Раздел 12
Системы уравнений

Два или более уравнения с *n* переменными образуют систему тогда, когда нужно найти их общие решения.
Решением системы уравнений с *n* переменными называется такая упорядоченная *n*-ка чисел, которая преображает каждое уравнение в правильное числовое равенство.
Решить систему уравнений значит найти множество всех ее решений или показать, что она решений не имеет.
Система, которая имеет решения, называются совместной, а не имеющая решений - несовместимой или противоречивой.
Тот факт, что заданная система записываются с помощью фигурной скобки, написанной слева от столбика уравнений.
Система уравнений *(A)* называются следствием системы *(B)*, если все решения системы *(B)* являются решениями системы *(A)*.
Этот факт записываются так: $B \Rightarrow A.$
Две системы уравнений называются равносильными или эквивалентными, если каждая из них является следствием другой. $B \Leftrightarrow A.$
Две системы называются равносильными и тогда, когда они обе не имеют решений.
Есть три традиционных способа решения систем двух уравнений:

1) способ подстановки;
2) способ алгебраического сложения;
3) способ сравнения.

Суть этого способа заключается в том, что с обеих уравнений системы выражают одну и ту же переменную, например *y* через *x*. Образуют третье уравнение относительно переменной *x* и решают его. Находят значение другой переменной. Записывают в ответ.

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 + 2x + 3y = 6, (1) \\ 2x - y = 3. (2) \end{cases}$$

Решение:

Решим эту систему способом подстановки. Из уравнения (2) имеем:
$y = 2x - 3.$

Подставим значения в уравнение (1):

$$x^2 - 3x(2x-3) + (2x-3)^2 + 2x + 3(2x-3) = 6,$$
$$x^2 - 6x^2 + 9x + 4x^2 - 12x + 9 + 2x + 6x - 9 = 6,$$
$$-x^2 + 5x - 6 = 0 \,|\cdot(-1)$$

$x^2 - 5x + 6 = 0.$ По теореме Виета: $\left[\begin{array}{l} x_1 = 2,\ \ y_1 = 2\cdot 2 - 3 = 1 \\ x_2 = 3\ \ \ y_2 = 2\cdot 3 - 3 = 3 \end{array}\right.$

Ответ: $(2;1)$, $(3;3)$.

$$\begin{cases} x - y = 8, (1) \\ x \cdot y = -15\,(2) \end{cases}$$

Решение:

Из уравнения (1) выразим переменную y через x: $y = x - 8$;

Подставим значение y в уравнение (2):

$x \cdot (x - 8) = -15,\ -8x + x^2 + 15 = 0,\ x^2 - 8x + 15 = 0.$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 3,\ \ y_1 = 3 - 8 = -5, \\ x_2 = 5\ \ \ y_2 = 5 - 8 = -3 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} y_1 = -5, \\ y_2 = -3. \end{array}\right.$$

Ответ: $(3; -5),\ (5; -3).$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, (1) \\ x - y = 2\,(2) \end{cases}$$

Решение:

Возведем обе части уравнения (2) в квадрат:

$(x - y)^2 = 2^2,\ \ x^2 - 2xy + y^2 = 4$ *(3)*.

Отнимем уравнение (1) от (3):

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{l} x^2 - 2xy + y^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 34 \end{array} \\ \hline -2xy = -30 : (-2) \\ xy = 15\,(4). \end{array}$$

Рассмотрим систему уравнений (2): (4):

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 15 \end{cases} \begin{cases} y = x - 2, \\ x(x - 2) = 15 \end{cases} \begin{cases} y = x - 2, \\ x^2 - 2x - 15 = 0 \end{cases} \begin{cases} y_1 = -5; y_2 = 3, \\ x_1 = -3; x_2 = 5. \end{cases}$$

Ответ: $-(3; -5),\ (5; 3).$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 40,\ (1) \\ xy = 21\ (2) \end{cases}$$

Решение:

Возведем обе части уравнения (2) в квадрат:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 40, \\ x^2 y^2 = 441. \end{cases} \begin{cases} x^2 + (-y^2) = 40, \\ x^2 \cdot (-y^2) = 441. \end{cases}$$

На основании теоремы Виета составляем вспомогательное уравнение: $t^2 - 40t - 441 = 0.$ По теореме Виета: $t_1 = -9,\ t_2 = 49.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 = -9, \\ -y^2 = 49. \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 = 49, \\ -y^2 = -9. \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 = -9, \\ y^2 = -49. \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 = 49, \\ y^2 = 9. \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing \\ x \in \varnothing \\ x_1 = -7 \\ x_2 = 7 \\ y_1 = -3 \\ y_2 = 3 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x_1 = -7 \\ y_1 = -3 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x_2 = 7 \\ y_2 = 3 \end{array}\right.$$

Ответ: $(-7;\ -3),\ (7;\ 3).$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 80, & (1) \\ xy = 32 & (2) \end{cases}$$

Решение:

Умножим уравнение (2) на 2: $2xy = 64$ *(3)*.

Добавим уравнения (1) і (3):

$$+\begin{cases} x^2 + y^2 = 80, \\ 2xy = 64 \end{cases}$$

$x^2 + 2xy + y^2 = 144;$

$(x + y)^2 = 144;$

$\sqrt{(x + y)^2} = \sqrt{12^2}.$

$|x + y| = |12|;$

Поскольку $12 > 0,$ то $|12| = 12.$

$|x + y| = 12.$ *(4)*

Отнимем уравнение (1)–(3):

$$-\begin{cases} x^2 + y^2 = 80, \\ 2xy = 64 \end{cases}$$

$x^2 - 2xy + y^2 = 144;$

$(x - y)^2 = 4^2;$

$\sqrt{(x - y)^2} = \sqrt{4^2}.$

$|x - y| = |4|;$

Поскольку $4 > 0,$ то $|4| = 4.$

$|x - y| = 4$ *(5)*.

Из уравнений (4) и (5) образуем систему:

$\begin{cases} |x + y| = 12, \\ |x - y| = 4. \end{cases}$ По свойствам модуля числа имеем:

$\begin{cases} x + y = \mu 12, \\ x - y = \mu 4. \end{cases}$ С этой совокупности создадим совокупность четырех систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}
\begin{cases} x + y = -12, \\ x - y = -4. \end{cases} \quad +\begin{cases} x + y = -12 \\ x - y = -4 \end{cases} \quad 2x = -16; x = -8 \quad \begin{cases} -8 + y = -12 \\ x = -8 \end{cases} \left[\begin{array}{l} y = -4, \\ x = -8. \end{array}\right. \\
\begin{cases} x + y = -12, \\ x - y = 4. \end{cases} \quad +\begin{cases} x + y = -12 \\ x - y = 4 \end{cases} \quad 2x = -8; x = -4 \quad \begin{cases} -4 + y = 12 \\ x = -4 \end{cases} \left[\begin{array}{l} y = -8, \\ x = -4. \end{array}\right. \\
\begin{cases} x + y = 12, \\ x - y = -4. \end{cases} \quad +\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = -4 \end{cases} \quad 2x = 8; x = 4 \quad \begin{cases} 4 + y = 12 \\ x = 4 \end{cases} \left[\begin{array}{l} y = 8, \\ x = 4. \end{array}\right. \\
\begin{cases} x + y = 12, \\ x - y = 4. \end{cases} \quad +\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 4 \end{cases} \quad 2x = 16; x = 8 \quad \begin{cases} 8 + y = 12 \\ x = 8 \end{cases} \left[\begin{array}{l} y = 4, \\ x = 8. \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Ответ: $(-4; -8), (-8; -4), (4; 8), (8; 4).$

$2x^2 - 15xy + 4y^2 - 12x + 45y - 24 = 0,$ (1)

$x^2 + xy - 2y^2 - 3x + 3y = 0$ (2)

Решение:

Запишем уравнение (2) как квадратное относительно *x:*

$x^2 + (xy - 3x) + (3y - 2y^2) = 0;$ $x^2 + (y - 3)x + 3y - 2y^2 = 0;$ (3)

$$D=(y-3)^2-4\cdot\left(3y-2y^2\right)=y^2-6y+9-12y+8y^2=9y^2-18y+9=$$
$$=9\cdot\left(y^2-2y+1\right)=3^2\cdot(y-1)^2=(3\cdot(y-1))^2.$$
$$x_1=\frac{-(y-3)-\sqrt{(3\cdot(y-1))^2}}{2}=\frac{-y+3-3\cdot(y-1)}{2}=\frac{-y+3-3y+3}{2}=\frac{6-4y}{2}=3-2y;$$
$$x_2=\frac{-y+3+3y-3}{2}=\frac{2y}{2}=y.$$
По формуле разложения квадратного трехчлена на множители $ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ разложим на множители левую часть уравнения *(3):*
$$x^2+(y-3)x+3y-2y^2=(x-y)\cdot(x-3+2y);$$
$(x-y)\cdot(x-3+2y)=0.$ Это уравнение равносильно двум уравнениям:
$x-y=0$ і $x+2y-3=0.$
Исходная система уравнений эквивалентна совокупности двух уравнений:
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2-15xy+4y^2-12x+45y-24=0,\\ x-y=0.\end{cases}\\ \begin{cases}2x^2-15xy+4y^2-12x+45y-24=0,\\ x+2y-3=0.\end{cases}\end{array}\right.$$
Каждую систему уравнений совокупности решим способом подстановки:
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=x,\\ 2x^2-15x^2+4x^2-12x+45x-24=0.\end{cases}\\ \begin{cases}x=3-2y,\\ 2\cdot(3-2y)^2-15\cdot(3-2y)\cdot y+4y^2-12\cdot(3-2y)+45y-24=0.\end{cases}\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=x,\\ -9x^2+33x-24=0\,|:(-3).\end{cases}\\ \begin{cases}x=3-2y,\\ 2\cdot\left(9-12y+4y^2\right)-45y+30y^2+4y^2-36+24y+45y-24=0.\end{cases}\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=x,\\ 3x^2+11x+8=0.\end{cases}\\ \begin{cases}x=3-2y,\\ 18-24y+8y^2-45y+30y^2+4y^2-36+24y+45y-24=0.\end{cases}\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=x,\\ 3x^2-11x+8=0\end{cases}\quad D=121-96=25,\ \left[\begin{array}{l}y_1=1,\\ x_1=\dfrac{11-5}{6}=1\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}y_2=\dfrac{8}{3},\\ x_2=\dfrac{16}{6}=\dfrac{8}{3}.\end{array}\right.\\ \begin{cases}x=3-2y,\\ 42y^2-42=0\end{cases}\ \left[\begin{array}{l}x_3=5,\\ y_3=-1\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x_4=1,\\ y_4=1.\end{array}\right.\end{array}\right.$$
Ответ: $(1;1),\left(\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right),(5;-1).$

$$\begin{cases} x^3 = 5x + y, \ (1) \\ y^3 = x + 5y. \ (2) \end{cases}$$

Решение:

Добавим уравнения *(1)* и *(2)*:

$x^3 + y^3 = 6x + 6y;$

$x^3 + y^3 = 6 \cdot (x + y)$ (3)

Отнимем уравнения *(1)* и *(2)*:

$x^3 - y^3 = 4x + 4y;$

$x^3 - y^3 = 4 \cdot (x - y)$ (4).

Рассмотрим систему уравнений *(3)* и *(4)*. Применим для ее решения формулы суммы и разности кубов:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 6 \cdot (x + y), \\ x^3 - y^3 = 4 \cdot (x - y) \end{cases} \begin{cases} (x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2) - 6 \cdot (x + y) = 0, \\ (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2) - 4 \cdot (x - y) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2 - 6) = 0, \\ (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2 - 4) = 0. \end{cases}$$

Эта система уравнений равносильна совокупности четырех систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0. \end{cases} \begin{cases} 2x = 0, \\ x - y = 0. \end{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ y_1 = 0. \end{array}\right. \\ \begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 - xy + y^2 - 6 = 0. \end{cases} \begin{cases} x = y, \\ x^2 - x^2 + y^2 - 6 = 0. \end{cases} \begin{cases} x = y, \\ y^2 - 6 = 0. \end{cases} \begin{cases} x_2 = -\sqrt{6}, \\ y_2 = -\sqrt{6}. \end{cases} \left[\begin{array}{l} x_3 = \sqrt{6}, \\ y_3 = \sqrt{6}. \end{array}\right. \\ \begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + xy + y^2 - 4 = 0. \end{cases} \begin{cases} x = -y, \\ (-y)^2 - y^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases} \begin{cases} x = -y, \\ y^2 = 4. \end{cases} \left[\begin{array}{l} x_4 = 2, \\ y_4 = -2, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x_5 = -2, \\ y_5 = 2. \end{array}\right. \\ +\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 6 = 0, \\ x^2 + xy + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \qquad -\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 6 = 0, \\ x^2 + xy + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$2x^2 + 2y^2 - 10 = 0 \qquad -2xy - 2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 = 5 \ (5) \qquad 2xy = -2 \ (6)$$

Образуем систему из уравнений *(5)* и *(6)*:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 2xy = -2. \end{cases}$$

Добавим и вычтем уравнение этой системы и образуем новую систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 3, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4. \end{cases} \begin{cases} (x + y)^2 - 3 = 0, \\ (x - y)^2 - 7 = 0. \end{cases} \begin{cases} (x + y - \sqrt{3}) \cdot (x + y + \sqrt{3}) = 0, \\ (x - y - \sqrt{7}) \cdot (x - y + \sqrt{7}) = 0. \end{cases}$$

Последняя система равносильна совокупности четырех систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y-\sqrt{3}=0,\\ x+y-\sqrt{7}=0.\end{cases}\\ \begin{cases}x+y-\sqrt{3}=0,\\ x-y+\sqrt{7}=0.\end{cases}\\ \begin{cases}x+y+\sqrt{3}=0,\\ x-y-\sqrt{7}=0.\end{cases}\\ \begin{cases}x+y+\sqrt{3}=0,\\ x-y+\sqrt{7}=0.\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x_6=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right),\\ y_6=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x_7=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right),\\ y_7=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x_8=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right),\\ y_8=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x_9=-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right),\\ y_9=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right).\end{array}\right.$$

Ответ: $(0;\ 0),\ \left(-\sqrt{6};\ -\sqrt{6}\right),\ \left(\sqrt{6};\ \sqrt{6}\right),\ (2;\ -2),\ (-2;\ 2),\ \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2};\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right),$ $\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2};\ \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2};\ \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right).$

$$\begin{cases}3x^2+2xy+y^2=11,\\ x^2+2xy+3y^2=17.\end{cases}$$

Решение:

Введем новую переменную $x=t\cdot y.$ Тогда система сводится к такой:

$$\begin{cases}3\cdot(ty)^2+2y(ty)+y^2=11,\\ (ty)^2+2y(ty)+3y^2=17.\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}3t^2y^2+2ty^2+y^2=11,\\ t^2y^2+2ty^2+3y^2=17.\end{cases}\ \begin{cases}y^2\cdot\left(3t^2+2t+1\right)=11,\\ y^2\cdot\left(t^2+2t+3\right)=17.\end{cases}$$

Поскольку $y\neq 0,$ то разделим левые и правые части уравнений последней системы:

$$\frac{y^2\cdot\left(3t^2+2t+1\right)}{y^2\cdot\left(t^2+2t+3\right)}=\frac{11}{17}\Rightarrow \frac{3t^2+2t+1}{t^2+2t+3}=\frac{11}{17};$$

Применив основное свойство пропорции, получим:

$$17\cdot\left(3t^2+2t+1\right)=11\cdot\left(t^2+2t+3\right)\ \Rightarrow 51t^2+34t+17=11t^2+22t+33;$$

$$40t^2+12t-16=0|:4\ \Rightarrow 10t^2+3t-4=0.\ D=9+160=169,$$

$$t_1=\frac{-3-13}{20}=-\frac{16}{20}=-\frac{4}{5};\ t_2=\frac{-3+13}{20}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}.$$

Подставим значение $t_1=-\frac{4}{5}$ в уравнение $y^2\cdot\left(t^2+2t+3\right)=17.$

$$y^2\cdot\left(\left(-\frac{4}{5}\right)^2+2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+3\right)=17,\ \Rightarrow y^2\cdot\left(\frac{16}{25}-\frac{8}{5}+3\right)=17,\ y^2=\frac{16-40+75}{25}=17;$$

$$y^2\cdot\frac{51}{25}=17;\ y^2=17:\frac{51}{25};\ y^2=\frac{17}{1}\cdot\frac{25}{51}=\frac{25}{3};\ y_1=-\frac{5}{\sqrt{3}}=-\frac{5\sqrt{3}}{3};\ y_2=\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Возвращаемся к замене $x = ty$:

$$x_1 = -\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3};\ \ x_2 = -\frac{4}{5}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{3} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Подставив значение $t_2 = \frac{1}{2}$ в уравнение $y^2\cdot\left(3t^2 + 2t + 1\right) = 11,$ получим:

$$y^2\cdot\left(3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{2} + 1\right) = 11,\quad y^2\cdot\left(\frac{3}{4} + 2\right) = 11;\ \ y^2 = 11 : 2\frac{3}{4} = \frac{11}{1}\cdot\frac{4}{11} = 4;$$

$y_3 = -2;\ \ y_3 = 2.$

$x_3 = -2\cdot\frac{1}{2} = -1;\ \ x_4 = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1.$

Ответ: $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3};\ -\frac{5}{3}\sqrt{3}\right),\ \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3};\ \frac{5}{3}\sqrt{3}\right),\ (-1; -2), (1; 2).$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8, \\ x^2 + y^2 + xy = 7. \end{cases}$$

Решение:

Выполним замену $x + y = u,$ а $x\cdot y = v.$

$(x + y)^2 = u^2,\ x^2 + 2xy + y^2 = u^2,\ x^2 + y^2 = u^2 - 2v.$

Исходная система приобретает вид:

$$\begin{cases} u^2 - 2v + u = 8, \\ u^2 - 2v + v = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 + u - 2v = 8, \\ u^2 - v = 7. \end{cases}$$

Эту систему решим способом подстановки.

$v = u^2 - 7;\ \ u^2 + u - 2\left(u^2 - 7\right) = 8,\ \ u^2 + u - 2u^2 + 14 = 8,\ \ -u^2 + u + 6 = 0 \,|\cdot(-1),$

$u^2 - u - 6 = 0.$

По теореме Виета имеем: $u_1 = 3,\ \ u_2 = -2.$ Тогда $v_1 = 3^2 - 7 = 2;\ \ v_2 = (-2)^2 - 7 = -3.$

Решим совокупность систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = -2, \\ xy = -3. \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2. \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -2 - x, \\ x\cdot(-2 - x) = -3. \end{cases} \\ \begin{cases} y = 3 - x, \\ x\cdot(3 - x) = 2. \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -2 - x, \\ -2x - x^2 + 3 = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} y = 3 - x, \\ 3x - x^2 - 2 = 0. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -2 - x, \\ x^2 + 2x - 3 = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} y = 3 - x, \\ x^2 - 3x + 2 = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -2 - x, \\ x_1 = -3;\ x_2 = 1. \end{cases} \\ \begin{cases} y = 3 - x, \\ x_3 = 1;\ x_4 = 2. \end{cases} \end{array}\right.$$ Ответ: $(-3;\ 1),\ (1;\ -3),\ (1;\ 2),\ (2;\ 1).$

Покажем некоторые методы решения систем в которые входят иррациональные уравнения:

$$\begin{cases} x + \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{2}{y}, \\ y - x = 3. \end{cases}$$

Решение:

Здесь целесообразно искать ОДЗН системы:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}\ge 0,\\ y\ne 0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\begin{cases}x\ge 0,\\ y>0.\end{cases} \text{– нехай це перша область ДЗН, а}\\ \begin{cases}x\le 0,\\ y<0.\end{cases} \text{ це друга область ДЗН.}\end{matrix}$$

Решим данную систему в первой ОДЗН:
Преобразуем первое уравнение системы, умножив его обе части на y тут $(y>0)$:

$$x+\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{y}}=\frac{2}{y}\Big|\cdot y,\ \ xy+\sqrt{xy}-2=0,\ \ \left(\sqrt{xy}\right)^2+\sqrt{xy}-2=0.$$

Введем новую переменную:
$\sqrt{xy}=t,\ \ t^2+t-2=0.$
По теореме Виета:
$t_1=-2;\ \ t_2=1.$
$\sqrt{xy}=-2,\ \ \sqrt{xy}=-2,\ \ xy\in\varnothing.$
$\sqrt{xy}=1\Rightarrow xy=1.$

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2{,}5\sqrt[6]{xy},\ (1)\\ x-14y=100.\ (2)\end{cases}$$

Решение:

ОДЗН: $x>0,\ \ y>0.\ \ \sqrt[3]{x}=\sqrt[6]{x^2},\ \ \sqrt[3]{x}=\sqrt[6]{y^2},\ \ \sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{y^2}=2{,}5\sqrt[6]{xy}\Big|:\sqrt[6]{xy}.$

$\sqrt[6]{\dfrac{x^2}{xy}}+\sqrt[6]{\dfrac{y^2}{xy}}=2{,}5;\ \ \sqrt[6]{\dfrac{x}{y}}+\sqrt[6]{\dfrac{y}{x}}-2{,}5=0.$ Обозначим $\sqrt[6]{\dfrac{x}{y}}=t,$ тогда $t+\dfrac{1}{t}-2{,}5=0;$

$$\begin{cases}t^2-2{,}5t+1=0,\ D=6{,}25-4=2{,}25=1{,}5^2.\\ t\ne 0\end{cases}$$

$t_1=\dfrac{2{,}5-1{,}5}{2}=\dfrac{1}{2};\ \ t_2=\dfrac{2{,}5+1{,}5}{2}=2.\ \ \sqrt[6]{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{1}{2};\ \ \dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^6;\ \ \dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{64};\ \ y=64x$ *(3)*.

$\sqrt[6]{\dfrac{x}{y}}=2,\ \ \dfrac{x}{y}=2^6,\ \ x=64y$ *(4)*.

Образуем совокупность двух систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=64x,\\ x-14y=100.\end{cases}\\ \begin{cases}x=64y,\\ x-14y=100.\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=64x,\\ x-14\cdot 64x=100.\end{cases}\\ \begin{cases}x=64y,\\ 64y-14y=100.\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=64x,\\ -895x=100.\end{cases}\\ \begin{cases}x=64y,\\ 50y=100.\end{cases}\end{array}\right. \begin{array}{l}\begin{cases}y=64\cdot x,\\ x=-\dfrac{100}{895}\end{cases} \notin ОДЗН\ \varnothing.\\ \begin{cases}x=64\cdot 2,\\ y=\dfrac{100}{50}=2.\end{cases} \begin{cases}x=128,>0\\ y=2.>0\end{cases}\end{array}$$

Ответ: $(128;2)$.

$$\begin{cases}x+y-\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{6}{x-y},\ (1)\\ xy=20\ (2)\end{cases}$$

Решение:

Преобразуем $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}=\sqrt{\frac{(x+y)\cdot(x-y)}{(x-y)^2}}=\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{|x-y|}$, тога уравнение (1) приобретает вид:

$x+y-\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{|x-y|}=\frac{6}{x-y}$, если $x-y>0$, то $|x-y|=x-y$.

$x+y-\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{|x-y|}=\frac{6}{x-y}\Big|\times(x-y)$, $x^2-y^2-\sqrt{x^2-y^2}-6=0$. Обозначим $\sqrt{x^2-y^2}=t$.

$t^2-t-6=0$, $t_1=3$, $t_2=-2$.

$\sqrt{x^2-y^2}=3$; $\begin{cases}x^2-y^2=9,\\ xy=20\end{cases}$ $\sqrt{x^2-y^2}=-2$ $\varnothing$ $y=\frac{20}{x}$;

$x^2-\left(\frac{20}{x}\right)^2=9$, $x^2-\frac{400}{x^2}-9=0$, $\begin{cases}x^4-9x^2-400=0,\\ x^2\neq 0\end{cases}$ $x^2=m$, $m^2-9m-400=0$.

$D=81+4\cdot 400=1681=41^2$, $m_1=\frac{9-41}{2}=-\frac{32}{2}=-16$; $m_2=\frac{9+41}{2}=25$;

$x^2=-16$ $\quad x\in\varnothing$. $x^2=25$, $x_1=-5$; $x_2=5$; $y_1=\frac{20}{-5}=-4$; $y_2=\frac{20}{5}=4$.

$x-y>0$ $\quad -5-(-4)=-1<0$. Значит, (5; 4).

Если $x-y<0$, то $|x-y|=-(x-y)$. Тогда $x+y-\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{-(x-y)}-\frac{6}{x-y}=0$;

$x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}-6=0$; $\sqrt{x^2-y^2}=l$; $l^2+l-6=0$, $l_1=-3$; $l_2=2$.

$\sqrt{x^2-y^2}=-3$, $\varnothing$ $\sqrt{x^2+y^2}=2$, $x^2-y^2=4$

$\begin{cases}x^2-y^2=4,\\ xy=20.\end{cases}$ $y=\frac{20}{x}$, $x^2-\frac{400}{x^2}-4=0$, $\begin{cases}x^4-4x^2-400=0,\\ x^2\neq 0.\end{cases}$ $x^2=n$, $n^2-4n-400=0$,

$D=16+1600=1616$, $n_1=\frac{4-\sqrt{1616}}{2}=0$, $n_2=\frac{4+\sqrt{1616}}{2}$; $x^2=\frac{4+\sqrt{1616}}{2}$,

$x_1=\sqrt{\frac{4+\sqrt{1616}}{2}}=\sqrt{2+2\sqrt{101}}$; $x_2=\sqrt{2+2\sqrt{101}}$; $y_2=\frac{20}{\sqrt{2+2\sqrt{101}}}$.

Ответ: (5; 4), $\left(-\sqrt{2+2\sqrt{101}};\ \frac{20}{-\sqrt{2+2\sqrt{101}}}\right)$.

Образовалась система уравнений:

$\begin{cases}y-x=3,\\ xy=1.\end{cases}$ $\begin{cases}y=3+x,\\ x\cdot(3+x)=1.\end{cases}$ $\begin{cases}y=3+x,\\ 3x+x^2-1=0.\end{cases}$ $\begin{cases}y=3+x,\\ x^2+3x-1=0.\end{cases}$

$D=9+4=13>0$; $x_1=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$; $x_2=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$.

$y_1=3+\frac{-3-\sqrt{13}}{2}=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$; $y_2=3+\frac{-3+\sqrt{13}}{2}=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Так как $\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$ і $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ не принадлежат первой ОДЗН, в которой решается данная система, а $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ и $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ принадлежащих ей, то решением системы является пара чисел $\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2};\ \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$.

Упростим первое уравнение системы во второй ОДЗН:

$x+\sqrt{\frac{x\cdot y}{y\cdot y}}=\frac{2}{y}\Big|\cdot y,\ \ xy+\sqrt{xy}-2=0,$ а тому $\left(\sqrt{xy}\right)^2-\sqrt{xy}-2=0,\ \ \sqrt{xy}=t,\ \ t^2-t-=0,$

$t_1=-1;\ t_2=2.\ \ \sqrt{xy}=-1,\ xy\in\varnothing.\ \ \sqrt{xy}=2,\ xy=4.$ Имеем такую систему:

$$\begin{cases}y-x=3,\\ xy=4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=3+x,\\ x\cdot(3+x)=4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=3+x,\\ 3x+x^2=4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=3+x,\\ x^2+3x-4=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=3+x,\\ x=-4;\ x=1\end{cases}\ \begin{cases}x=-4,\\ y=3-4=-1\end{cases}\ \begin{cases}x=1,\\ y=3+1=4.\end{cases}$$

Пара (1; 4) не принадлежит второй ОДЗН, а потому решением системы является пара
(-1; -4).

Ответ: $\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2};\ \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right),\ (-4;\ -1).$

$$\begin{cases}3|x|+5y+9=0,\\ 2x-|y|-7=0.\end{cases}$$

Решение:

Решим данную систему в каждой из четырех ОДЗН:

I). $\begin{cases}x\ge 0, & |x|=x.\\ y\ge 0. & |y|=y.\end{cases}\ \begin{cases}3x+5y+9=0,\\ 2x-y-7=0\Big|\cdot 5\end{cases}\ \begin{cases}3x+5y=-9,\\ 10x-5y=35\end{cases}$

$$13x=26;$$

$$x=2$$

$3\cdot 2+5y=-9, 8y=-9-6,\ \ y=-3$ не удовлетворяет условие $y\ge 0.$

В этой ОДЗН система не имеет решений.

$$\begin{cases}x^2-x\sqrt{xy}=8,\\ y^2-y\sqrt{xy}=-1.\end{cases}$$

Решение:

Замена $x=ty,\ y\ne 0.$

$$\begin{cases}(ty)^2-ty\sqrt{ty\cdot y}=8,\\ y^2-y\sqrt{ty\cdot y}=-1\end{cases}\ \begin{cases}t^2y^2-ty\sqrt{ty^2}=8,\\ y^2-y\sqrt{ty^2}=-1\end{cases}\ \begin{cases}t^2y^2-ty|y|\sqrt{t}=8,\\ y^2-y|y|\sqrt{t}=-1.\end{cases}$$

Если $y>0,$ то $|y|=y$

$$\begin{cases}2y^2-ty^2\sqrt{t}=8,\\ y^2-y^2\sqrt{t}=-1.\end{cases}\ t^2y^2-ty^2\sqrt{t}=8,\ \ y^2-y^2\sqrt{t}=-1.\ \ y^2\cdot\left(t^2-\sqrt{t}\right)=8,\ \ y^2\left(1-\sqrt{t}\right)=-1.\ \ \frac{t^2-t\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}=-8,\ \ \frac{t\cdot\left(t-\sqrt{t}\right)}{1-\sqrt{t}}=-8,$$

$\frac{t\cdot\sqrt{t}\left(\sqrt{t-1}\right)}{1-\sqrt{t}}=-8,\ \frac{t\sqrt{t}\left(1-\sqrt{t}\right)}{1-\sqrt{t}}=8,\ \begin{matrix} t\sqrt{t}=8, & t^2=2. \\ t=2^2=4. & \end{matrix}$ Возведем в степень $\frac{2}{3}$:

$\begin{cases} x=4y, \\ y^2-y\sqrt{xy}=-1 \end{cases} \begin{cases} x=4y, \\ y^2-y\sqrt{4y\cdot y}+1=0 \end{cases} \begin{cases} -4y=0, \\ y^2-2y^2+1=0 \end{cases} \begin{cases} x-4y=0, \\ 1-y^2=0. \end{cases} \begin{cases} x=4\cdot 1, \\ y=1 \end{cases} \begin{matrix} x=4, \\ y=1. \end{matrix}$

Если $y<0,$ то $|y|=-y$ і $\begin{cases} t^2y^2+ty^2\sqrt{t}=8, \\ y^2+y^2\sqrt{t}=-1 \end{cases} \frac{y^2\cdot\left(t^2+t\sqrt{t}\right)}{y^2\cdot\left(1+\sqrt{t}\right)}=\frac{8}{1},\ \frac{t\sqrt{t}\cdot\left(1+\sqrt{t}\right)}{1+\sqrt{t}}=-8,$

$t\sqrt{t}=-8,\ t\in\varnothing.$

Ответ: *(4; 1)*.

II). $\begin{cases} x\ge 0, \\ y<0 \end{cases} \begin{cases} |x|=x, \\ |y|=-y. \end{cases} \begin{cases} 3x+5y=-9, \\ 2x+y=7\,|\cdot(-5) \end{cases} +\begin{cases} 3x+5y=-9, \\ -10x-5y=-35 \end{cases}$

$$\overline{\quad -7x=-44; \quad}$$

$x=\frac{-44}{-7}=\frac{44}{7}\ge 0;\ 3\cdot\frac{44}{7}+5y=-9;\ 5y=-9-\frac{132}{7}=\frac{-195}{7};\ y=-\frac{195}{7}:5=-\frac{195}{7{,}5}=-\frac{39}{7}<0.$

$\left(\frac{44}{7};\ -\frac{39}{7}\right)-$ решение системы.

III). $\begin{cases} x\le 0, \\ y\ge 0 \end{cases} \begin{cases} |x|=-x, \\ |y|=y. \end{cases} \begin{cases} -3x+5y=-9, \\ 2x-y-7=0\,|\cdot 5 \end{cases} +\begin{cases} -3x+5y=-9, \\ 10x-5y=35 \end{cases}$

$$\overline{\quad 7x=26; \quad}$$

$x=\frac{26}{7}-$ не удовлетворяет условие $x\le 0,$ а потому система в этой ОДЗН решений не имеет.

IV). $\begin{cases} x<0, \\ y<0 \end{cases} \begin{cases} |x|=-x, \\ |y|=-y. \end{cases} \begin{cases} -3x+5y=-9, \\ 2x+y=7\,|\cdot(-5) \end{cases} +\begin{cases} -3x+5y=-9, \\ -10x-5y=-35 \end{cases}$

$$\overline{\quad -13x=26; \quad}$$

$x=\frac{26}{-13}=-2\in$ ОДЗН. $2\cdot 2+y=7;\ y=3\notin$ ОДЗН.

Ответ: $\left(\frac{44}{7};\ -\frac{39}{7}\right).$

$\begin{cases} (x-y)\cdot 0{,}5^{y-x}=5\cdot 2^{x-y},\ (1) \\ (x-y)^{\frac{x+y}{7}}=125\ \ (2) \end{cases}$

Решение:

Преобразуем первое уравнение системы:

$0{,}5^{y-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{y-x}=\left(2^{-1}\right)^{y-x}=2^{x-y},\ (x-y)\cdot 2^{x-y}=5\cdot 2^{x-y}\,|:2^{x-y},\ \ x-y=5.$

Подставим это значение в уравнение (2):

$5^{\frac{x+y}{7}}=125;\ 5^{\frac{x+y}{7}}=5^3.$ В силу монотонности показательной функции, имеем:

$\frac{x+y}{7}=3\rightarrow x+y=21$ Образуем новую систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=21. \\ x-y=5. \end{cases} \quad 2x=26, \quad x=13. \quad 13+y=21, \quad y=8.$$

Ответ: $(13;\ 8)$.

$$\begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{x}}=2, \ (1) \\ (x+y)\cdot 4^x=64 \ (2) \end{cases}$$

Решение:

Возведем уравнение (1) в степень x:

$\left((x+y)^{\frac{1}{x}}\right)^x=2^x, \ \ x+y=2^x.$ Тогда уравнение (2) будет иметь вид $2^x\cdot 4^x=4^3$;

$2^x\cdot 2^{2x}=\left(2^2\right)^3, \ \ 2^{3x}=2^6, \ \ 3x=6, \ \ x=2, \ \ y=2^2-2=2.$

Ответ: $(2;\ 2)$.

$$\begin{cases} 3^{2x-1}\cdot 27^{x+y}=3, \\ (5x-y)^2=36. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} 3^{2x-1}\cdot 27^{x+y}=3, \\ \sqrt{(5x-y)^2}=\sqrt{36}. \end{cases} \quad \begin{cases} 3^{2x-1+3x+3y}=3^1, \\ |5x-y|=6. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5x+3y=2, \\ 5x-y=6 \,|\cdot 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 5x+3y=2, \\ 5x-y=-6 \,|\cdot 3 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5x+3y=2, \\ 15x-3y=18 \end{cases} \\ \begin{cases} 5x+3y=2, \\ 15x-3y=-18 \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \begin{cases} 20x=20, \\ 5x+3y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} 20x=-16, \\ 5x+3y=2. \end{cases} \end{array} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1, \\ y=\dfrac{2-5\cdot 1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-0{,}8, \\ y=\dfrac{2+5\cdot 0{,}8}{3} \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ y=-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=-0{,}8, \\ y=2. \end{array}\right. \end{array}$$

Ответ: $(1;-1), (-0{,}8;2)$.

Системы логарифмических уравнений решаются теми же способами, что и системы алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} x^{\lg y}=100, \ (1) \\ \log_y x=2 \ \ (2) \end{cases}$$

Решение:

$x>0, y>0, y\neq 1.$

Прологарифмуемо уравнения (1) с основой 10:

$\lg y\cdot \lg x=\lg 100, \ \ \lg y\cdot \lg x=2.$

По определению логарифма числа из уравнения (2) имеем:

$x=y^2.$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x=y^2, \\ \lg y\cdot \lg x=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=y^2, \\ \lg y\cdot \lg y^2=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=y^2, \\ 2\lg^2 y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=y^2, \\ \lg^2 y=1 \end{cases}$$

Эта система уравнений равносильна такой совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y^2,\\ \lg y=-1;\end{cases}\\ \begin{cases}x=y^2,\\ \lg y=1;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y^2,\\ y_1=10^{-1};\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=100,\\ y_2=10;\end{cases}\end{array}\right.$$ Ответ: $(0{,}01;\,0{,}1),(100;10)$.

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6, & (1)\\ \sqrt[6]{(x+y)^3\cdot(x-y)^2}=8. & (2)\end{cases}$$

Решение:

Второе уравнение системы превратим:

$$\sqrt[6]{(x+y)^3\cdot(x-y)^2}=\sqrt[6]{(x+y)^3}\cdot\sqrt[6]{(x-y)^2}=\sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{(x-y)^2}}=\sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{|x-y|}=$$

Если $x-y<0,$ то $|x-y|=-(x-y)$ $\quad=\sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{-1\cdot(x-y)}=-\sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y};$

Если $x-y>0,$ то $\sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{|x-y|}=\sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y}.$

Исходная система уравнений преобразуется в совокупность систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6,\\ -\sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y}=8;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6,\\ \sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y}=8;\end{cases}\end{array}\right.$$

Нехай $\sqrt{\mathrm{x}+\mathrm{y}}=t, t\geq 0,$ а $\sqrt[3]{x-y}=l,$ тоді

$$\begin{cases}t+l=6,\\ -t\cdot l=8\end{cases}\to\begin{cases}l=6-t,\\ -t\cdot(6-t)=8\end{cases}\to\begin{cases}l=6-t,\\ -6t+t^2-8=0\end{cases}$$

$t^2-6t+8=0$ По теореме Виета, имеем: $t_1=2, t_2=4.$

$l_1=6-2=4;\ l_2=6-4=2.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+y}=2,\\ \sqrt[3]{x-y}=4\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x+y}=4,\\ \sqrt[3]{x-y}=2\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=4,\\ x-y=64\end{cases} \quad \begin{array}{l}2x=68,\\ x_1=34.\end{array}\\ \begin{cases}x+y=16,\\ x-y=8\end{cases} \quad \begin{array}{l}2x=24,\\ x_2=12\end{array}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y_1=4-34,\\ x_1=34\end{cases}\\ \begin{cases}y_1=12-8,\\ x_1=12\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y_1=-30,\\ x_1=34\end{cases}\\ \begin{cases}y_1=4,\\ x_1=12\end{cases}\end{array}\right.$$ – не виконується умова $x+y>0.$

Решим вторую систему совокупности:

$$\begin{cases}t+l=6,\\ t\cdot l=8\end{cases}\begin{cases}l=6-t,\\ t\cdot(6-t)=8\end{cases}\begin{cases}l=6-t,\\ -t^2+6t-8=0\end{cases}\begin{cases}l=6-t,\\ t^2-6t+8=0.\end{cases}$$

$$D=36+32=68=4\cdot 17\quad t_1=\frac{6-2\sqrt{17}}{2}=3-\sqrt{17};\ \ t_2=3+\sqrt{17};$$

$l_1=3+\sqrt{17};\ l_2=3-\sqrt{17}.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+y}=3-\sqrt{17},\\ \sqrt[3]{x-y}=3+\sqrt{17},\end{cases} \begin{cases}x+y=9-6\sqrt{17}+17,\\ x-y=27+3\cdot 9\sqrt{17}+3\cdot 3\cdot 7+\left(\sqrt{17}\right)^3\end{cases} \begin{cases}x+y=26-6\sqrt{17},\\ x-y=180+44\sqrt{17}\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x+y}=3-\sqrt{17},\\ \sqrt[3]{x-y}=3-\sqrt{17},\end{cases} \begin{cases}x+y=26+6\sqrt{17},\\ x-y=27-27\sqrt{17}+103+17\sqrt{17}\end{cases} \begin{cases}x=78-13\sqrt{17},\\ y=-12+19\sqrt{17}\end{cases}\end{array}\right.$$

$2x=206+38\sqrt{17}, y_1=-76+44\sqrt{17},$

$x=103+19\sqrt{17}, y_2=-12+19\sqrt{17}.$

Ответ: $(12;\ 4)$, $\left(103+19\sqrt{17};\ -76+44\sqrt{17}\right)$, $\left(78-19\sqrt{17};\ -12+19\sqrt{17}\right)$.

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{4},\\ 2x+3y-5z+19=0.\end{cases}$$

Решение:

Обозначим $t=\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{4}$. Отсюда: $2t=x-1,\ x=2t+1.$

$3t=y+3,\ y=3t-3,\ 4t=z-1,\ z=4t+1.$

$2\cdot(2t+1)+3\cdot(3t-3)-5\cdot(4t+1)+19=0,$

$4t+2+9t-9-20t-5+19=0,\ -7t+7=0,\ t=1;$

$x=2\cdot 1+1=3;\ \ y=3\cdot 1-3=0;\ \ z=4\cdot 1+1=5.$

Ответ: $(3;0;5)$.

$$\begin{cases}x+y+z=4,\\ 2xy-z^2=16.\end{cases}$$

Решение:

Возведем первое уравнение в квадрат и вычтем второе уравнение:

$$-\begin{cases}x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=16\\ 2xy-z^2=16\end{cases}$$

$x^2+y^2+2z^2+2xz+2yz=0,\qquad \left(x^2+2xz+z^2\right)+\left(y^2+2yz+z^2\right)=0,$

$(x+z)^2+(y+z)^2=0.$

Это равенство возможно только тогда, корда

$(x+z)^2=0$ і $(y+z)^2=0$

$x+z=0\qquad y+z=0$

$x=-z;\qquad y=-z.$

Подставляя эти значения в первое уравнение исходной системы, получим:

$-z-z+z=4,\ \ z=4.$

$x_1=-4;\ \ y=-4.$

Ответ: $(-4;-4;4)$.

Особого внимания заслуживает способ решения такой системы уравнений:

$$\begin{cases}(x)^{2y^2-1}=5,\\ x^{y^2+2}=125.\end{cases}$$

Решение:

Прологарифмуем каждое из уравнений системы с основанием 5:

$$\begin{cases}(2y^2-1)\cdot\log_5 x=\log_5 x,\\ (y^2+2)\cdot\log_5 x=\log_5 125.\end{cases}\quad \begin{cases}(2y^2-1)\cdot\log_5 x=1, & (1)\\ (y^2+2)\cdot\log_5 x=3. & (2)\end{cases}\quad x>0.$$

Разделим уравнение (2) на (1):

$$\frac{(y^2+2)\cdot\log_5 x}{(2y^2-1)\cdot\log_5 x}=\frac{3}{1};\ \frac{y^2+2}{2y^2-1}=\frac{3}{1};\ y^2+2=(2y^2-1)\cdot 3,\ y^2+2=6y^2-3,\ -5y^2=-5,$$

$$y^2=1,\ y_1=-1;\ y_2=1.$$

$$x^{2\cdot(-1)^2-1}=5,\ x_1=5,\ x^{2\cdot 1^2-1}=5,\ x_2=5.$$

Ответ: $(5;-1),(5;1)$.

$$\begin{cases}2^x\cdot 3^y=6,\\ 3^x\cdot 4^y=12.\end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases}2^x\cdot 3^y=2\cdot 3,\\ 3^x\cdot 4^y=2^2\cdot 3.\end{cases}$$ Прологарифмуемо оба уравнения с основанием 10:

$$\begin{cases}\lg(2^x\cdot 3^y)\lg(2\cdot 3),\\ \lg(3^x\cdot 2^{2y})\lg(2^2\cdot 3).\end{cases}\quad \begin{cases}x\lg 2+y\lg 3=\lg 2+\lg 3,\\ x\lg 3+2y\lg 2=2\lg 2+\lg 3.\end{cases}$$

Эту систему решим способом подстановки:
из первого уравнения выразим y через x и подставим во второе уравнение системы:

$$y\lg 3=\lg 2+\lg 3-x\lg 2,\ y=\frac{\lg 2+\lg 3-x\lg 2}{\lg 3}.$$

Тогда второе уравнение будет иметь вид:

$$x\lg 3+2\cdot\frac{\lg 2+\lg 3-x\lg 2}{\lg 3}\cdot\lg 2=2\lg 2+\lg 3\,\Big|\cdot\lg 3,$$

$$x\lg^2 3+2\lg^2 2+2\lg 2\cdot\lg 3-2\lg^2 2\cdot x=2\lg 2\cdot\lg 3+\lg^2 3;$$

$$x\cdot(\lg^2 3-2\lg^2 2)=\lg^2 3-2\lg^2 2;\ x=\frac{\lg^2 3-2\lg^2 2}{\lg^2 3-2\lg^2 2};\ x=1.$$

Значение $x=1$ подставим в первое уравнение исходной системы уравнений:

$$2^1\cdot 3^y=6,\ 3^y=\frac{6}{2},\ 3^y=3,\ y=1.$$

Ответ: $(1;1)$.

$$\begin{cases}2-\log_2 y=2\log_2(x+y),\\ \log_2(x+y)+\log_2(x^2-xy+y^2)=1.\end{cases}$$

Решение:

$$2=\log_2 4;\ 1=\log_2 2.$$

ОДЗН: $\begin{cases}y>0,\\ x+y>0,\\ x^2-xy+y^2>0.\end{cases}$

Система приобретает вид:

$$\begin{cases} \log_2 4 - \log_2 y = \log_2 (x+y)^2, \\ \log_2 (x+y) + \log_2 \left(x^2 - xy + y^2\right) = \log_2 2. \end{cases}$$

Пропотенциируем оба уравнения системы:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{y} = (x+y)^2, \\ (x+y)\cdot\left(x^2 - xy + y^2\right) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{4}{y} = (x+y)^2, \quad y \neq 0. \\ x^3 + y^3 = 2 \end{cases}$$

Вводим переменную $y = tx.$ Система приобретает вид:

$$\begin{cases} 4 = tx\cdot(x+tx)^2, \\ 2 = x^3 + (tx)^3. \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = tx\cdot\left(x^2 + 2x^2t + x^2t^2\right), \\ 2 = x^3 + x^3t^3. \end{cases} \quad \frac{4}{2} = \frac{tx^3\cdot\left(1+2t+t^2\right)}{x^3\cdot\left(1+t^3\right)}; \;\; 2 = \frac{t\cdot(1+t)^2}{(1+t)\left(-t+t^2\right)};$$

$$2 = \frac{t+t^2}{1-t+t^2}; \;\; t+t^2 = 2-2t+2t^2; \;\; 2t^2 - 3t^2 - 2t - t + 2 = 0; \;\; t^2 - 3t + 2 = 0;$$

$t_1 = 1; \;\; t_2 = 2.$

$y = 1\cdot x, \;\; y = x; \;\; x^3 + x^3 = 2; \;\; 2x^3 = 2; \;\; x^3 = 1; \;\; x = 1.$

Тоді $y = 1.$ *(1; 1)* - решение системы.

$$y = 2\cdot x, \;\; x^3 + (2x)^3 = 2; \;\; x^3 + 8x^3 = 2; \;\; 9x^3 = 2; \;\; x^3 = \frac{9}{2}; \;\; x = \sqrt[3]{\frac{2}{9}} = \sqrt[3]{\frac{2\cdot 3}{9\cdot 3}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{3}; \;\; y_2 = \frac{2\sqrt[3]{6}}{3}.$$

Ответ: $(1;1), \left(\dfrac{\sqrt[3]{6}}{3}; \dfrac{2\sqrt[3]{6}}{3}\right).$

$$\begin{cases} y^{5x^2 - 51x + 10} = 1, \\ xy = 15. \end{cases}$$

Решение:

$$1 = y^0, \;\; \begin{cases} y^{5x^2 - 51x + 10} = y^0, \\ xy = 15. \end{cases} \;\; \begin{cases} 5x^2 - 51x + 10 = 0, \\ xy = 15. \end{cases}$$

$$D = 2601 - 200 = 2401 = 49^2, \;\; x_1 = \frac{51-40}{10} = 0{,}2; \;\; x_2 = \frac{51+49}{10} = 10.$$

$$y_1 = \frac{15}{0{,}2} = 75; \;\; y_2 = \frac{15}{10} = 1{,}5.$$

Ответ: $(0{,}2; 75), (10; 1{,}5).$

$$\begin{cases} x^y = 2, & (1) \\ (2x)^{y^2} = 64. & (2) \end{cases}$$

Решение:

$x > 0$ как основа показательной функции.

Преобразуем уравнение (2):

$(2x)^{y^2} = 64, \;\; (2x)^{y^2} = 2^6, \;\; 2^{y^2}\cdot x^{y^2} = 2^6, \;\; 2^{y^2}\cdot\left(x^y\right)^y = 2^6.$ Учитывая равенство (1), имеем:

$2^{y^2}\cdot 2^y = 2^6, \;\; 2^{y^2+y} = 2^6, \;\; y^2 + y = 6, \;\; y^2 + y - 6 = 0.$

По теореме Виета: $y_1 = -3, \;\; y_2 = 2.$

$$x^{-3} = 2, \;\; \frac{1}{x^3} = 2; \;\; x^3 = \frac{1}{2}; \;\; x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{4}{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}; \;\; x^2 = 2,$$

$x = -\sqrt{2}$ – не удовлетворяет условие $x > 0.$

$x_2 = \sqrt{2}.$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}; -3\right), \left(\sqrt{2}; 2\right).$

$$\begin{cases} y \cdot x^{\log_y x} = x^{2,5} & (1) \\ \log_3 y \cdot \log_y (y-2x) = 1 & (2) \end{cases}$$

Решение:

ОДЗН: $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ y > 2x. \end{cases}$ Прологарифмируем уравнение (1) с основаним 3:

$\log_3\left(y \cdot x^{\log_y x}\right) = \log_3 x^{2,5};$

$\log_3 y + \log_y x \cdot \log_3 x = 2,5 \cdot \log_3 x \,|\log_3 y,$

$(\log_3 y)^2 + \log_y x \cdot \log_3 x \cdot \log_3 y = 2,5 \cdot \log_3 x \cdot \log_3 y;$

$(\log_3 y)^2 + \frac{\log_3 x}{\log_3 y} \cdot \log_3 x \cdot \log_3 y - 2,5 \cdot \log_3 x \cdot \log_3 y = 0;$

$(\log_3 y)^2 - 2,5 \cdot \log_3 x \cdot \log_3 y + (\log_3 x) = 0 \,|: (\log_3 x \cdot \log_3 y);$

$\frac{\log_3 y}{\log_3 x} - 2,5 + \frac{\log_3 x}{\log_3 y} = 0.$ Обозначим $\frac{\log_3 y}{\log_3 x} = t,$ тогда $t - 25 + \frac{1}{t} = 0,$ $\begin{cases} t^2 - 2,5t + 1 = 0, \\ t \neq 0 \end{cases}$

$D = 6,25 - 4 = 2,25.$

$t_1 = \frac{2,5 - 1,5}{2} = \frac{1}{2};\ t_2 = \frac{2,5 + 1,5}{2} = 2.$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\log_3 y}{\log_3 x} = \frac{1}{2}, \\ \frac{\log_3 y}{\log_3 x} = 2. \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 2\log_3 y, \\ \log_3 y = 2\log_3 x. \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \log_3 x = \log_3 y^2, \\ \log_3 y = \log_3 x^2. \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = y^2, \\ y = x^2. \end{array}\right.$$

В уравнении (2) исходной системы перейдем к основанию логарифмов 3:

$\log_3 y \cdot \frac{\log_3(y-2x)}{\log_3 y} = 1,\ \log_3(y-2x) = 1,\ y - 2x = 3.$

Если $x = y^2,$ то $y - 2 \cdot y^2 - 3 = 0,\ 2y^2 - y + 3 = 0$

$D = 1 - 24 = -23 < 0,\ \ y \in \varnothing.$

Если $y = x^2,$ то $x^2 - 2x - 3 = 0,\ x_1 = -1$ не удовлетворяет условие $x > 0.$ $x_2 - 3.$

$y = 2x + 3 = 2 \cdot 3 + 3 = 9.$

Ответ: $(3; 9).$

$$\begin{cases} \lg\sqrt{(x+y)^2} = 1, \\ \lg y - \lg|x| = \lg 2. \end{cases}$$

Решение:

ОДЗН:

$\begin{cases} x + y \neq 0, \\ y > 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$ $\begin{cases} \lg|x+y| = 1, \\ \lg y = \lg 2 + \lg|x|. \end{cases}$ $x + y > 0.$

$$\begin{cases} |x+y|=10, \\ \lg y=\lg(2|x|). \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=\pm 10, \\ y=2|x|. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=10, \\ y=2x. \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=10, \\ y=-2x. \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{cases} x+2x=10, \\ y=2x. \end{cases} \quad \begin{cases} 3x=10, \\ y=2x. \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{10}{3}, \\ y=\dfrac{20}{3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2x=10, \\ y=-2x. \end{cases} \quad \begin{cases} -x=10, \\ y=20. \end{cases} \quad \begin{cases} x=-10, \\ y=20. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{10}{3}; \frac{20}{3}\right), (-10; 20).$

Решение систем тригонометрических уравнений сводится к одному из трех случаев:

а) путем тождественных преобразований систему сводят к одному уравнению с одной переменной;

б) приходят к системе уравнений только с аргументами;

в) образуется система уравнений относительно тригонометрических функций этих аргументов.

Очень распространена такая система тригонометрических уравнений:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos x = -0{,}5, & (1) \\ \cos x \cdot \sin y = 0{,}5. & (2) \end{cases}$$

Решение:

Нетрудно заметить, что левые части уравнений (1) и (2) представляют собой части формул синуса суммы или разности аргументов. Отсюда следует способ решения этой системы. Добавляя уравнения (1) и (2) и получим новую систему тригонометрических уравнений:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y + \cos y \cdot \sin x = 0, \\ \cos x \cdot \sin y - \sin x \cdot \cos y = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ \sin(y-x)=1. \end{cases}$$

Используя отдельные случаи решения уравнений вида $\sin x = a,$ имеем:

Эту систему удобно решать способом добавления:

$$\begin{cases} x+y=\pi n, \ n \in Z, \\ y-x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, \ k \in Z. \end{cases}$$

$2y=\frac{\pi}{2}+\pi n+2k\pi, \ \ y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}+k\pi.$ Значение y подставим в первое уравнение этой системы:

$$x+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}+k\pi=\pi n, \ \ x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}-k\pi.$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}-k\pi; \ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}+k\pi\right), \ n \in Z, \ k \in Z.$

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2\sin y. \end{cases}$$

Решение:

Эту систему целесообразно решать способом подстановки:

$$\begin{cases} y = x - \dfrac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2\cdot\left(\sin x\cdot\cos\dfrac{5\pi}{3} - \cos x\cdot\sin\dfrac{5\pi}{3}\right); \end{cases} \quad \begin{cases} y = x - \dfrac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2\cdot\left(\sin x\cdot\dfrac{1}{2} - \cos x\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - \dfrac{5\pi}{3}, \\ \sin x = \sin x - \sqrt{3}\cdot\cos x; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x - \dfrac{5\pi}{3}, \\ \cos x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x - \dfrac{5\pi}{3}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n\in Z. \end{cases}$$

$$y = \frac{\pi}{2} + \pi n - \frac{5\pi}{3} = \pi n + \frac{3\pi - 10\pi}{6} = \pi n - \frac{7\pi}{6},\ n\in Z.$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n - \dfrac{7\pi}{6}\right),\ n\in Z.$

$$\begin{cases} tgx + tgy = 1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решение:

В системах уравнений такого типа нужно искать область определения системы.

Поскольку $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, то область определения системы:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in Z, \\ y \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n\in Z. \end{cases}$$

Исходная система уравнений аналогична предыдущей, а потому может быть решена способом подстановки.

$$\begin{cases} y = \dfrac{\pi}{4} - x, \\ tgx + tg\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{4} - x, \\ tgx + \dfrac{tg\dfrac{\pi}{4} - tgx}{1 + tg\dfrac{\pi}{4}\cdot tgx} = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{4} - x, \\ tgx + \dfrac{1 - tgx}{1 + tgx} = 1 \Big| \cdot (1 + tgx). \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\pi}{4} - x, \\ tgx + tg^2 x + 1 - tgx - tgx - 1 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{4} - x, \\ tg^2 x - tgx = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{4} - x, \\ tg(tgx - 1) = 0. \end{cases}$$

Эта система равносильна такой совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} tgx = 0, \\ y = \dfrac{\pi}{4} - x; \end{cases} \\ \begin{cases} tgx - 1 = 0, \\ y = \dfrac{\pi}{4} - x; \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = \pi n,\ n \in Z, \\ y = \dfrac{\pi}{4} - \pi n,\ n \in Z; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z, \\ y = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} - k\pi,\ n \in Z. \end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\pi n;\ \dfrac{\pi}{4} - \pi n\right),\ n \in Z,\ \left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi;\ -k\pi\right),\ k \in Z.$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = 0{,}75, \\ tgx \cdot tgx = 3. \end{cases}$$

Решение:

Установим ОДЗН:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \cos y \neq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z, \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{\sin x \cdot \sin y}{tgx \cdot tgy} = \frac{0{,}75}{3}; \quad \frac{\sin x \cdot \sin y}{\dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x}} = 0{,}25; \quad \cos x \cdot \cos y = 0{,}25 \quad (A)$$

Заменим второе уравнение системы уравнением *(A)*:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = 0{,}75, \quad (B) \\ \cos x \cdot \cos y = 0{,}25. \quad (C) \end{cases}$$

Сложим уравнения (B) и (C):

$$\sin x \cdot \sin y + \cos x \cdot \cos y = 1 \quad (D).$$

Вычтем уравнение C и B:

$$\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y = -0{,}5 \quad (E)$$

Левые части уравнений D и E представляют собой косинус разницы и косинус суммы соответственно. Имеем систему уравнений эквивалентную исходной системе:

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 1, \\ \cos(x + y) - 0{,}5. \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 2\pi n,\ n \in Z. \\ x + y = \pm\arccos(-0{,}5) + 2k\pi,\ k \in Z. \end{cases}$$

Эта система равносильна совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} + \begin{cases} x - y = 2\pi n, \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi. \end{cases} \\ + \begin{cases} x - y = 2\pi n, \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi. \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} 2x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi + 2\pi n, \\ 2x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi + 2\pi k. \end{array} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi + \pi n, \\ y = \dfrac{\pi}{3} + k\pi - 2\pi n. \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi + \pi k, \\ y = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi - \pi n. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + \pi(n+k), k \in Z. \\ y_1 = \dfrac{\pi}{3} + \pi(k-n), n \in Z. \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{\pi}{3} + \pi(n+k), k \in Z. \\ y_2 = -\dfrac{\pi}{3} + \pi(k-n), n \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{3} + \pi(n+k); \dfrac{\pi}{3} + \pi(k-n)\right), n \in Z, k \in Z.$ $\left(-\dfrac{\pi}{3} + \pi(k+\pi); \text{-} \dfrac{\pi}{3} + \pi(k-n)\right).$

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 0{,}5, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решение:

Снизим степень синуса и косинуса первого уравнения системы:

$$\begin{cases} \dfrac{1-\cos 2x}{2} + \dfrac{1+\cos 2y}{2} = 0{,}5 \Big| \cdot 2; \\ x + y = \dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - \cos 2x + 1 + \cos 2y = 1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2y - \cos 2x = -1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases} \quad \begin{cases} -2\sin\dfrac{2y+2x}{2} \cdot \sin\dfrac{2y-2x}{2} = -1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin(x+y) \cdot \sin(y-x) = 1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sin\dfrac{\pi}{4} \cdot \sin(x-y) = -1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin(x-y) = -1, \;\; \sin(x-y) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \;\; x - y = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi.$$

$$+\begin{cases} x - y = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases} \quad 2x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n, \;\; x = \frac{\pi}{8} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{8} + \pi n, \;\; n \in Z.$$

$$y = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} - (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{8} - \pi n = \frac{\pi}{8} \cdot \left(1 - (-1)^{n+1}\right) - \pi n, \;\; n \in Z.$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{8} + (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{\pi}{8} + \pi n\right); \left(\dfrac{\pi}{8} \cdot \left((-1)^{n+1}\right) - \pi n\right), n \in Z.$

Задания для самостоятельной работы:

$$\begin{cases} x^2 y + xy^2 - x^2 - 4xy - 2y^2 + 3x + 4y = 2, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $(1; 0), (3; 1), \left(2; \dfrac{1}{2}\right).$

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = -18. \end{cases}$$

Ответ: $(-2;9),(9;-2)$.

$$\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ x+y=10. \end{cases}$$

Ответ: $(6;4)$.

$$\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ xy=8. \end{cases}$$

Ответ: $(-2;-4),(2;4),(-4;-2),(4;2)$.

$$\begin{cases} x^2+2xy-8y^2-6x+18y-7=0, \\ 2x^2-5xy-10y^2-3x+9y+7=0. \end{cases}$$

Ответ: $(-3;-1),(-1;2),(1;1),(3;1)$.

$$\begin{cases} x^3+y^3=1, \\ x^2y+2xy^2+y^2=2. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3};\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right),\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2};\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$.

$$\begin{cases} x^2+2xy-8y^2-6x+18y-7=0, \\ 2x^2-5xy-10y^2-3x+9y+7=0. \end{cases}$$

Ответ: $(-3;-1),(-1;2),(1;1),(3;1)$.

$$\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=481, \\ x^2+xy+y^2=37. \end{cases}$$

Ответ: $(-3;-4),(-4;-3),(3;-4),(4;3)$.

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\frac{5}{2}\sqrt[6]{xy},\ (xy\ge 0). \\ x+y=65. \end{cases}$$

Ответ: $(1;64),(64;1)$.

$$\begin{cases} |x-y|+y^2=3, \\ |x-y|+|y-1|=2. \end{cases}$$

Ответ: $(-1;1),(1;-1)$.

$$\begin{cases} \cos^2 x+\cos^2 y=1{,}5, \\ x+y=\pi. \end{cases}$$

Ответ: $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\quad \pm\frac{5\pi}{6}+\pi(1-2n),\ n\in Z.$

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2 \ge \dfrac{1-a}{a+1}, \\ 3x^2+10xy-5y^2 \le -2. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty;\ -1)$.

$$\begin{cases} x^{x-2y}=36, \\ 4(x-2y)+\log_6 x = 9. \end{cases}$$ Найти целые решения.

Ответ: $(6;\ 2)$.

$$\begin{cases} x+y+z=14, \\ x+yz=19. \end{cases}$$

Ответ: $(5;2;7), (7;3;4), (7;4;3), (5;7;2)$.

При каких a система имеет решения $x>0,\ \ y>0$?

$$\begin{cases} ax+4y=6-9a, \\ 2x+(2+a)y=8. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-4; \dfrac{6}{13}\right)$.

$$\begin{cases} 2\log_x 2 + 8^{2\log_4 \sqrt[3]{3y}} = \log_{\sqrt{x}}\left(2x^2\right) - xy, \\ 2^x \cdot 4^y = 8. \end{cases}$$

Ответ: $\varnothing$.

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=2. \end{cases}$$

Ответ: $(-2;0)\cup(0;2)$.

Найти положительные решения:

$$\begin{cases} x^{y+4x}=y, \\ x^3=y^{-1}. \end{cases}$$

Ответ: $(-2;3)$.

$$\begin{cases} (2x-3y)^2+5\cdot(2x-3y)-6=0, \\ 2(x+y)^2-5(x+y)+2=0. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{7}{5};\dfrac{3}{5}\right), \left(\dfrac{1}{2};0\right), (0;2), \left(-\dfrac{9}{10};\dfrac{7}{5}\right)$.

$$\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ x+y+xy=23. \end{cases}$$

Ответ: $(3;5), (5;3)$.

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18. \end{cases}$$

Ответ: $(2;1)$.

$$\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ x^2 y + xy^2 = 30. \end{cases}$$

Ответ: $(3;2), (5;1), (1;5), (2;3)$.

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{3}{2};4\right), (4;-1)$.

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7. \end{cases}$$

Ответ: $(-1;-2), (2;-1)$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Ответ: $(1;2), (2;1), (-1;-2), (-2;-1)$.

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - xy - 2x - 3y = 6. \end{cases}$$

Ответ: $(-2;2), \left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right), (6;2), \left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{cases} \log_5 (x + y) = 1, \\ 2^x + 2^y = 12. \end{cases}$$

Ответ: $(2;3), (3;2)$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{y+1} = 1\dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{1}{y+1} = 1\dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Ответ: $(3;2)$.

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 3, \\ y^2 - 3xy = 2. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$\begin{cases} x^2 - 6xy + 8y^2 = 0, \\ x^2 + 3y^2 - xy = 45. \end{cases}$$

Ответ: $(6;\ 3)$, $(-6;\ -3)$, $(4\sqrt{3};\ \sqrt{3})$, $(-4\sqrt{3};\ -\sqrt{3})$.

$$\begin{cases} \log_y x + \log_y x = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$$

Ответ: $(5;\ 5)$.

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x + y} = 20, \\ x^2 + y^2 = 136. \end{cases}$$

Ответ: $(10;\ 6)$, $(6;\ 10)$.

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ x + y = 28. \end{cases}$$

Ответ: $(27;\ 1)$, $(1;\ 27)$.

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 2, \\ \log_{27}(x + y) = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $(6;\ 3)$, $(3;\ 6)$.

В ответ записать $7x - 2y$:

$$\begin{cases} 5^x \cdot 2^y = 3200, \\ \log_{\sqrt{5}}(y - x) = 2. \end{cases}$$

В ответ записать произведение корней:

$$\begin{cases} x^{\lg y} = 4, \\ xy = 40. \end{cases}$$

В ответ записать $15y + 2x$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{15}, \\ \log_3 x + \log_3 y = 1 + \log_3 5. \end{cases}$$

В ответ записать $2x - y$ для $0 < x \le 90^\circ$:

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{7}{4}, \\ x + y = \dfrac{5\pi}{6}. \end{cases}$$

При каких a система не имеет решений?

$$\begin{cases} 2x + 31y = -23, \\ 2x + 2ay = 23. \end{cases}$$

Ответ: $15{,}5$.

В ответ записать произведение корней:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ 3^x \cdot 4^y = 12. \end{cases}$$

В ответ записать произведение $x \cdot y$:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x + y} = 2, \\ (x + y) \cdot 7^x = 2744. \end{cases}$$

В ответ записать наибольшее значение y:

$$\begin{cases} (1 + y)^x = 100, \\ \left(y^4 - 2y^2 + 1\right)^{x-1} = \dfrac{(y - 1)^{2x}}{(y + 1)^2}. \end{cases}$$

В ответ записать наибольшую сумму корней:

$$\begin{cases} x + y + xy = 11, \\ x + y - xy = 1. \end{cases}$$

В ответ записать произведение корней:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}} = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}, \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y}. \end{cases}$$

В ответ записать xy для $x > 0,\ y > 0$:

$$\begin{cases} y^{x+y} = x^4, \\ x^{x+y} = y. \end{cases}$$

Ответ: 1.

При каком m система не имеет решений:

$$\begin{cases} 3x + (m - 2)y = 1, \\ (m + 2)x + 4y = 2. \end{cases}$$

Ответ: -4.

В ответ записать $6x - 7y$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\log_2 x - \log_4 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$$

Ответ: -1.

$$\begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = 1152, \\ \log_{\sqrt{5}}(x+y) = 2. \end{cases}$$

Ответ: $(-2;\ 7)$.

$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{5}}(x-y) = 2. \end{cases}$$

Ответ: $(5;\ 2)$.

$$\begin{cases} \log_9\left(x^3 + y^3\right) = \log_3(x+y), \\ \log_3\left(x^2 - y^2\right) = \log_3(x+y). \end{cases}$$

Ответ: $(1;\ 0)$, $(2;\ 1)$.

$$\begin{cases} (x+y) \cdot 3^{y-x} = \dfrac{5}{27}, \\ 3\log_5(x+y) = x - y. \end{cases}$$

Ответ: $(4;\ 1)$.

$$\begin{cases} \log_2 \dfrac{x^2\sqrt{y+1}}{2} = 2, \\ \log_8 x \cdot \log_2 (y+1)^2 = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $(2;\ 3)$, $(\sqrt{2};\ 15)$.

$$\begin{cases} y^2 + 2x = 7, \\ x - 3y = 0. \end{cases}$$

Ответ: $(-21;\ -7)$, $(3;\ 1)$.

$$\begin{cases} x^2 - y = 1, \\ x - y = -5. \end{cases}$$

Ответ: $(3;\ 8)$, $(-2;\ 3)$.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Ответ: $(1;\ 2)$, $(2;\ 1)$.

Найти произведение корней:

$$\begin{cases} 3\cdot\left(2\log_{y^2} x+\log_{\frac{1}{x}} y\right)=10, \\ xy=81. \end{cases}$$

В ответ записать $\dfrac{x}{y}$:

$$\begin{cases} \log_2 x=\dfrac{1}{2}\log_2 y+\dfrac{1}{2}\log_2(4-x), \\ \log_2(x+y)=\dfrac{\log_3\left(\dfrac{y}{x}\right)}{\log_3\dfrac{1}{3}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} tgx-tgy=-2\sqrt{3}, \\ x-y=\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{2\pi}{3}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{3}+k\pi\right),\ k\in Z.$

$$\begin{cases} \sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\sin\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x\cdot\cos y=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \ \pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in Z.$

$$\begin{cases} x-y=-\dfrac{\pi}{6}, \\ \sin x\cdot\sin y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}\right),\ k\in Z.$

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3}, \\ tgx\cdot tgy=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{6}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{6}-k\pi\right),\ k\in Z.$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ 3tgx = tgy. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{6} + (k+n)\pi;\ \dfrac{\pi}{3} + (k-n)\pi\right),\ k \in Z,\ n \in Z.$

$$\begin{cases} x \cdot \sin^2\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = y \cdot \cos^2\left(y + \dfrac{\pi}{6}\right), \\ x \cdot \cos^2\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = y \cdot \sin^2\left(y + \dfrac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Ответ: $(0;\ 0),\ \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\right),\ k \in Z.$

Решение систем уравнений с тремя и более переменными потребует помимо классических способов еще и некоторых искусственных приемов. Это объясняется тем, что не всегда удается хорошо выразить одну переменную через другие и таким образом уменьшить количество неизвестных в системе. И второе основание - не всегда преобразована система уравнений с меньшим количеством переменных решается сравнительно легко.

Проиллюстрируем это на конкретных упражнениях.

$$\begin{cases} x \cdot (y-1) = 3, & (1) \\ (3-y) \cdot z = 1, & (2) \\ (x-2) \cdot (2-z) = 1. & (3) \end{cases}$$

Решение:

Из уравнений (1) и (2) выразим переменные x и z через y:

$x = \dfrac{3}{y-1};\ z = \dfrac{1}{3-y}$ (4); Найденные значения подставим в уравнение (3):

$\left(\dfrac{3}{y-1} - 2\right) \cdot \left(2 - \dfrac{1}{3-y}\right) = 1.$ Решаем образовавшееся уравнение:

$y \neq 1$ і $y \neq 3.$ $\dfrac{3-2y+2}{y-1} \cdot \dfrac{6-2y-1}{3-y} = 1;\ \dfrac{5-2y}{y-1} \cdot \dfrac{5-2y}{3-y} = 1;$

$(5-2y)^2 = (y-1) \cdot (3-y);\ 25 - 20y + 4y^2 = y^2 + 3y + y - 3;\ 5y^2 - 24y + 28 = 0;$

$D = 24^2 - 4 \cdot 5 \cdot 28 = 576 - 560 = 16.$

$y_1 = \dfrac{24-4}{10} = 2;\ y_2 = \dfrac{24+4}{10} = 2{,}8.$

Подставляя эти значения в формулы (4), найдем:

значения x и z:

$x_1 = \dfrac{3}{2-1} = 3;\ x_2 = \dfrac{3}{2-2{,}8} = \dfrac{3}{-0{,}8} = -\dfrac{3}{\frac{4}{5}} = -\dfrac{15}{4};$

$z_1 = \dfrac{1}{3-2} = 1;\ z_2 = \dfrac{1}{3-2{,}8} = \dfrac{1}{0{,}8} = 5.$

Ответ: $(3;\ 2;\ 1)$, $\left(-\frac{15}{4};\ 2{,}8;\ 5\right)$.

$$\begin{cases} x-y+z=0, & (1)\\ 3x^2+3z^2+5xyz=0, & (2)\\ 2x^3-2y^3-3xyz=0. & (3)\end{cases}$$

Решение:

Из первого уравнения выразим z через x и y:

$z=y-x.$ Подставив это значение z во второе и третье уравнения исходной системы, получим систему двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} 3x^2+3\cdot(y-x)^2+5xy\cdot(y-x)=0, & (4)\\ 2x^3-2y^3-3xy\cdot(y-x)=0. & (5)\end{cases}$$

Второе уравнение этой системы можно превратить:

$2\cdot(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)+3xy\cdot(x-y)=0;$

$(x-y)\cdot(2x^2+2xy+2y^2+3xy)=0;$

$(x-y)\cdot(2x^2+5xy+2y^2)=0;$

$$\left[\begin{array}{l} x-y=0,\\ 2x^2+5xy+2y^2=0.\end{array}\right.$$

$2x^2+5xy+2y^2=0\,|:xy;\ \ 2\left(\frac{x}{y}\right)+5+2\left(\frac{y}{x}\right)=0.$

Обозначим $\frac{x}{y}=t$:

$2\cdot t+5+\frac{2}{t}=0,\ \ t\neq 0.$

$2t^2+5t+2=0,\ \ D=25-16=9.$

$t_1=\frac{-5-3}{4}=-2;\ t_2=\frac{-5+3}{4}=-\frac{1}{2}.$

$x=-2y,\ x=-0{,}5y.$

Образуем совокупность трех систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} 3x^2+3(y-x)+5xy(y-x)=0,\\ x-y=0.\end{cases} & (6)\\ \begin{cases} 3x^2+3(y-x)+5xy(y-x)=0,\\ x=-2y.\end{cases} & (7)\\ \begin{cases} 3x^2+3(y-x)+5xy(y-x)=0,\\ x=-0{,}5y.\end{cases} & (8)\end{array}\right.$$

Решим систему уравнений (6):

$3x^2+3\cdot 0+5xy\cdot 0=0,\ x_1=0;\ y_1=0.$

Решим систему уравнений (7):

$3\cdot(-2y)^2+3\cdot(y+2y)+5\cdot(-2y)\cdot y\cdot(y+2y)=0,$

$12y^2+9y-30y^3=0\,|:(-3)$

$10y^3-4y^2-3y=0$

$y = 0$ або $y^2 - 4y - 3 = 0,\ D = 16 + 12 = 28 = 4 \cdot 7$

$y_2 = \dfrac{4 - 2\sqrt{7}}{2} = 2 - \sqrt{7};\ y_3 = 2 + \sqrt{7};\ x_2 = -4 + 2\sqrt{7};\ x_3 = -4 - 2\sqrt{7}.$

Система (8) имеет решения:

$3 \cdot (-0{,}5y)^2 + 3 \cdot (y + 0{,}5y) + 5 \cdot (-0{,}5y) \cdot y \cdot (y + 0{,}5y) = 0;$

$0{,}75y^2 + 4{,}5y - 3{,}75y^3 = 0; \big| : (-0{,}75);\ \ 5y^3 - y^2 - 6y = 0;$

$y \cdot (5y^2 - y - 6) = 0;\ \ y = 0$ або $5y^2 - y - 6 = 0;$

$D = 1 + 120 = 121;\ \ y_4 = \dfrac{1 - 11}{10} = -1;\ \ y_5 = \dfrac{1 + 11}{10} = 1{,}2;$

$x_4 = -0{,}5 \cdot (-1) = 0{,}5;\ \ x_5 = -0{,}5 \cdot 1{,}2 = -0{,}6.$

$z_1 = 0 - 0 = 0;\ \ z_2 = 2 - \sqrt{7} - (-4 + 2\sqrt{7}) = 2 - \sqrt{7} + 4 - 2\sqrt{7} = 6 - 3\sqrt{7};$

$z_3 = 2 + \sqrt{7} - (-4 - 2\sqrt{7}) = 2 + \sqrt{7} + 4 + 2\sqrt{7} = 6 + 3\sqrt{7};$

$z_4 = -1 - 0{,}5 = -1{,}5;\ \ z_5 = 1{,}2 + 0{,}6 = 1{,}8.$

Ответ: $(0;\ 0;\ 0)$, $(-4 + 2\sqrt{7}; 2 - \sqrt{7}; 6 - 3\sqrt{7})$, $(-4 - 2\sqrt{7};\ 2 + \sqrt{7};\ 6 + 3\sqrt{7})$, $(0{,}5;\ -1;\ -1{,}5)$, $(-0{,}6;\ 1{,}2;\ 1{,}8)$.

$$\begin{cases} y + z = 3, & (1) \\ z + x = -5, & (2) \\ x + y = 4. & (3) \end{cases}$$

Решение:

Добавим эти уравнения:

$2x + 2y + 2z = 2 \,\big|\, : 2;\ \ x + y + z = 1\ \ (4).$

Подставляя в уравнение (4) значение $z + y$, получим $3 + x = 1,\ x = -2.$

Аналогично $y - 5 = 1,\ y = 6;\ \ z + 4 = 1,\ z = -3.$

Ответ: $(-2;\ 6;\ -3)$.

$$\begin{cases} yz = -4, & (1) \\ zx = 3, & (2) \\ xy = 27. & (3) \end{cases}$$

Решение:

Перемножим левые части уравнений (1 – 3), а также их правые части:

$x^2y^2z^2 = -324;\ xyz = \sqrt{-324}.$

Ответ: $\varnothing$.

$$\begin{cases} zx + xy = -5, & (1) \\ xy + yz = 4, & (2) \\ yz + xz = 3. & (3) \end{cases}$$

Решение:

Добавим уравнения (1 – 3):

$2xy + 2xz + 2yz = 2 \big| : 2,\ \ xy + xz + yz = 1\ \ (4)$

Последовательно подставляя уравнения (1 – 3) в (4), получим новую систему уравнений:

$$zy-5=1,\quad xz+4=1,\quad xy+3=1.\qquad \begin{cases} zy=6 & (5)\\ xz=-3 & (6)\\ xy=-2 & (7)\end{cases}$$

Эту систему уравнений решаем аналогично:

$(xyz)^2=36,\ \ xyz=\pm 6$ (8)

Подставляя последовательно (6 – 7) в (8), получим:

$$x\cdot 6=\pm 6;\quad y\cdot(-3)=\pm 6;\quad x\cdot(-2)=\pm 6.\qquad \begin{cases} x=\pm 1;\\ y=\pm 2;\\ z=\pm 3.\end{cases}$$

Ответ: $(1;\ 2;\ 3)$, $(1;\ -2;\ 3)$, $(1;\ -2;\ -3)$, $(-1;\ 2;\ 3)$, $(-1;\ -2;\ 3)$, $(-1;\ -2;\ -3)$.

$$\begin{cases} (y+z)\cdot(z+x)=15, & (1)\\ (z+x)\cdot(x+y)=10, & (2)\\ (x+y)\cdot(y+z)=6. & (3)\end{cases}$$

Решение:

Перемножим левые и правые уравнения системы:

$(x+y)^2\cdot(x+z)^2\cdot(y+z)^2=900;\ \ ((x+y)\cdot(x+z)\cdot(y+z))^2=900.$

$(x+y)\cdot(x+z)\cdot(y+z)=\pm 30;$ (4)

Подставляя последовательно (1 – 3) в (4), получим совокупность двух систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2,\\ y+z=3,\\ z+x=5.\end{cases}\\ \begin{cases} x+y=-2,\\ y+z=-3,\\ z+x=-5.\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l} 2x+2y+2z=10.\\ 2x+2y+2z=-10.\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l} x+y+z=5.\\ x+y+z=-5.\end{array}\right.\quad \begin{cases} 2+z=5,\\ x+3=5.\end{cases}\quad \begin{cases} y+5=5,\\ -2+z=-5,\\ x-3=-5,\\ y-5=-5.\end{cases}\quad \begin{cases} z=3,\\ x=2,\\ y=0.\end{cases}\quad \begin{cases} y=0,\\ z=-3,\\ x=-2.\end{cases}$$

Ответ: $(2;\ 0;\ 3)$, $(-2;\ 0;\ -3)$.

$$\begin{cases} z+x-y=3, & (1)\\ x+y-z=-5, & (2)\\ y+z-x=1. & (3)\end{cases}$$

Решение:

Добавим уравнения (1) и (2):

$$+\begin{array}{l} z+x-y=3,\\ x+y-z=-5.\\ \hline 2x=-2;\ \ x=-1.\end{array}$$

Добавим уравнения (2) и (3):

$$+\begin{cases} x+y-z=-5,\\ y+z-x=1.\end{cases}$$

$$2y=-4;\ \ y=-2.$$

$$+\begin{cases} z+x-y=3,\\ y+z-x=1.\end{cases}$$

$2z=4;\ z=2.$

Ответ: $(-1;\ -2;\ 2)$.

$$\begin{cases} x^2-(y-z)^2=3,\\ y^2-(z-x)^2=12,\\ z^2-(x-y)^2=1.\end{cases}$$

Решение:

К каждому из уравнений системы применим формулу разности квадратов:

$$\begin{cases} (x-y+z)\cdot(x+y-z)=3, & (1)\\ (y-z+x)\cdot(y+z-x)=12, & (2)\\ (z-x+y)\cdot(z+x-y)=4. & (3)\end{cases}$$

Перемножим левые и правые части уравнений системы:

$$(x+y-z)^2\cdot(y+z-x)^2\cdot(z+x-y)^2=144,$$

$$(x+y-z)\cdot(y+z-x)\cdot(z+x-y)=\pm 12 \quad (4)$$

Последовательно подставляя (1 – 3) в (4), получим две системы уравнений:

$$\begin{cases} (y+z-x)\cdot 3=12,\\ (z+x-y)\cdot 12=12,\\ (x+y-z)\cdot 4=12.\end{cases} \text{ і } \begin{cases} (y+z-x)\cdot 3=-12,\\ (z+x-y)\cdot 12=-12,\\ (x+y-z)\cdot 4=-12.\end{cases}$$

$$+\begin{cases} y+z-x=4, & (5)\\ z+x-y=1, & (6)\\ x+y-z=3. & (7)\end{cases} \qquad +\begin{cases} y+z-x=-4, & (8)\\ z+x-y=-1, & (9)\\ x+y-z=-3. & (10)\end{cases}$$

(5)+(6):

$2z=5,\ z=2{,}5.$

(6)+(7):

$2x=4,\ x=2.$

(5)+(7):

$2y=7,\ y=3{,}5.$

(8)+(9):

$2z=-5,\ z=-2{,}5.$

(9)+(10):

$2x=-4,\ x=-2.$

(8)+(10):

$2y=-7,\ y=-3{,}5.$

Ответ: $(2;\ 3{,}5;\ 2{,}5)$, $(-2;\ -3{,}5;\ -2{,}5)$.

$$\begin{cases} \dfrac{xyz}{x+y}=1,\\ \dfrac{2xyz}{y+z}=1,\\ \dfrac{5xyz}{z+x}=1.\end{cases}$$

Решение:

Перевернем каждое из уравнений системы:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xyz}=1,\\ \dfrac{y+z}{2xyz}=1\,\Big|\cdot 2,\\ \dfrac{z+x}{5xyz}=1\,\Big|\cdot 5.\end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x+y}{xyz}=1,\\ \dfrac{y+z}{2xyz}=2,\\ \dfrac{z+x}{5xyz}=5.\end{cases}$$

Разделим каждый член числителя дроби на знаменатель, считая, что $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0.$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{xz} = 1, & (1) \\ \dfrac{1}{xz} + \dfrac{1}{xy} = 2, & (2) \\ \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{xy} = 5. & (3) \end{cases}$$

После добавления левых и правых частей уравнений системы получим:

$$\frac{2}{yz} + \frac{2}{xz} + \frac{2}{xy} = 8 \,\Big|: 2 \quad \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = 4. \quad (4)$$

Подставляя (1 – 3) в (4) получим:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{xy} + 1 = 4, \\ \dfrac{1}{yz} + 2 = 4, \\ \dfrac{1}{xz} + 5 = 4. \end{cases} \quad \text{Звідси:} \begin{cases} \dfrac{1}{xy} = 3, \\ \dfrac{1}{yz} = 2, \\ \dfrac{1}{xz} = -1. \end{cases} \begin{cases} xy = \dfrac{1}{3}, & (5) \\ yz = \dfrac{1}{2}, & (6) \\ xz = -1. & (7) \end{cases}$$

После перемножения левой и правой части уравнения последней системы, получим:

$$(xyz)^2 = -\frac{1}{6} \quad \varnothing.$$

Ответ: $\varnothing.$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 29, & (1) \\ xy + yz + zx = 26, & (2) \\ xy - yz - zx = -14. & (3) \end{cases}$$

Умножим обе части уравнения (2) на 2:

$$+\begin{array}{l} 2xy + 2yz + 2xz = 52 \ \ (4). \\ x^2 + y^2 + z^2 = 29 \\ \hline x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = 81. \end{array}$$

Добавим уравнения (1) и (4):

По формуле квадрата трехчлена имеем:

$$(x + y + z)^2 = 81, \ x + y + z = \pm 9.$$

Добавим уравнения (2) и (3):

$$2xy = 12, \ xy = 6.$$

Образуем такие две системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 9, \\ xy = 6, \\ xy + yz + zx = 26. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y + z = -9, \\ xy = 6, \\ xy + yz + xz = 26. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 9 - z, \\ 6 + z \cdot (x + y) = 26. \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -9 - z, \\ 6 + z \cdot (y + x) = 26. \end{cases}$$

$$6 + z \cdot (9 - z) = 26, \qquad 6 + z \cdot (-9 - z) = 26,$$

$6+9z-z^2-26=0,$

$z^2-9z+20=0,$

$z_1=4,\ z_2=5;$

$6-9z-z^2-26=0,$

$z^2+9z+20=0,$

$D=81-80=1,$

$z_1=\dfrac{-9-1}{2}=-5,\ z_2=\dfrac{-9+1}{2}=-4;$

Имеем две системы уравнений:

$\begin{cases}x+y+4=9,\\ xy=6.\end{cases}$ $\begin{cases}x+y+5=9,\\ xy=6.\end{cases}$ $\begin{cases}x+y-5=-9,\\ xy=6.\end{cases}$ $\begin{cases}x+y-4=-9,\\ xy=6.\end{cases}$

$\begin{cases}x+y=5,\\ xy=6.\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=4,\\ xy=6.\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=-4,\\ xy=6.\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=-5,\\ xy=6.\end{cases}$

$\begin{cases}y=5-x,\\ x\cdot(5-x)-6=0.\end{cases}$ $\begin{cases}y=4-x,\\ x\cdot(4-x)-6=0.\end{cases}$ $\begin{cases}y=-4-x,\\ x\cdot(-4-x)=6.\end{cases}$ $\begin{cases}y=-5-x,\\ x\cdot(-5-x)=6.\end{cases}$

$-x^2+5x-6=0,\quad -x^2+4x-6=0,\quad -4x-x^2-6=0,\quad -5x-x^2-6=0$

$x^2-5x+6=0,\quad x^2-4x+6=0,\quad x^2+4x+6=0,\quad x^2+5x+6=0$

$x_1=2,\ x_2=3.\quad D=16-24<0\quad D=16-24<0\quad D=25-24=1$

$y_1=3,\ y_2=2.\quad \varnothing\quad \varnothing\quad x_3=\dfrac{-5-1}{2}=-3;\ \ x_4=\dfrac{-5+1}{2}=-2.$

$z_1=4,\ z_2=4.\quad y_3=-5+3=2;\ y_4=-5+2=3.$

$z_3=-5,\ z_4=-5.$

Ответ: $(2;\ 3),\ (3;\ 2),\ (-3;\ -2),\ (-2;\ -3).$

$$\begin{cases}x+y-z=2, & (1)\\ x^2+y^2+z^2=6, & (2)\\ x^3+y^3-z^3=8. & (3)\end{cases}$$

Решение:

Преобразуем третье уравнение системы:

$x^3+y^3=8+z^3;\to(x+y)\cdot\left(x^2-xy+y^2\right)=8+z^3\ \ (4).$

Из первого уравнения системы имеем:

$$\begin{cases}x+y=2+z, & (5)\\ x^2+y^2=6-z^2, & (6)\\ (x+y)^2=(2+z)^2. & (8)\end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2,\ \ 2xy=(x+y)^2-\left(x^2+y^2\right);$

$$xy=\frac{(x+y)^2-\left(x^2+y^2\right)}{2}\quad (7)$$

Подставляем (6) и (8) в (7):

$$xy=\frac{(2+z)^2-\left(6-z^2\right)}{2}=\frac{4+4z+z^2-6+z^2}{2}=\frac{4z+2z-2}{2}=z^2+2z-1\ \ (9)$$

Подставляем (5), (6), (9) в (4):

$(2+z)\cdot\left(6-z^2-z^2-2z+1\right)=(2+z)\cdot\left(4-2z+z^2\right);$

$(2+z)\cdot\left(7-2z^2-2z\right)-(2+z)\cdot\left(4-2z+z^2\right)=0;$

$(2+z)\cdot\left(7-2z^2-2z-4+2z-z^2\right)=0;$

$(2+z)\cdot(-3z^2+3)=0;$

$2+z=0, \qquad -3z^2+3=0,$

$z_1=-2. \qquad z^2-1=0, \;(z-1)\cdot(z+1)=0, \;z_2=-1; \;z_3=1.$

Образуется совокупность трех систем уравнений:

$$\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=2, \\ z=-2. \end{cases} \begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=5, \\ z=-1. \end{cases} \begin{cases} x+y=3, \\ x^2+y^2=5, \\ z=-1. \end{cases}$$

Решим каждую из этих систем уравнений:

$y=-x, \quad x^2+(-x)^2=2, \;2x^2=2, \;x^2=1, \;x_1=-1, \;x_2=1.$

$y_1=1, \;y_2=-1.$

$y=1-x, \;(1-x)^2+x^2=5, \;x^2+1-2x+x^2=5, \;2x^2-2x-4=0|:2 \;\; x^2-x-2=0,$

$x_3=-1, \;x_4=2.$

$y_3=2, \;y_4=-1.$

$y=3-x, \;(3-x)^2+x^2=5, \;9-6x+x^2+x^2-5=0, \;2x^2-6x+4=0|:2 \;\; x^2-3x+2=0,$

$x_5=1, \;x_6=2.$

$y_5=2, \;y_6=1.$

Ответ: $(-1;\;1), \;(1;\;-1), \;(-1;\;2), \;(2;\;-1), \;(1;\;2), \;(2;\;1).$

$$\begin{cases} x+y+z=-2, & (1) \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=-\dfrac{1}{2}, & (2) \\ xyz=2. & (3) \end{cases}$$

Решение:

Преобразуем уравнение (2) с учетом уравнения (3):

$$\frac{yz+xz+xy}{xyz}=-\frac{1}{2}, \;\; \frac{yz+xz+xy}{2}=-\frac{1}{2}, \;\; yz+xz+xy=-1.$$

Образуем систему уравнений равносильную исходной:

$$\begin{cases} x+y+z=-2, & (4)\rightarrow \\ yz+xz+xy=-1, & (5)\rightarrow \\ xyz=2. & (6) \end{cases} \begin{cases} x+y=-z-2, & (7) \\ (x+y)\cdot z+xy=-1, & (8) \\ xy=\dfrac{2}{z}. & (9) \end{cases}$$

Подставляя (7) и (9) у (8), получим:

$$(-z-2)\cdot z+\frac{2}{z}+1=0|\cdot z, \;\; -z^3-2z^2+z+2=0 \rightarrow z^3+2z^2-z-2=0.$$

Ищем делители свободного члена: ± 1 и ± 2.

-1: $(-1)^3 + 2\cdot(-1)^2 + 1 - 2 = -1 + 2 + 1 - 2 = 0$. $z_1 = -1$.

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} z^3+2z^2-z-2 \\ z^3+z^2 \end{array} & \begin{array}{l} z+1 \\ \hline z^2+z-2 \end{array} \\ \hline \quad -\begin{array}{l} z^2-z \\ z^2+z \end{array} & \\ \hline \quad\quad -\begin{array}{l} -2z-2 \\ -2z-2 \end{array} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$z^2 + z - 2 = 0$, $D = 1 + 8 = 9$.

$z_2 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$; $z_3 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$.

Подставляем $z_1 = -1$ в уравнение (7) и (9):

$\begin{cases} x + y = 1 - 2, \\ xy = \dfrac{2}{-1}. \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = -1, \\ xy = -2. \end{cases}$ $\begin{cases} y = -1 - x, \\ x\cdot(-1 - x) = -2. \end{cases}$ $\begin{cases} y = -1 - x, \\ -x - x^2 + 2 = 0. \end{cases}$

$x^2 + x - 2 = 0$. Подставлям $z = -2$ в уравнение (7) и (9):

$\begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = 1, \\ z_1 = -1. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = -2, \\ z_2 = -1. \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 2 - 2, \\ xy = \dfrac{-2}{2}. \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 0, \\ xy = -1. \end{cases}$ $\begin{cases} y = -x, \\ x\cdot(-x) = -1. \end{cases}$ $\begin{cases} y = -x, \\ -x^2 = -1. \end{cases}$

$x_3 = 1$, $y_3 = -1$, $z_3 = -2$, $x_4 = -1$, $y_4 = 1$, $z_4 = -2$.

Подставляя $z = 1$ в уравнение (7) и (9), получим:

$\begin{cases} x + y = -1 - 2, \\ xy = \dfrac{2}{1}. \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = -3, \\ xy = 2. \end{cases}$ $\begin{cases} y = -3 - x, \\ x\cdot(-3 - x) = 2. \end{cases}$ $\begin{cases} y = -3 - x, \\ -3x - x^2 - 2 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} y = -3 - x, \\ x^2 + 3x + 2 = 0. \end{cases}$ $x_5 = -1$, $x_6 = -2$, $y_5 = -2$, $y_6 = -1$, $z_5 = 1$, $z_6 = 1$.

Ответ: $(-2;\ 1;\ -1)$, $(1;\ -2;\ -1)$, $(1;\ -1;\ -2)$, $(-1;\ 1;\ -2)$, $(-1;\ -2;\ 1)$, $(-2;\ -1;\ 1)$.

Эту систему уравнений можно было бы решить с помощью обобщенной теоремы Виета, но она не входит в программу по математике для ООШ.

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1, & (1) \\ y^2 + yz + z^2 = 3, & (2) \\ z^2 + zx + x^2 = 7. & (3) \end{cases}$$

Решение:

От уравнения (1) вычтем уравнение (2):

$x^2 - y^2 + y(x - z) + y^2 - z^2 = -2 \to x^2 - z^2 + y(x - z) = -2$,

$(x - z)\cdot(x + z) + y\cdot(x - z) = -2$, $(x - z)\cdot(x + y + z) = -2$ (4)

Аналогично (2) - (3):

$y^2 - z^2 + z\cdot(y - x) + z^2 - x^2 = -4 \to y^2 - x^2 + z\cdot(y - x) = -4$.

$(y - x)\cdot(y + x) + z(y - x) = -4 \to (y - x)\cdot(x + y + z) = -4$ (5)

Разделим (4) на (5):

$$\frac{(x-z)\cdot(x+y+z)}{(y-x)\cdot(x+y+z)}=\frac{-2}{-4}\to\frac{x-z}{y-x}=\frac{1}{2}\to 2x-2z=y-x,\quad y=3x-2x\quad (6)$$

Подставим (6) в (1):

$$x^2+x\cdot(3x-2z)+(3x-2z)^2=1\to x^2+3x^2-2xz+9x^2-12xz+4z^2=1,$$

$$\begin{cases}13x^2-14xz+4z^2=1,\\ x^2+xz+z^2=7\,|\cdot 14\end{cases}\quad +\begin{cases}13x^2-14xz+4z^2=1,\\ 14x^2+14xz+14z^2=98\end{cases}$$

$$\overline{\quad 27x^2+18z^2=99\quad}$$

Рассмотрим систему уравнений:

подстановка $z=tx.$

$$\begin{cases}13x^2-14x(tx)+4(tx)^2=1,\\ x^2+x(tx)+(tx)^2=7.\end{cases}\quad \begin{cases}13x^2-14x^2t+4x^2t^2=1,\\ x^2+x^2t+x^2t^2=7.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2\cdot(13-14t+4t^2)=1,}{x^2\cdot(1+t+t^2)=7.}\end{cases}\quad \frac{13-14t+4t^2}{1+t+t^2}=\frac{1}{7};$$

Используя основное свойство пропорции, получим:

$$7\cdot(13-14t+t^2)=(1+t+t^2)\cdot 1\to 91-98t+28t^2=1+t+t^2;$$

$$91-98t+28t^2-1-t-t^2=0\to 27t^2-99t+90=0;$$

$$D=99^2-4\cdot 27\cdot 90=9801-9720=81\to t_1=\frac{99-9}{54}=\frac{90}{54}=\frac{5}{3};\ t_2=\frac{108}{54}=2.$$

$z=\frac{5}{3}x$ або $z=2x.$ Подставляем эти значения в (6):

$$y=3x-2\cdot\frac{5}{3}x=3x-\frac{10}{3}x=\frac{9x-10x}{3}=-\frac{1}{3}x\ \text{ або }\ y=3x-2\cdot 2=3x-4.$$

$$(A)\begin{cases}27x^2+11z^2=99,\\ y=-\dfrac{1}{3}x,\\ z=\dfrac{5}{3}x.\end{cases}\quad (Б)\begin{cases}27x^2+11z^2=99,\\ y=-\dfrac{1}{3}x,\\ z=2x.\end{cases}\quad (В)\begin{cases}27x^2+11z^2=99,\\ y=3x-4,\\ z=\dfrac{5}{3}x.\end{cases}\quad (Г)\begin{cases}27x^2+11z^2=99,\\ y=3x-4,\\ z=2x.\end{cases}$$

Решим каждую из этих систем уравнений:

А): $27x^2+11\cdot\left(\frac{5}{3}x\right)^2=99;\ \ 27x^2+\frac{25}{9}x^2=99\,|\cdot 9;\ \ 243x^2+25x^2=891,$

$$268x^2=891,\ \ x^2=\frac{891}{263},\ \ x_1=-\sqrt{\frac{891}{263}},\ \ x_2=\sqrt{\frac{891}{263}}.$$

$$y_1=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{891}{263}},\ \ y_2=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{891}{263}},\ \ z_1=-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{891}{263}},\ \ z_2=\frac{5}{3}\sqrt{\frac{891}{263}}.$$

Б): $27x^2+11\cdot(2x)^2=99;\ \ 27x^2+44x^2=99;\ \ 71x^2=99,$

$$x_3=-\sqrt{\frac{99}{71}},\ \ x_4=\sqrt{\frac{99}{71}}.$$

$$y_3=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{99}{71}},\ \ y_4=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{99}{71}},\ \ z_3=-2\sqrt{\frac{99}{71}},\ \ z_4=2\sqrt{\frac{99}{71}}.$$

В): $x_5=-\sqrt{\frac{891}{263}},\ x_6=\sqrt{\frac{891}{263}},$

$y_5=-3\sqrt{\frac{891}{263}}-4,\ y_6=3\sqrt{\frac{891}{263}}-4,\ z_5=-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{891}{263}},\ z_6=\frac{5}{3}\sqrt{\frac{891}{263}}.$

Г): $x_7=-\sqrt{\frac{99}{71}},\ x_8=\sqrt{\frac{99}{71}},$

$y_7=-3\sqrt{\frac{99}{71}}-4,\ y_8=3\sqrt{\frac{99}{71}}-4,\ z_7=-2\sqrt{\frac{99}{71}},\ z_8=2\sqrt{\frac{99}{71}}.$

Ответ:

$\left(-\sqrt{\frac{891}{263}};\frac{1}{3}\sqrt{\frac{891}{263}};-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{891}{263}}\right),\left(\sqrt{\frac{891}{263}};-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{891}{263}};\frac{5}{3}\sqrt{\frac{891}{263}}\right),\left(-\sqrt{\frac{99}{71}};\frac{1}{3}\sqrt{\frac{99}{71}};-2\sqrt{\frac{99}{71}}\right),$

$\left(\sqrt{\frac{99}{71}};-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{99}{71}};2\sqrt{\frac{99}{71}}\right),\left(-\sqrt{\frac{891}{263}};-3\sqrt{\frac{891}{263}}-4;-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{891}{263}}\right),\left(\sqrt{\frac{891}{263}};3\sqrt{\frac{891}{263}}-4;\frac{5}{3}\sqrt{\frac{891}{263}}\right),$

$\left(-\sqrt{\frac{99}{71}};-3\sqrt{\frac{99}{71}}-4;-2\sqrt{\frac{99}{71}}\right),\left(\sqrt{\frac{99}{71}};3\sqrt{\frac{99}{71}}-4;2\sqrt{\frac{99}{71}}\right).$

$$\begin{cases}(x+y)\cdot(x+z)=x, & (1)\\ (y+z)\cdot(y+x)=2y, & (2)\\ (z+x)\cdot(z+y)=3z. & (3)\end{cases}$$

Решение:

Уникальный способ решения.

Если $x=0,$ то $(y+z)\cdot(y+x)=2y,\ (y+z)\cdot y=2y,\ y^2+yz=2y,\ y+z=2.$

Из уравнения (1) следует $yz=0\Rightarrow y\neq 0, z=0; (0;0;0).$

Пускай $x=y=0,$ тогда из уравнения (3) имеем:

$(z+0)\cdot(z+0)=3z,\ z^2=3z,\ z\cdot(z-3)=0,\ z=0$ або $z=3;\ (0;0;3).$

Пусть $x=z=y,$ тогда $(y+0)\cdot(y+0)=2y,\ y^2-2y=0,\ y^2-2y=0,\ y=0$ или $y=2;$ $(0;2;0).$

Пусть $y=z=0,$ тогда $(x+0)\cdot(x+0)=x,\ x^2-x=0,\ x=0,\ x=1;\ (1;0;0).$

Пусть $x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0.$

Делим (1) на (2):

$\frac{(x+y)\cdot(x+z)=x}{(y+z)\cdot(x+y)=2y};\ \frac{x+z}{y+z}=\frac{x}{2y}.$

Делим (2) на (3):

$\frac{(y+z)\cdot(y+x)=2y}{(z+x)\cdot(z+y)=3z};\ \frac{y+x}{z+x}=\frac{2y}{3z}.$

Применяя основное свойство пропорции, получим:

$$\begin{cases}(x+z)\cdot 2y=(y+z)\cdot x, & \to\\ (y+x)\cdot 3z=(z+x)\cdot 2y. & \to\end{cases}\begin{cases}2xy+2zy=yx+xz,\\ 3yz+3xz=2yz+2xy.\end{cases}$$

$$\begin{cases}xy+2yz-xz=0, & (4)\\ 2xy-yz-3xz=0. & (5)\end{cases}\to+\begin{cases}xy+2yz-xz=0,\\ 4xy-2yz-6xz=0.\end{cases}$$

$5xy-7xz=0,\ x(5y-7y)=0, x\neq 0,$ тоді $5y-7z=0,\ y=\frac{7}{5}z.$

Это значение подставляем в уравнение (4):

$$x\cdot\frac{7}{5}z+2\cdot\frac{7}{5}z\cdot z-xz=0,\ \ \frac{7}{5}zx+\frac{14}{5}z^2-xz=0,\ \ \frac{2}{5}zx+\frac{14}{5}z^2=0;\ \ z\cdot\left(\frac{2}{5}x+\frac{14}{5}z\right)=0,\ z\neq 0,$$

тогда $\frac{2}{5}x+\frac{14}{5}z=0\big|\times 5,\ 2x=-14z,\ x=-7z.$

Значение x и y подставим в уравнение (3):

$$(z-7z)\cdot\left(z+\frac{7}{5}z\right)=3z,\ \ -6z\cdot 2{,}4z=3z\big|:3z,-2z\cdot 2{,}4=1;$$

$$z=-1:4\frac{8}{10}=1:\left(-4\frac{4}{5}\right)=-1:\frac{24}{5}=-\frac{5}{24};$$

$$y=\frac{7}{5}\cdot\left(-\frac{5}{24}\right)=-\frac{7}{24};\ \ x=-7\cdot\left(-\frac{5}{24}\right)=-\frac{35}{24}.$$

Ответ: $(0;0;0),(0;0;3),(0;2;0),(1;0;0),\left(\frac{35}{24};-\frac{7}{24};-\frac{5}{24}\right).$

$$\begin{cases}3x-\sqrt[4]{x+7y}=2y,\\ \sqrt{x+y}+2y=3x.\end{cases}$$

Решение:

$\begin{cases}\sqrt[4]{x+7y}=3x-2y,\\ \sqrt{x+y}=3x-2y.\end{cases}$ Целесообразно произвести замену $3x-2y=a$ (1)

Тоді $\begin{cases}\sqrt[4]{x+7y}=a,\\ \sqrt{x+y}=a.\end{cases}$ $\begin{cases}x+7y=a^4,\\ x+y=a^2\big|\cdot(-1).\end{cases}$ $\begin{cases}x+7y=a^4,\\ -x-y=-a^2\big|\cdot 7.\end{cases}$

Добавляя уравнение последней системы, получим значение x и y:

$$6y=a^4-a^2,\ \ y=\frac{a^4-a^2}{6},$$

$$\begin{cases}x+7y=a^4,\\ x+y=a^2\big|\cdot(-7)\end{cases}\quad +\begin{cases}x+7y=a^4,\\ -7x-7y=7a^2\end{cases}\quad -6x=a^4-7a^2\qquad x=\frac{7a^2-a^4}{6}.$$

Подставляя эти значения x и y в замену (1) получим:

$$3\cdot\frac{7a^2-a^4}{6}-2\cdot\frac{a^4-a^2}{6}=a\big|\cdot 6,\ \ 21a^2-3a^4-2a^4+2a^2=6a,$$

$$-5a^4+23a^2-6a=0\big|\cdot(-1),\ \ 5a^4-23a^2+6a=0,\ \ a\cdot\left(5a^3-23a+6\right)=0,\ \ a_1=0;$$

$5a^3-23a+6=0.$ $a_2=2,$ бо $5\cdot 2^3-23\cdot 2+6=0.$

$$\begin{array}{r|l} 5a^3-23a+6 & a-2 \\ \cline{2-2} -\ 5a^3-10a^2 & 5a^2+10a-3 \\ \hline 10a^2-23a & \\ -\ 10a^2-20a & \\ \hline 3a+6 & \\ -\ 3a+6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$D=100+60=160,$$

$$a_1=\frac{-10-\sqrt{160}}{10}=\frac{-10-2\sqrt{40}}{10}=$$

$$=\frac{-10-4\sqrt{10}}{10}=-\frac{5+2\sqrt{10}}{5}<0,\ a>0.$$

$$a_3=\frac{-5+2\sqrt{10}}{5}>0.$$

Тогда $x_1=\dfrac{7\cdot 0^2-2^4}{6}=0;\ \ y_1=\dfrac{0^4-0^2}{6}=0.$ $\qquad (0;\ 0).$

$$x_2=\frac{7\cdot 2^2-2^4}{6}=2;\ \ y_2=\frac{2^4-2^2}{6}=\frac{16-4}{6}=2. \qquad (2;\ 2).$$

$$x_3=\frac{7\cdot\left(\frac{-5+2\sqrt{10}}{5}\right)^2-\left(\frac{-5+2\sqrt{10}}{5}\right)^4}{6}=\frac{7\cdot\frac{25-20\sqrt{10}+40}{25}-\left(\frac{65-20\sqrt{10}}{25}\right)^2}{6}=$$

$$=\frac{\frac{455\cdot 140\sqrt{10}}{25}-\frac{4225-2600\sqrt{10}+4000}{625}}{6}=\frac{\frac{11375-3500\sqrt{10}-4225+2600\sqrt{10}-4000}{625}}{6}=$$

$$=\frac{\frac{3150-900\sqrt{10}}{625}}{6}=\frac{3150-900\sqrt{10}}{3750}=\frac{315-90\sqrt{10}}{375}=\frac{63-18\sqrt{10}}{75}=\frac{21-6\sqrt{10}}{25}.$$

$$y_3=\frac{a^4-a^2}{6}=\frac{\left(\frac{2\sqrt{10}-5}{5}\right)^4-\left(\frac{2\sqrt{10}-5}{5}\right)^2}{6}=\frac{\left(\frac{40-20\sqrt{10}+25}{25}\right)^2-\frac{40-20\sqrt{10}+25}{25}}{6}=$$

$$=\frac{\left(\frac{65-20\sqrt{10}}{25}\right)^2-\left(\frac{65-20\sqrt{10}}{25}\right)}{6}=\frac{\frac{4225-2600\sqrt{10}+4000}{625}-\frac{56-20\sqrt{10}}{25}}{6}=$$

$$=\frac{8295-2600\sqrt{10}-1625+500\sqrt{10}}{625\cdot 6}=\frac{6600-2100\sqrt{10}}{3750}=\frac{660-210\sqrt{10}}{375}=$$

$$=\frac{132-42\sqrt{10}}{75}=\frac{44-14\sqrt{10}}{25}.$$

Ответ: $(0;0),(2;2),\left(\dfrac{21-6\sqrt{10}}{25};\dfrac{44-14\sqrt{10}}{25}\right).$

$$\frac{y+z-x}{4}=\frac{x+z-y}{16}=\frac{x+y-z}{4}=xyz.$$

Решение:

Введем новую переменную: $\dfrac{y+z-x}{4}=\dfrac{x+z-y}{16}=\dfrac{x+y-z}{4}=xyz=t.$

Образуем систему уравнений:

$$\begin{cases} y+z-x=4t, & (1)\\ x+z-y=16t, & (2)\\ x+y-z=4t, & (3)\\ xyz=t. & (4)\end{cases}$$

Добавим уравнения (1), (2), (3):

$x+y+z=24t$ (5)

Вычтем (1) от (5): $\qquad 2x=20t,\ x=10t.$

Вычтем (2) от (5): $2y = 8t,\ y = 4t.$

Вычтем (3) от (5): $2z = 20t,\ z = 10t.$

Найденные значения x, y и z подставим в уравнение (4):

$10t \cdot 4t \cdot 10t = t;\ \ 400t^3 - t = 0,\ \ t \cdot (400t^2 - 1) = 0;$

$t_1 = 0,\ \ x_1 = 0,\ \ y_1 = 0,\ \ z_1 = 0.$

$t^2 = \frac{1}{400};\ \ x_2 = -\frac{1}{2},\ y_2 = -\frac{1}{5},\ z_2 = -\frac{1}{2}.$

$t_2 = -\frac{1}{20};\ \ x_3 = \frac{1}{2},\ y_3 = \frac{1}{5},\ z_3 = \frac{1}{2}.$

$t_3 = \frac{1}{20}.$

Ответ: $(0; 0; 0), \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{5}; -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right).$

Задания для самостоятельной работы:

$\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10. \end{cases}$ Ответ: $(3; 2), (-3; -2).$

$\begin{cases} y^2 + xy = 231, \\ x^2 + xy = 210. \end{cases}$ Ответ: $(10; 11), (-10; -11).$

$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5. \end{cases}$ Ответ: $(2; 3), (3; 2), (-2; -3), (-3; -2).$

$\begin{cases} x \cdot y = 12, \\ xz = 15, \\ yz = 20. \end{cases}$ Ответ: $(3; 4; 5), (-3; -4; -5).$

$\begin{cases} xy + xz = 7, \\ xy + yz = 15, \\ yz + xz = 16. \end{cases}$ Ответ: $(1; 3; 4), (-1; -3; -4).$

$\begin{cases} x^2 + xy - xz = 2, \\ y^2 + xy - yz = 3, \\ z^2 - xy - yz = 4. \end{cases}$ Ответ: $\left(\frac{2}{3}; 1; -\frac{4}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}; -1; \frac{4}{3}\right).$

$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{3}{4}, \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{5}{6}, \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{15}{8}. \end{cases}$ Ответ: $(1; 3; 5).$

$\begin{cases} x + y + z = 11, \\ xy + xz + yz = 36, \\ xyz = 36. \end{cases}$ Ответ: $(2; 3; 6), (2; 6; 3), (3; 2; 6), (3; 6; 2), (6; 2; 3), (6; 3; 2).$

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ xy+xz+yz=47, \\ (z-x)\cdot(z-y)=2. \end{cases}$$

Ответ: $(-4;-3;-5), (-3;-4;-5), (4;3;5), (3;4;5),$
$\left(\frac{7-\sqrt{113}}{2};\frac{7+\sqrt{113}}{2};9\right), \left(\frac{7+\sqrt{113}}{2};\frac{7-\sqrt{113}}{2};9\right),$
$\left(\frac{-7-\sqrt{113}}{2};\frac{-7+\sqrt{113}}{2};-9\right), \left(\frac{-7+\sqrt{113}}{2};\frac{-7-\sqrt{113}}{2};-9\right).$

$$\begin{cases} x^2-6xy+6y^2=-2, \\ x^2-6xz+11z^2=3, \\ y^2-4yz+3z^2=0. \end{cases}$$

Ответ: $(-6;-1;-1), (-2;-1;-1), (2;1;1), (6;1;1), (-4;-3;-1), (4;3;1),$
$\left(-\frac{46}{\sqrt{337}};-\frac{15}{\sqrt{337}};-\frac{5}{\sqrt{337}}\right), \left(\frac{46}{\sqrt{337}};\frac{15}{\sqrt{337}};\frac{5}{\sqrt{337}}\right).$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-2}{2}, \\ x+2y-z=12. \end{cases}$$

Ответ: $(6;5;4).$

$$\begin{cases} x+\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{2}{y}, \\ y-x=3. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2};\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right), (-4;-1).$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\frac{5}{2}\sqrt[6]{xy}, \\ x+y=65. \end{cases}$$

Ответ: $(1;64), (64;1).$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{7}{\sqrt{xy}}+1, \\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=78. \end{cases}$$

Ответ: $(4;9), (9;4).$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}}+\sqrt{\frac{x+y}{6x}}=\frac{5}{2}, \\ xy=x+y. \end{cases}$$

Ответ: $\left(3;\frac{3}{2}\right), \left(\frac{24}{23};24\right).$

$$\begin{cases} \sqrt{x+\frac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}=-3, \\ 2x+y+\frac{1}{y}=8. \end{cases}$$

Ответ: $(3;1), (5;-1), (4+\sqrt{10};3-\sqrt{10}), (4-\sqrt{10};3+\sqrt{10}).$

$$\begin{cases} \frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{17}{4}, \\ x\cdot(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4}=52. \end{cases}$$

Ответ: $(5;4), (-5;-4), (15;-12), (-15;12).$

$$\begin{cases} x^2 + y \cdot \sqrt[3]{x^2 y} = 68, \\ y^2 + x \cdot \sqrt[3]{xy^2} = 17. \end{cases}$$

Ответ: $(8;1), (-8;-1), (8;-1), (-8;1)$.

$$\begin{cases} 11y + \sqrt[5]{x + 9y} = 7x, \\ \sqrt[3]{x+y} = 7x - 11y. \end{cases}$$

Ответ: $(0;0), (5;3), (-5;-3), \left(\frac{10}{243}; -\frac{1}{243}\right), \left(-\frac{10}{243}; \frac{1}{243}\right)$.

$$\begin{cases} \log_2 (x + y) = 2, \\ \log_{\sqrt{3}} y + \log_{\sqrt{3}} x = 2. \end{cases}$$

Ответ: $(3;1), (1;3)$.

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24, \\ 2^y \cdot 3^x = 54. \end{cases}$$

Ответ: $(3;1)$.