Раздел 17
Доказательство тригонометрических неравенств

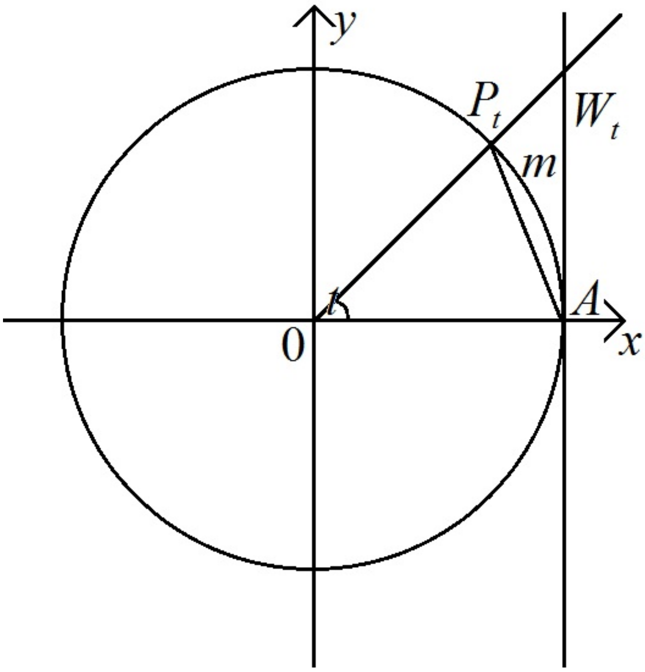
При решении упражнений на доказательство тригонометрических неравенств необходимо осуществить такие преобразования, в результате которых приходим к неравенству вида $|\sin x| \le 1$ или $|\cos x| \le 1$.

Доказать, что при $0 < t < \frac{\pi}{2}$ справедливы неравенства:

$$\sin t < t < tgt,$$

$$\cos t < \frac{\sin t}{t} < 1.$$

Доказательство:



В первой четверти единичного круга выберем точку P_t, что соответствует действительному числу *t*. Проведя в эту точку единичный радиус OP_t, получим $\angle P_tOA = t$ *(в радианах)*. Сравним площади сектора P_tOAm и треугольника OAW_t:

прямая AW_t – ось тангенсов, касающаяся окружности в точке A, а потому $OA \perp AW_r$.

$S_{OAW_t} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |AW_t| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |AW_t| = \frac{1}{2}tgt.$

$S_{AOP_t} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OP_t| \cdot \sin t = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin t = \frac{1}{2}\sin t.$

Поскольку окружность - касательная, то $r = 1$, а ее площадь круга $S = \pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi.$

Ее можно рассматривать как площадь сектора в 2π радиан. Тогда возможна такая пропорция:

$$2\pi_{рад} - \pi \qquad x=\frac{t\cdot\pi}{2\pi}=\frac{t}{2}.$$
$$t_{рад} - x$$

Итак, площадь сектора $S_{AOMP_t}=\frac{t}{2}.$

Из рисунка видно, что $S_{\Delta OAP_t}<S_{OAMP_t}<S_{\Delta OAW_t}.$

Подставив в двойное неравенство значения площадей, получим неравенство:

$$\frac{1}{2}\sin t<\frac{t}{2}<\frac{1}{2}tgt \;\Big|\cdot 2,$$

$$\sin t<t<tgt\;(A).$$

Так как функция Синус в первой координатной четверти положительная, то поделив последнее неравенство на $\sin t>0,$ получим верное неравенство:

$$\frac{\sin t}{\sin t}<\frac{t}{\sin t}<\frac{tgt}{\sin t};$$

$$1<\frac{t}{\sin t}<\frac{1}{\cos t} \text{ либо}$$

$$\cos t<\frac{\sin t}{t}<1.(B)$$

что и требовалось доказать.

Доказать, что $\sin 1>\frac{\pi}{4}.$

Доказательство:

По формулам сведения $\sin 1=\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\cos\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right).$

Используем неравенство A:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right)<\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$ Возведем обе части в квадрат:

$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right)<\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)^2,$ тогда $1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)>1-2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)^2;$

$$1-2\cdot\left(\frac{\pi^2}{16}-2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2}+1\right)-1-\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}=\frac{4-\pi^2+4\pi}{8}=-\frac{(2-\pi)^2}{8}<0;$$

$1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)>\frac{\pi}{4}.$ Что и требовалось доказать.

Доказать, что при $0<t<\frac{\pi}{2}$ правильное неравенство $t-\frac{t^3}{4}<\sin t.$

Доказательство:

Из неравенства $\frac{t}{2}<\frac{tgt}{2}$ следует, что $\frac{t}{2}<tg\frac{t}{2}\Big|\cdot 2\cos^2\frac{t}{2},\; t\cdot\cos^2\frac{t}{2}<tg\frac{t}{2}\cdot 2\cos^2\frac{t}{2}$

$$\to t\cos^2\frac{t}{2}<\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}\cdot 2\cos^2\frac{t}{2},\; t\cdot\cos^2\frac{t}{2}<2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2},\; t\cdot\cos^2\frac{t}{2}<\sin t.$$

Поскольку $\sin\frac{t}{2}<\frac{t}{2}$ і $\cos^2\frac{t}{2}=1-\sin^2\frac{t}{2},$ то $t\cdot\left(1-\sin^2\frac{t}{2}\right)<\sin t.$

Заменим $\sin\frac{t}{2}$ на $\frac{t}{2}$ (в левой части) $t\cdot\left(1-\frac{t^2}{2}\right)<\sin t,\ t-\frac{t^3}{2}<\sin t,$ что и требовалось доказать.

Доказать неравенство $\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha<\frac{3}{4}.$

Доказательство

$$\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha=\sin 2\alpha\cdot(\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha)=\sin 2\alpha\cdot\frac{\cos(\alpha-3\alpha)-\cos(\alpha+3\alpha)}{2}=$$

$$=\sin 2\alpha\cdot\frac{\cos\alpha-\cos 4\alpha}{2}=\sin 2\alpha\cdot\frac{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}{2}=\frac{(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha-\sin 2\alpha\cdot\cos 4\alpha)\cdot 2}{2\cdot 2}=$$

$$=\frac{2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha-2\sin 2\alpha\cdot\cos 4\alpha}{4}=\frac{\sin 4\alpha-2\cdot\frac{\sin(-2\alpha)+\sin 6\alpha}{2}}{4}=\frac{\sin 4\alpha+\sin 2\alpha-\sin 6\alpha}{4}.$$

Функция $y=\sin t$ существует при $|\sin t|\le 1.$

Если бы $\sin 4\alpha=1,\ \sin 2\alpha=1,\ -\sin 6\alpha=1,$ то числитель последней дроби равнялся бы $1+1+1=3,$ а так как $\sin 2\alpha$ и $\sin 4\alpha$ одновременно быть равны единице не могут, то эта сумма $<3.$

Действительно, $\sin 4\alpha=2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha,$ если $\sin 2\alpha=1,$ то $\sin 4\alpha=2\cdot 1\cdot 0=0\neq 1.$

Значит, $\frac{\sin 4\alpha+\sin 2\alpha-\sin 6\alpha}{4}<\frac{3}{4}.$

Доказать, что неравенство $\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x-\sin x)}>8$ при $0<x<\frac{\pi}{4}.$

Доказательство

Очевидно, что $\cos x\neq 0$ и тогда $\cos^3 x\neq 0.$

Разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos^3 x$:

$$\frac{\frac{\cos x}{\cos^3 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x\cdot\left(\frac{\cos x}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x\cdot(1-tgx)}=\frac{1+tg^2 x}{tg^2 x\cdot(1-tgx)}=\frac{(1-tgx)^2+2tgx}{tg^2 x(1-tgx)}=$$

$$=\frac{(1-tgx)^2}{tg^2 x(1-tgx)}+\frac{2tgx}{tg^2 x(1-tgx)}=\frac{1-tgx}{tg^2 x}+\frac{2}{tgx(1-tgx)}\quad(A)$$

Так как $0<x<\frac{\pi}{4},$ то $tgx>0$ и $1-tgx>0.$

При $tgx=\frac{1}{2}$ значение выражения $\frac{2}{tgx(1-tgx)}=\frac{2}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}=8.$

Значение выражения A - положительное.

Значит, $\frac{\cos x}{\sin^2 x\cdot(\cos x-\sin x)}>8$ при $0<x<\frac{\pi}{4}.$ Неравенство доказано.

Доказать неравенство $\sin^8 x+\cos^8 x\ge\frac{1}{8}.$ При каких значениях x достигается неравенство?

Решение:

По основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 x+\cos^2 x=1.$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$(\sin^2 x+\cos^2 x)=1^2.$

$\sin^4 x+2\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\cos^4 x=1;\ \ \sin^4 x+\cos^4 x\ge 2\sin^2 x\cdot\cos^2 x;\ \ \sin^4 x+\cos^4 x\ge\dfrac{1}{2};$

$(\sin^4 x+\cos^4 x)^2=\sin^8 x+2\sin^4 x\cdot\cos^4 x+\cos^8 x\ge\dfrac{1}{4};\ \ \sin^8 x+\cos^8 x\ge 2\sin^4 x\cdot\cos^4 x.$

Значит, $\sin^8 x+\cos^8 x\ge\dfrac{1}{8}.$

Знак равенства достигается при $\sin x=\cos x|:\cos x,\ \ tgx=1,\ \ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z.$

Доказать неравенство $(x+y)\cdot(x+y+2\cos x)+2\ge 2\sin^2 x.$

При каких значениях x и y достигается равенство?

$(x+y)\cdot(x+y)+(x+y)\cdot 2\cos x+2-2\sin^2 x\ge 0;$

$(x+y)^2+(x+y)2\cos x+2(1-\sin^2 x)\ge 0;$

$(x+y)^2+2(x+y)\cos x+2\cos^2 x\ge 0;$

$\underbrace{(x+y)^2+2(x+y)\cos x+\cos^2 x}_{\text{квадрат двочлена}}+\cos^2 x\ge 0;$

$(\underbrace{(x+y)+\cos x)^2}_{\ge 0}+\underbrace{\cos^2 x}_{\ge 0}\ge 0.$

Поскольку оба слагаемые неотъемлемые, то и их сумма - неотъемлемая.

Неравенство доказано.

Равенство достигается тогда, корда

$\begin{cases} x+y+\cos x=0,\\ \cos^2 x=0.\end{cases}\ \begin{cases} x+y=0,\\ \cos x=0.\end{cases}\ \begin{cases} y=-x,\\ \cos x=0.\end{cases}$

Решая второе уравнение системы, получим $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, y=-\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n;-\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right), n\in Z.$

Доказать, что $-4\le\cos 2x+3\sin x\le 2\dfrac{1}{8}.$

Доказательство

Рассмотрим функцию $y=\cos 2x+3\sin x.$ Упростим ее:

$y=\cos 2x+3\sin x=\cos^2 x-\sin^2 x+3\sin x=1-\sin^2 x-\sin^2 x+3\sin x=-2\sin^2 x+3\sin x+1.$

Это квадратичная функция относительно $\sin x.$

Пускай $\sin x=t,$ тогда $y=-2t^2+3t+1,\ \ -1\le t\le 1,\ -2<0$ поэтому ветки параболы направлены вниз. Найдем координаты вершины параболы: $t_0=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-3}{-2\cdot 2}=\dfrac{3}{4};$

$\dfrac{3}{4}\in[-1;1]$

$y_0=y(t_0)=-2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+3\cdot\dfrac{3}{4}+1=-2\cdot\dfrac{9}{16}+\dfrac{9}{4}+1=-\dfrac{18}{16}+\dfrac{9}{4}+1=\dfrac{-18+36+16}{16}=\dfrac{34}{16}=2\dfrac{2}{16}=2\dfrac{1}{8};$

$2\dfrac{1}{8}-$ наибольшее значение функции.

Найдем значение этой функции на концах $[-1;1]$:

$y(-1) = -2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1 = -2 - 3 + 1 = -4;$
$y(1) = -2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = -2 + 3 + 1 = 2.$

Итак, наименьшее значение функции на $[-1;1]$ равно $-4,$ а наибольшее значение $2\frac{1}{8}.$

Таким образом, $-4 \le \cos 2x + 3\sin x \le 2\frac{1}{8}.$

Доказать, что $0 < \sin^8 x + \cos^{14} x \le 1.$

Доказательство

Так как $\sin x \le 1,$ $\sin^2 x \le 1,$ $\cos x \le 1,$ $\cos^2 x \le 1$ для любых x. Тогда $\sin^8 x \le \sin^2 x,$ $\cos^{14} x \le \cos^2 x.$ Добавим почленно эти неравенства: $\sin^8 x + \cos^{14} x \le \sin^2 x + \cos^2 x,$ $\sin^8 x + \cos^{14} x \le 1.$

Что и требовалось доказать.