Раздел 19
Нахождение наибольшего или наименьшего значения квадратного трехчлена

Чтобы найти наибольшее или наименьшее значение квадратного трехчлена нужно:
1) по знаку старшего коэффициента a квадратного трехчлена определить направление веток параболы (при $a > 0$ ветки направлены вверх, при $a < 0$ – ветки вниз);
2) при $a > 0$ функция имеет наименьшее значение, при $a < 0$ – наибольшее значение;
3) по формуле $m = -\frac{b}{2a}$ найти абсциссу вершины параболы;
4) по формуле $n = y(m)$ найти ординату вершины параболы;
5) значение ординаты вершины параболы и будет наибольшим или наименьшим значением квадратного трехчлена.

Найти наименьшее или наибольшее значение функции $y = x^2 - 6x + 5.$

Решение:

$a = 1,\ 1 > 0,$ а потому ветки параболы направлены вверх - функция имеет наименьшее значение.
$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3;-$ абсцисса вершины параболы.
$n = y(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4 -$ ордината параболы.
Наименьшее значение функции $y_{найм} = -4.$
Ответ: $-4.$

$y = -x^2 - 6x + 1.$

Решение:

$a = -1,\ -1 < 0,$ ветки параболы направлены вниз - функция имеет наибольшее значение.
$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot (-1)} = -3;\ n = y(-3) = -(-3)^2 - 6 \cdot (-3) + 1 = -9 + 18 + 1 = 10.$
$(-3; 10) -$ вершина параболы.
Наибольшее значение функции $y_{наиб} = 10.$
На наш взгляд, этот способ несколько рациональнее, чем способ выделения квадрата двучлена.
Заслуживает внимания и такой способ решения упражнений на нахождение наибольшего или наименьшего значения функции.

$y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}.$

Решение:

Используя основное свойство пропорции, получим:

$y \cdot (x^2 + 2x + 1) = x^2 + x + 1,$

$yx^2 + 2xy + y - x^2 - x - 1 = 0,$

$(yx^2 - x^2) + (2xy - x) + (y - 1) = 0,$

$(y - 1) \cdot x^2 + (2y - 1) \cdot x + y - 1 = 0.$

Это уравнение имеет корни тогда, когда $D \geq 0,\ D = b^2 - 4ac,$

$D = (2y - 1)^2 - 4 \cdot (y - 1) \cdot (y - 1) = 4y^2 - 4y + 1 - y^2 \cdot 4 + 4y + 4y - 4 = 4y - 3;\ \ 4y - 3 \geq 0,$

$4y \geq 3,\ \ y \geq \dfrac{3}{4}.$

Функция имеет наименьшее значение, равное $\dfrac{3}{4}.$

Ответ: $\dfrac{3}{4}.$

$f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 4\pi x + 41} + \cos x.$

Решение:

Рассмотрим знаменатель дроби $x^2 + 4\pi x + 41,\ \ a = 1,\ \ 1 > 0,$ ветки вверх, этот трехчлен имеет наименьшее значение, а дробь $\dfrac{8}{x^2 + 4\pi x + 41}$ имеет наибольшее значение.

Функция $f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 4\pi x + 41} + \cos x$ имеет наибольшее значение, которое усиливается тогда, когда $\cos x$ принимает наибольшее значение.

$m = -\dfrac{b}{2a};\ \ m = -\dfrac{4\pi}{2 \cdot 1} = -2\pi -$ абсцисса вершины параболы.

$y(m) = y(-2\pi) = (-2\pi)^2 + 4\pi \cdot (-2\pi) + 41 = 4\pi^2 - 8\pi^2 + 41 = 41 - 4\pi^2.$

Наименьшее значение функции $\varphi(x) = x^2 - 4\pi x + 41$ равна $41 - \pi n^2.$

Оно же - наибольшее значение дроби $\dfrac{8}{x^2 + 4\pi x + 41}.$

Наибольшее значение функции $y = \cos x$ равно 1.

Итак, Наибольшее значение функции $f(x)$ при $x = -2\pi.$

$f(-2\pi) = \dfrac{8}{(-2\pi)^2 + 4\pi(-2\pi) + 41} + \cos(-2\pi) = \dfrac{8}{4\pi^2 - 8\pi^2 + 41} + \cos 2\pi = \dfrac{8}{41 - 4\pi^2} + 1 =$

$= \dfrac{8 + 41 - 4\pi^2}{41 - 4\pi^2} = \dfrac{49 - 4\pi^2}{41 - 4\pi^2}.$

Ответ: $\dfrac{49 - 4\pi^2}{41 - 4\pi^2}.$

Найти наибольшее значение функции $f(\alpha) = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$ при $0 \leq \alpha \leq 2\pi.$

Решение:

Преобразуем выражение $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$:
Можно применить формулу суммы кубов в таком виде
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\sin^2\alpha\right)^3+\left(\cos^2\alpha\right)^3=\underbrace{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^3}_{1}-3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=$$

$$=1-3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot 1=1-3\cdot\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cdot 2}=1-\frac{3}{4}(\sin 2\alpha)^2=1-\frac{3}{4}\cdot\sin^2 2\alpha=$$

$$=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4\alpha}{2}=1-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 4\alpha}{2}\right)=1-\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cos 4\alpha=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4\alpha=\frac{5+3\cos 4\alpha}{8}.$$

Рассматривая начало и конец этой математической фразы, видим, что

$$\frac{1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha}=\frac{8}{5+3\cos 4\alpha}.$$

Последнее выражение удобное для анализа. Оно приобретает наибольшее значение тогда, когда знаменатель $5+\cos 4x$ наименьшее значение, то есть, при $\cos 4\alpha=-1,\ 4\alpha=\pi+2\pi n;\ f(\alpha)=\frac{8}{5+3\cdot(-1)}=\frac{8}{5-3}=\frac{8}{2}=4.\ \alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$

Ответ: 4.

Идею нахождения наибольшего или наименьшего значения квадратного трехчлена можно использовать при решении уравнений типа

$$2^{2\lg x}-2\sin y+2{,}5=2^{\lg x+1}+\frac{1}{2}\cos 2y.$$

Решение:

$$2^{2\lg x}-2^{2\lg x+1}=\frac{1}{2}\cos 2y+2\sin y-2{,}5;$$

$$(2\lg x)^2-2\cdot 2^{\lg x}=\frac{1}{2}\left(\cos^2 y-\sin^2 y\right)+2\sin y-2{,}5;$$

$$\underbrace{\left(2^{\lg x}\right)^2-2\cdot 2^{\lg x}+1}_{1}-1=\frac{1}{2}\left(1-\sin^2 y-\sin^2 y\right)+2\sin y-2{,}5;$$

$$\left(2^{\lg x}-1\right)^2-1=\frac{1}{2}\left(1-2\sin^2 y\right)+2\sin y-2{,}5;$$

$$\left(2^{\lg x}-1\right)^2=\frac{1}{2}-\sin^2 y+2\sin y-2{,}5+1;$$

$$\left(2^{\lg x}-1\right)^2=-\left(\sin^2 y+2\sin y+1\right);$$

$$\left(2^{\lg x}-1\right)^2=-(\sin y-1)^2;$$

$$\left(2^{\lg x}-1\right)^2+(\sin y-1)^2=0;$$

Левая часть уравнения равна нулю тогда, когда каждый из слагаемых равен нулю:

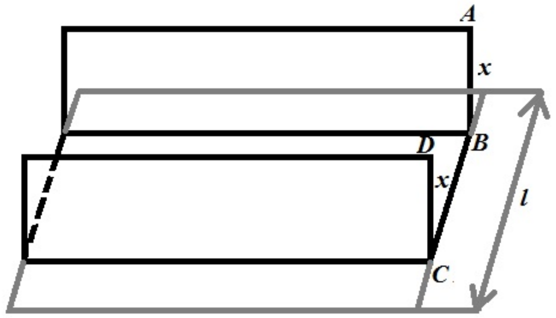
$$\left(2^{\lg x}-1\right)^2=0;\ 2^{\lg x}-1=0;\ 2^{\lg x}=1;\ 2^{\lg x}=2^0;\ \lg x=0;\ x=1.$$

$$(\sin y-1)^2=0;\ \sin y=1;\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $\left(1;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right), k\in Z.$

Задача. Из прямоугольного листа жести шириной l надо выгнуть желоб с наибольшей площадью прямоугольного сечения. Определить высоту бортов желоба.

Решение:



Пускай $AB = x,$ тогда $CD = x,$ а $BC = l - 2x.$ Прямоугольное сечение желоба имеет площадь $S = AB \cdot BC,\ \ S = x \cdot (l - 2x).$

$S = lx - 2x^2 = -2x^2 + lx.$

$S = -2x^2 + lx -$ квадратичная функция. Графиком является парабола, направленная ветвями вниз. Поэтому функция $S = -2x^2 + lx$ має найбільше значення.

$m = -\dfrac{b}{2a};\ \ m = -\dfrac{l}{-2 \cdot 2} = \dfrac{l}{4};\ \ x = \dfrac{l}{4} -$ высота борта.

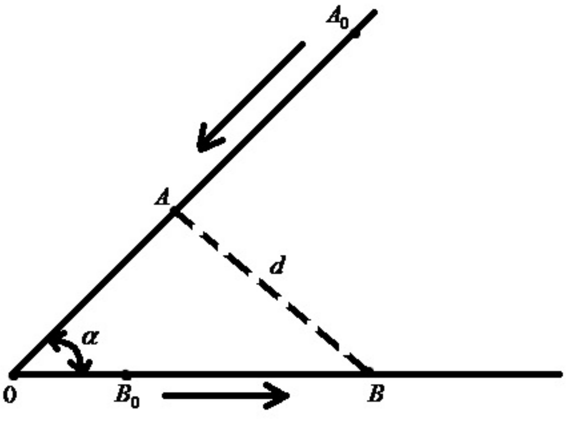
Ответ: $\dfrac{l}{4}.$

Две точки A и B движутся по прямым, что пересекаются и образуют угол $\alpha = \dfrac{\pi}{3}.$ В начальный момент времени $t = 0$ точки занимали положение A_0 и $B_{0.}$ $A_0O = 8$ м, $B_0O = 2$ м. Движение показано стрелками.

Через сколько секунд расстояние d между точками A и B будет наименьшим, если скорости точек $\vartheta_A = 2$ м/сек, $\vartheta_B = 3$ м/сек.

Найти наименьшее расстояние между точками A и B.

Решение:



Пусть прошло t (с) от начала движения точек. Тогда путь $A_0A = \vartheta_A \cdot t = 2 \cdot t$ *(м).* $B_0B = \vartheta_B \cdot t = 3 \cdot t$ *(м).* Путь $AO = A_0O - A_0A = (8 - 2t)м.$ $BO = OB_0 + B_0B = (2 + 3t)м.$ Применим теорему косинусов к треугольнику AOB:

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB;$

$$d^2 = (8 - 2t)^2 + (2 + 3t)^2 - 2 \cdot (8 - 2t) \cdot (2 + 3t) \cos \frac{\pi}{3} =$$

$$= 64 - 32t + 4t^2 + 4 + 12t + 9t^2 - \left(32 + 48t + 8t + 12t^2\right) \cdot \frac{1}{2} = 19t^2 - 40t + 52.$$

$19 > 0,$ а потому функция $d^2 = 19t^2 - 40t + 52$ принимает наименьшего значения.

$m = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{20}{9};\ \ t = \dfrac{20}{19} сек.$

$$n=d^2(m)=\frac{19}{1}\cdot\left(\frac{20}{19}\right)^2-\frac{40}{1}\cdot\frac{20}{19}+52=\frac{400}{19}-\frac{800}{19}+52=-\frac{400}{19}+\frac{52}{1}=\frac{-400+988}{19}=\frac{588}{19};$$

$$d_{найм}=\sqrt{\frac{588}{19}}\,(м)\approx 5{,}6\,(м).$$

Ответ: $1\frac{1}{19}$ *сек,* $\approx 5{,}6\,(м)$.

Найти все пары чисел *(x* и *y)*, которые удовлетворяют уравнение:

$$16\sin^2 x\cdot\sin^2 y+tg^2x\cdot tg^2y+18=24\cdot\sin x\cdot\sin y+6tgx\cdot tgy.$$

Решение:

$$16\sin^2 x\cdot\sin^2 y-24\cdot\sin x\cdot\sin y+3^2+tg^2x\cdot tg^2y-6tgx\cdot tgy+9=0;$$

$$(4\sin x\cdot\sin y-3)^2+(tgx\cdot tgy-3)^2=0.$$

Ця рівність можлива тільки при

<table>
<tr>
<td>

$(4\sin x\cdot\sin y-3)^2=0;$

$4\sin x\cdot\sin y-3=0;$

$\sin x\cdot\sin y=\frac{3}{4};$

Решим следующую систему уравнений:

$$+\begin{cases}\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{4},\\ \sin x\cdot\sin y=\frac{3}{4}.\end{cases}$$

$\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y=1;$

$\cos(x-y)=1.$

$x-y=2\pi m,\ m\in Z.$

$$+\begin{cases}x-y=2\pi m,\\ x+y=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n.\end{cases}$$

$2x=\pm\frac{2}{3}\pi m+2\pi n\ \ |:2$

$x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(m+n), m,n\in Z.$

</td>
<td>

$(tgx\cdot tgy-3)^2=0;$

$tgx\cdot tgy-3=0;$

$\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin y}{\cos y}=3;$

$\cos x\cdot\cos y=\frac{\sin x\cdot\sin y}{3};$

$\cos x\cdot\cos y=\frac{\frac{3}{4}}{3}=\frac{1}{4};$

$$-\begin{cases}\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{4},\\ \sin x\cdot\sin y=\frac{3}{4}.\end{cases}$$

$\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y=-\frac{1}{2};$

$\cos(x+y)=-\frac{1}{2}.$

$x+y=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n,\ n\in Z.$

$$-\begin{cases}x-y=2\pi n,\\ x+y=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n.\end{cases}$$

$-2y=2\pi n-2m\pi\pm\frac{2\pi}{3}\ \ |:(-2)$

$x=\pi(n-m)\pm\frac{\pi}{3}, n,m\in Z.$

</td>
</tr>
</table>

Ответ: $\left(\pm\frac{\pi}{3}+\pi(m+n);\ \pi(n-m)\pm\frac{\pi}{3}\right), n,m\in Z.$

$$\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)\cdot\left(1+\sin^2(x+y)\right)=1+7\cos^2(x+y).$$

Решение:

Воспользуемся соотношением между средним арифметическим и средним геометрическим двух выражений:

$$\frac{x^2+\frac{16}{x^2}}{2}\ge\sqrt{x^2\cdot\frac{16}{x^2}};\ \ \frac{x^4+16}{2x^2}\ge\sqrt{16};\ \ \frac{x^4+16}{2x^2}\ge 4;\ \ x^4-8x^2+16\ge 0.$$

$y(x)=x^4-8x^2+16=(x^2-4)^2$. Функция имеет наименьшее значение 0 при

$$x^2-4=0,\ \ (x-2)\cdot(x+2)=0,\ \ \left[\begin{array}{l}x-2=0,\\ x+2=0.\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=-2.\end{array}\right.$$

При этих значениях x выражение $x^2+\frac{16}{x^2}=2^2+\frac{16}{2^2}=4+4=8.$ $1+\sin^2(x+y)\ge 1.$

Итак, левая часть равенства $\ge 8,$ то есть, ее наименьшее значение равно 8.

Правая часть $1+7\cos^2(x+y)\le 8.$ Поэтому уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}x=\pm 2,\\ \sin^2(x+y)=0,\\ \cos^2(x+y)=1.\end{cases}$$ Эта система эквивалентна совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2,\\ \sin^2(x+y)=0,\\ \cos^2(x+y)=1.\end{cases}\ \begin{cases}x=2,\\ x+y=\pi n\end{cases}\ \begin{cases}x=2,\\ 2+y=\pi n\end{cases}\ \begin{cases}x=2,\\ y=-2+\pi n.\end{cases}\\ \begin{cases}x=-2,\\ \sin^2(x+y)=0,\\ \cos^2(x+y)=1.\end{cases}\ \begin{cases}x=-2,\\ x+y=\pi n\end{cases}\ \begin{cases}x=-2,\\ -2+y=\pi n\end{cases}\ \begin{cases}x=-2,\\ y=2+\pi n.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\{(2;\ -2+\pi n),\ (2;\ 2+\pi n)\},\ n\in Z.$

$$\cos^4 x+\sin^4 x-\frac{3}{2}\sin^2 2x=-2y^2+4y-3.$$

Решение:

$$(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x-\frac{3}{2}\sin^2 2x=-2(y^2-2y+1{,}5);$$

$$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x-\frac{3}{2}\sin^2 2x=-2\cdot(y^2-2y+1+0{,}5);$$

$$1-2\sin^2 2x=-2\cdot(y-1)^2-1,\ \ 2-2\sin^2 2x-2(y-1)^2=0,$$

$$2(1-\sin^2 x)+2(y-1)^2=0,\ \ 2\cos^2 x+2(y-1)^2=0\ \ |:2\ \ \cos^2 x+(y-1)^2=0.$$

$\cos x=0,$

$y-1=0,$

$y=1.$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n.$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ 1\right).$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)\cdot\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\cos 2x=-2y^2+12y-19.$$

Решение:

$$\sin 2x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \cos 2x = -2(y^2 - 6y + 9{,}5);$$
$$\sin 2x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 2x = -2((y^2 - 6y + 9) + 0{,}5);$$
$$\sin(2x + x) = -2((y-3)^2 - 1);$$
$$\sin 3x + 1 + 2(y-3)^2 = 0;$$
$$\frac{2tg\frac{3x}{2}}{1 + tg^2\frac{3x}{2}} + 1 + 2(y-3)^2 = 0;$$
$$\frac{2tg\frac{3x}{2} + 1 + tg^2\frac{3x}{2}}{1 + tg^2\frac{3x}{2}} + 2(y-3)^2 = 0;$$
$$\frac{\left(tg\frac{3x}{2} + 1\right)^2}{1 + tg^2\frac{3x}{2}} + 2(y-3)^2 = 0, \quad \left[\begin{array}{l} \left(tg\frac{3x}{2} + 1\right)^2 = 0, \\ 2(y-3)^2 = 0. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} tg\frac{3x}{2} + 1 = 0, \\ y - 3 = 0. \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} tg\frac{3x}{2} = -1, \\ y = 3. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{3}{2}x = -arctg1 + \pi n, \\ y = 3. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{3}{2}x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \\ y = 3. \end{array}\right.$$
$$x = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\pi n; \quad x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n.$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n;\ 3\right),\ n \in Z.$

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = y^2 - 4y + 5.$$

Решение:

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = (y^2 - 4y + 4) + 1; \quad \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} - 1 - (y-2)^2 = 0; \quad \frac{2tg\frac{x}{2} - 1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} - (y-2)^2 = 0;$$
$$\frac{-\left(tg\frac{x}{2} - 1\right)^2}{1 + tg^2\frac{x}{2}} - (y-2)^2 = 0; \quad \frac{-\left(tg\frac{x}{2} - 1\right)^2}{1 + tg^2\frac{x}{2}} - (y-2)^2 = 0 \ \Big| \cdot (-1); \quad \frac{\left(tg\frac{x}{2} - 1\right)^2}{1 + tg^2\frac{x}{2}} + (y-2)^2 = 0;$$
$$tg\frac{x}{2} - 1 = 0; \quad tg\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ 2\right),\ n \in Z.$

Чтобы решить уравнение второй степени с двумя переменными целесообразно воспользоваться таким алгоритмом:

1) свести левую и правую части уравнения к квадрату двучлена, позаботившись о том, чтобы различные части уравнения имели противоположные знаки;

2) собрать все члены уравнения в левой части, а правую сделать нулем;

3) исходя из истины, когда сумма квадратов равна нулю, то каждый из слагаемых равен нулю, найти все значения переменных, удовлетворяющих исходное уравнение.

$$\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=2y^2-4y+3.$$

Решение:

$$\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=2\left(y^2-4y+1{,}5\right),\quad \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=2\left(y-1\right)^2+1;\quad \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}-1-2\left(y-1\right)^2=0;$$

$$\frac{1-tg^2\frac{x}{2}-1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}-2\left(y-1\right)^2=0;\quad \frac{-2tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}-2\left(y-1\right)^2=0\ \left|:\left(-2\right);\right.\quad \frac{tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+\left(y-1\right)^2=0;$$

$$\frac{tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=0;\quad tg^2\frac{x}{2}=0,\quad tg\frac{x}{2}=0,\quad \frac{x}{2}=\pi n,\quad x=2\pi n.$$

Ответ: $\left(2\pi n;\ 1\right)$.

Задания для самостоятельной работы:

Найти наименьшее значение функции $y=x^2-8x+12$.

Ответ: -4.

Найти наибольшее значение функции $y=-x^2-8x+20$.

Ответ: 4.

Найти наибольшее значение выражения $\frac{tg\alpha-tg\alpha}{\cos 4\alpha+1}$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

Ответ: 2 при $\alpha=\frac{\pi}{8}$.

Найти все значения *x* и *y,* которые удовлетворяют уравнение

$$\cos^4 x+\sin^4 x-\frac{3}{2}\sin^2 2x=-2y^2+4y-3.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ 1\right),\ n\in Z.$

$$\frac{2tg\frac{3}{2}x}{1+tg^2\frac{3}{2}x}=2y^2-8y+9.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3};\ 2\right),\ n\in Z.$

Из всех прямоугольников данного периметра *2P* найти тот, у которого площадь наибольшая.

Ответ: *квадрат со стороной* $\frac{P}{2}$.

С проволоки длиной *l см* надо изготовить модель прямоугольного параллелепипеда наибольшего объема. Определить длины ребер параллелепипеда.

Ответ: *куб с ребром* $\frac{l}{12}$.

Найти все значения x и y, удовлетворяющие уравнение $\frac{2tg\frac{3}{2}x}{1+tg^2\frac{3}{2}x} = 2y^2 - 8y + 9.$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi n;\ 2\right),\ n \in Z.$