислити:  Відповідь: 3.

Спростити вираз: **3.4**  Відповідь: *х.*

**3.5**  Відповідь: 4.

**3.6**  Відповідь:  при 

**3.7**  Відповідь:  при 

 **3.8**  Відповідь:при *х*

**3.9**  Відповідь:  при 

**3.10**  Відповідь: –1 при 

**3.11** Дано: 

Визначити  Відповідь: 

**3.12** Дано: 

Визначити  Відповідь: 

**3.13** Дано: 

Визначити  Відповідь: 

**3.14** 

Відповідь:  при 

**3.15**  Відповідь: 1 при 

**3.16**  Відповідь:  при 

**3.17**  Відповідь: 1 при 

Означення і властивості кореня з числа

 Коренем *п*-го степеня  з числа *а* називається число *в* , *п-*ий степінь якого дорівнює *а* .  Наприклад,  показник кореня, 8 – підкореневий вираз, 2 – значення кореня. З означення кореня випливає тотожність або 

Якщо *п –парне число,* то існує два значення кореня з будь-якого додатного числа. Наприклад: Якщо *п –непарне число*, то існує тільки одне значення кореня з будь – якого дійсного числа. Наприклад: 

Арифметичним коренем *п* – степеня  з невід’ємного числа *а* називається невід’ємне число *в*, *п* – ий степінь якого дорівнює *а*.

Наприклад: 

Знаходження кореня *п* – степеня називається добуванням кореня.

**Властивості арифметичного кореня:**

корінь з добутку;

корінь з дробу;

корінь з кореня.



 Якщо то 



  Тут 2*т* – парне число, *2т+1* – непарне число. Покажемо застосування означення кореня з числа та його властивостей до розв’язування вправ.

Знайти значення виразу  Розв’язання:

Розкладемо число 75 на два множники так, щоб хоча б з одного з них добувався корінь 75=25Число 48 розкладемо на два множники так ,щоб один з них дорівнював 3: 48=3  Використаємо властивість кореня з добутку:  Відповідь:60.  Розв’язання: перетворимо кожне з «мішаних» чисел у неправильний дріб, а потім спростимо підкореневий вираз:  Відповідь: 2.

 Розв’язання: ні з числа 0,27, ні з числа (–100) кубічний корінь не добувається, а тому підкореневий вираз перетворимо таким чином:



 Відповідь: –3.

 Розв’язання: перетворимо підкореневий вираз, використавши формулу різниці квадратів двох чисел:



 Відповідь: 2.

 Розв’язання:

Доцільно спочатку позбавитись від ірраціональності в знаменниках кожного

з трьох дробів: 



 

. Відповідь: 33.

Заслуговує уваги такий спосіб спрощення виразів типу:

 Розв’язання: позначимо  Піднесемо обидві частини цієї рівності до квадрату: 6+2

12-2

12-2;

12-2

А

А=Оскільки то різниця 

Отже, А=2. Відповідь: 2.

Обчислити значення виразу: **3.18** при *а =2,5.*

Розв’язання:

Спростимо цей вираз, звівши підкореневі вирази до спільних знаменників. Потім використаємо формулу різниці квадратів і після скорочення застосуємо поняття модуля числа.



Якщо *а* = 2,5, то 

Відповідь: 2.

**3.19** Довести, що 

Доведення.

 л.ч. 

п.ч. =  

Оскільки ліва і права частини дорівнюють одному й тому ж числові  то рівність доведена.

В наступних двох вправах використаємо ідею піднесення до деякого степеня вибраної частини рівності і водночасі добування кореня з неї такого самого степеня .

**3.20** Довести рівність  Доведення.

Оскільки традиційне позбавлення від ірраціональності в знаменнику дробу в цій вправі не приводить до мети, то над лівою частиною рівності виконаємо такі перетворення:

1. піднесемо її до кубу; 2. водночас і добудемо з неї корінь кубічний.

 л.ч. 

**3.21** Довести рівність 

Доведення

Оскільки ліва частина виразу додатна, то для її перетворення використаємо ідею розв’язування попередньої вправи:

л.ч.

**Завдання для самостійної роботи:**

Знайти значення виразу: **3.22**  Відповідь: 20.

**3.23 ** Відповідь: 30.

 **3.24**  Відповідь: 2.

 **3.25**  Відповідь: 5.

**3.26**  Відповідь: 0.

**3.27**  Відповідь: 8.

**3.28**  Відповідь: 2.

**3.29**  Відповідь: 0.

**3.30** Спростити вираз:  Відповідь: 2.

**3.31** Знайти значення виразу:  при *х*=26. Відповідь: 1.

**3.32** Спростити вираз: 

Довести рівності: **3.33** 

 **3.34** 

 **3.35** 

Визначити: **3.36** *у* = якщо  Відповідь: *а+в.*

 **3.37** *у=*  якщо , де   

Відповідь: 

 **3.38** *у=* якщо  де 

Відповідь:  якщо  якщо 

 **3.39**  якщо  де 

Відповідь: 

Означення і властивості логарифма числа

Логарифмом числа *N* при основі *а*  називається показник степеня , до якого треба піднести число а ,щоб одержати число *N.*

Залежно від їх основи логарифми можна класифікувати на три великі групи:



**Корисні співвідношення:** *logaa=1;* *logа1=0.*

**Основна логарифмічна тотожність:** *alogaB =* *B.*

**Логарифми існують тільки додатних чисел і мають такі властивості:**

1). *loga*

2). 

3). 

4). 

5). 

6). 

Вираження логарифма виразу через логарифми його компонентів називається логарифмуванням. Дія, обернена до логарифмування, називається потенціюванням.

Спочатку доцільно розв’язувати вправи на застосування основної логарифмічної тотожності ,які є доброю пропедевтикою для розв’язування логарифмічних рівнянь та нерівностей.

Наприклад: 







 Розв’язування дещо складніших вправ цього типу, наприклад, обчислити значення виразу: 

 Розв’язання:

Обчислимо значення кожного з трьох членів цього виразу окремо:







Отже, 25+5 – 6=24. Відповідь: 24.

**3.40** Обчислити: 

 Розв’язання:

Використаємо формулу переходу від однієї основи логарифмів до іншої:

 Таким чином,

 Відповідь: 15.

**3.41** Обчислити: 

Розв’язання

Замінимо суму логарифмів логарифмом добутку згідно властивостей логарифмів :

З формули *п-го*  члена арифметичної прогресії 

знаходимо кількість її членів: 

*an=a1+d(n-1); a1=1; a2=3; an=89.* 

*d=3-1=2.*

*89=1+2(n-1); 2(n-1)=89-1; 2(n-1)=88;*

*n-1= n=44+1=45.*

Для обчислення суми *п* перших членів арифме- Відповідь: 2025.

тичної прогресії використаємо формулу



**3.42** Дано:   Знайти 

Розв’язання:

Перетворимо шуканий логарифм: Відповідь: 

**3.43** Дано : logЗнайти 

Розв’язання:

Вираз  замінимо логарифмом з основою 6: 

Відповідь: 2.

**3.44** Дано:  Знайти 

Розв’язання:

 Перейдемо до логарифмів з основою 12: 18=  

  

  

  

 Відповідь: 

**3.45** Дано:  Знайти 

Розв’язання:

Перейдемо до логарифмів з основою 20:



 

 

 

 

  Відповідь: 

**Завдання для самостійної роботи:**

**3.46** Відомо, що *lg2* = 0,301. Обчислити 

 Відповідь: 0,301.

Обчислити:

**3.47** 20*log* Відповідь:15.

**3.48** 18 Відповідь: 6

**3.49**  Відповідь: 11.

**3.50**  Відповідь: 19.

**3.51**  Відповідь: 2.

**3.52**  Відповідь: 9.

**3.53**  Відповідь: 6.

 **3.54**  Відповідь: 11.

**3.55**  Відповідь: 1,5.

**3.56**  Відповідь: 3,5.

**3.57** *в,* якщо *в=sіп*. Відповідь: –.

**3.58** 3 Відповідь:9.

**3.59**  якщо  Відповідь: 8.

**3.60**  Відповідь: 1,5

**3.61** 8+ Відповідь: 10.

**3.62**  якщо   Відповідь: 1,2.

**3.63**  якщо  Відповідь: 4.

**3.64**  Відповідь: 2.

Знайти *х,* якщо:

**3.65**  Відповідь: 

**3.66**  Відповідь: 

**3.67**  Відповідь: 11,25.

**3.68** Дано:   Знайти  Відповідь: 

**3.69** Дано:  Знайти  Відповідь: 

**3.70** Дано:   Знайти  Відповідь: 

**3.71** Дано:  Знайти  Відповідь: 

**3.72** Дано:  Знайти  Відповідь: 

**3.73** Знайти  якщо  Відповідь: 

**3.74** Знайти  якщо  Відповідь: 

**3.75** Знайти  якщо  Відповідь: 

**3.76** Знайти  якщо  Відповідь: 

**3.77** Знайти  якщо  Відповідь: 